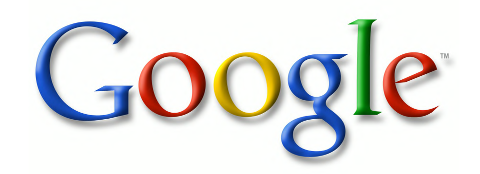
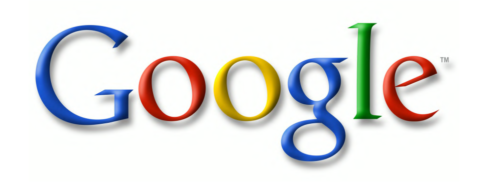
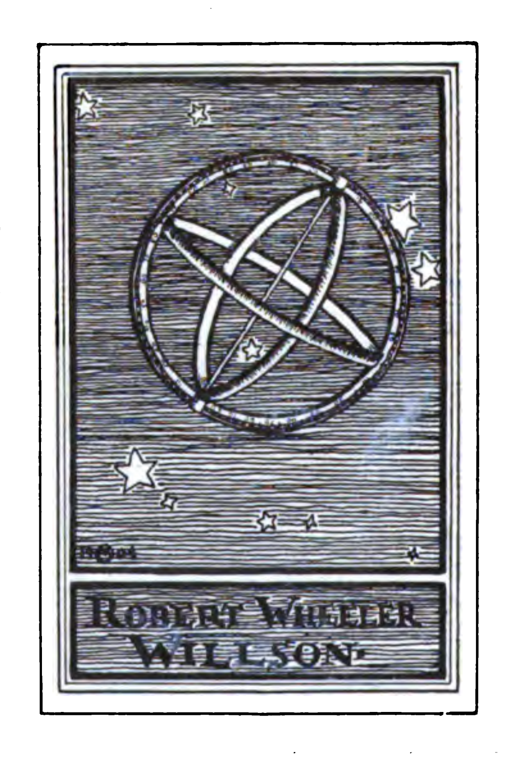
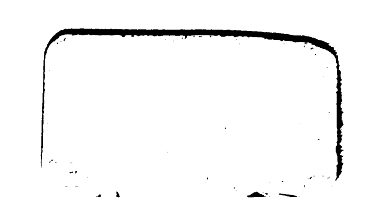





ROBERT WHEELER
WILLSON



COURS

D'ASTRONOMIE


ΘΕΟΣ

COURS
D'ASTRONOMIE

A L'USAGE

DES ÉTUDIANTS DES FACULTÉS DES SCIENCES,

PAR

B. BAILLAUD,

DOYEN HONORAIRE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE,
DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE.

SECONDE PARTIE.

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE. MOUVEMENTS DANS LE SYSTÈME SOLAIRE.
ÉLÉMENTS GÉOGRAPHIQUES. ÉCLIPSES.
ASTRONOMIE MODERNE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

PRÉFACE.

Dans la Préface du premier Volume de cet Ouvrage, nous avons sommairement marqué l'objet que nous nous proposions, et indiqué les matières que renfermerait le second Volume. Nous avons voulu réunir, en un Livre aussi concis qu'il nous serait possible de le faire, les notions les plus immédiatement indispensables à l'étudiant qui veut apprendre l'Astronomie. Ce n'est pas un Traité complet que nous avons voulu écrire. Tout en espérant que ce Livre pourrait être utile à d'autres, nous avons eu spécialement en vue les étudiants des Facultés des Sciences, en particulier les candidats à la Licence, examen dont il nous a toujours paru nécessaire d'élargir le programme d'Astronomie. Nous n'avons pas hésité à introduire, dans un Livre destiné surtout à cette catégorie d'étudiants, les problèmes relatifs aux déterminations d'orbites, les éléments de la Mécanique céleste, les propositions les plus simples de la haute Géodésie qui, à notre avis, rentrent dans ce fonds commun de connaissances auquel correspond la Licence et offrent aux étudiants d'admirables exemples de l'application des méthodes de l'Algèbre et de l'Analyse.

Bien que nous ayons voulu surtout écrire un Livre de Mathématiques et non une Astronomie descriptive, ni un Traité de Physique céleste, nous avons cru indispensable d'indiquer rapidement les problèmes et les méthodes de l'Astronomie moderne et quelques-uns des résultats obtenus. Nous leur

avons consacré le dernier Chapitre de ce Volume. Quelques-unes des questions qui y sont traitées auraient eu leur place marquée dans le premier Volume; quelques-unes mêmes, comme la Spectroscopie, y avaient été signalées. Nous avons cru bon de les rassembler à la fin de l'Ouvrage, comme en un Chapitre complémentaire, afin de faire profiter le lecteur des derniers progrès accomplis.

En terminant, nous adressons nos remercîments à nos éditeurs, MM. Gauthier-Villars et fils, dont on ne peut assez louer le dévouement aux Sciences et l'habileté professionnelle.

COURS

D'ASTRONOMIE.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE I.

SPHÈRE CÉLESTE. COORDONNÉES D'UN ASTRE. MOUVEMENT DIURNE.

1. Astronomie sphérique, Astronomie physique ou Mécanique céleste. — L'Astronomie physique ou Mécanique céleste a pour objet l'étude des lois qui régissent les mouvements des astres. Nous n'en étudierons dans cet Ouvrage que les parties les plus élémentaires, renvoyant pour une étude complète à l'immortel Ouvrage de Laplace et au *Traité de Mécanique céleste* que publie M. F. Tisserand. Cette étude sera précédée de celle de l'Astronomie sphérique, dont l'objet est la détermination des directions dans lesquelles on voit à chaque instant les astres, directions qui dépendent des mouvements des astres eux-mêmes et du déplacement de l'observateur résultant, soit du mouvement de la Terre, soit du changement de la position que l'observateur occupe à la surface du globe terrestre.

Dans l'étude de l'Astronomie sphérique, nous supposerons connus quelques-uns des résultats de la Mécanique céleste. Il est impossible de procéder autrement. Les diverses branches de l'Astronomie se sont développées parallèlement, chacune d'elles profitant des progrès accomplis dans les autres.

2. Sphère céleste. Coordonnées sphériques. — Nous considérons les astres comme situés sur une sphère dont nous occupons le centre. Le rayon de cette sphère, toutes les fois que nous ne dirons pas le contraire, sera regardé comme infini, de sorte que les directions dans lesquelles un même astre est vu à un même instant des divers points de la surface de la Terre seront regardées comme parallèles.

Nous représenterons la position d'un astre sur cette sphère par deux coordonnées sphériques. Un grand cercle AOB (*fig.* 1) de la

Fig. 1.

sphère sera le cercle fondamental du système de coordonnées. Par l'astre E et par les pôles P, P′ du cercle AOB nous mènerons un grand cercle PEP′, qui sera perpendiculaire au premier. L'arc OM du cercle fondamental, compris entre le cercle PEP′ et un point fixe O du cercle AOB, et l'arc ME compris entre l'astre E et le grand cercle AOB seront les deux coordonnées du point E. La coordonnée OM sera comptée de 0° à 360°, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, parfois de — 180° à + 180°; la coordonnée ME de — 90° à + 90°.

3. Coordonnées rectangulaires. — Il est souvent utile de remplacer le système des deux coordonnées sphériques par trois coordonnées rectangulaires équivalentes. On prend pour axe des x le rayon qui passe au point O. L'axe des y est situé dans le plan fondamental, et sa direction positive passe par le point de ce plan dont la première coordonnée est + 90°. L'axe des z est perpendiculaire au plan fondamental, et va du centre de la sphère à celui des pôles P, P′, dont la deuxième coordonnée est + 90°.

4. Relations entre les coordonnées sphériques et les coordonnées rectangulaires correspondantes. — Soient μ et ν les deux coor-

données sphériques, x, y, z les coordonnées rectangulaires correspondantes. Ces dernières sont les projections du rayon vecteur de l'astre sur les trois axes. Pour obtenir x et y, on peut projeter d'abord le rayon vecteur sur le plan fondamental, puis cette projection sur les axes des x et des y. Par suite,

$$x = r\cos\nu\cos\mu,$$
$$y = r\cos\nu\sin\mu,$$
$$z = r\sin\nu.$$

Les astronomes ont été conduits à prendre pour plan fondamental chacun des plans importants qui se rencontrent dans le système du monde; de là divers systèmes de coordonnées dont nous allons étudier les principaux.

5. Définitions relatives à divers éléments de la sphère céleste. — On appelle *verticale en un point* la direction de la pesanteur en ce point.

On appelle *horizon en un point de la surface de la Terre* un plan perpendiculaire à la verticale en ce point. On appelle aussi *horizon* le grand cercle suivant lequel la sphère céleste est coupée par ce plan.

La verticale perce la sphère céleste en deux points qui sont les pôles de l'horizon. Celui qui est au-dessus de l'horizon s'appelle le *zénith,* l'autre le *nadir.*

Tout grand cercle perpendiculaire à l'horizon s'appelle *cercle vertical;* on nomme *vertical d'un astre* le cercle vertical qui passe par cet astre.

On appelle *axe du monde* une parallèle à l'axe instantané de rotation de la Terre, menée par le centre de la sphère céleste. Cet axe du monde perce la sphère céleste en deux points qui sont les pôles du monde. Le pôle nord et le pôle sud du monde correspondent au pôle nord et au pôle sud de la Terre.

En un lieu le grand cercle vertical mené par l'axe du monde est le méridien, sa trace sur l'horizon est la méridienne; le grand cercle vertical perpendiculaire au méridien s'appelle *premier vertical.*

Le grand cercle perpendiculaire à l'axe du monde s'appelle *équateur.* Il partage la sphère en deux hémisphères : celui qui

renferme le pôle nord du monde s'appelle *hémisphère nord;* l'autre, *hémisphère sud.*

La méridienne coupe l'horizon en deux points, dont l'un, celui qui est dans l'hémisphère nord, s'appelle *le point nord de l'horizon;* l'autre, *le point sud.* La trace du premier vertical sur le plan de l'horizon rencontre l'horizon en deux points qui sont l'est et l'ouest. Pour un observateur debout sur l'horizon, ayant le zénith au-dessus de la tête, le nord en arrière et le sud en avant, l'est est à gauche et l'ouest à droite.

6. **Premier système de coordonnées : azimut, hauteur.** — Le plan fondamental est l'*horizon;* l'origine de la première coordonnée est le point *sud;* cette coordonnée, *azimut,* se compte de 0° à 360° vers l'ouest (sens rétrograde). La deuxième coordonnée, *hauteur,* est par suite comptée sur le vertical de l'astre; elle est positive si l'astre est au-dessus de l'horizon. On remplace souvent la hauteur par la *distance zénithale,* l'arc du vertical de l'astre compris entre l'astre et le zénith. *La distance zénithale est le complément de la hauteur.*

Nous désignerons habituellement par A l'azimut, par h la hauteur, par ζ la distance zénithale. Les coordonnées rectangulaires correspondantes sont

$$\begin{aligned} x &= r\cos h\cos A = r\sin\zeta\cos A,\\ y &= r\cos h\sin A = r\sin\zeta\sin A,\\ z &= \quad r\sin h \quad = r\cos\zeta, \end{aligned}$$

l'axe des z étant la verticale (vers le zénith), l'axe des x et l'axe des y étant situés dans le plan de l'horizon, et dirigés, le premier vers le sud, le second vers l'ouest.

Toutes ces coordonnées pour un même astre varient avec le temps.

7. **Deuxième système de coordonnées : angle horaire, déclinaison.** — Le plan fondamental est l'*équateur.* L'origine de la première coordonnée est le point de l'équateur situé dans le méridien, au-dessus de l'horizon. Cette coordonnée s'appelle *angle horaire;* elle se compte positivement vers l'ouest, quelquefois de 0° à 360°, plus souvent de $-180°$ à $+180°$. L'angle horaire

mesure l'angle que fait avec le méridien le plan qui passe par l'axe du monde et par l'astre, le plan horaire de l'astre. La seconde coordonnée, la *déclinaison*, se compte de $-90°$ à $+90°$; elle est positive quand l'astre est dans l'hémisphère nord. On la remplace souvent par la *distance polaire nord*, son complément.

Soient :

t l'angle horaire;
δ la déclinaison;
P la distance polaire nord;

les coordonnées rectangulaires relatives à ce système sont

$$x = r\cos\delta\cos t = r\sin P\cos t,$$
$$y = r\cos\delta\sin t = r\sin P\sin t,$$
$$z = \quad r\sin\delta \quad = r\cos P.$$

Nous verrons, dans les paragraphes suivants, que l'angle horaire d'un astre croît proportionnellement au temps, et de 360° dans un intervalle de temps qui est le même pour toutes les étoiles, intervalle que nous nommerons *jour sidéral*, et que nous diviserons en vingt-quatre parties égales nommées *heures sidérales* (chaque heure se divisant en soixante minutes, et chaque minute en soixante secondes), de sorte que la variation de l'angle horaire d'un astre est de 15° par heure. On a par suite été conduit à mesurer l'angle horaire d'un astre par le temps sidéral écoulé depuis le passage de cet astre au méridien, temps qui s'obtient en divisant par 15 le nombre qui représente l'angle horaire en degrés.

Ainsi, un astre dont l'angle horaire est

$$108°38'42'',7$$

est passé au méridien depuis

$$7^h 14^m 34^s,85.$$

On dit que son angle horaire est

$$7^h 14^m 34^s,85.$$

Un angle horaire négatif et égal à $-7^h 14^m 34^s,85$ indiquerait que l'astre passera au méridien dans $7^h 14^m 34^s,85$ (temps sidéral). Il est manifeste que le nombre qui représente un angle

horaire en temps sidéral coïncide avec celui qui représente cet angle quand, au lieu de l'exprimer en degrés, on l'exprime en heures, ainsi qu'il a été expliqué au Chapitre VIII du Tome I de cet Ouvrage, où l'on a indiqué la règle pratique à suivre pour exprimer en degrés un angle exprimé en heures et *vice versa*.

8. **Lois du mouvement diurne.** — Avant de définir le troisième système de coordonnées, il est nécessaire de donner le moyen de déduire des observations les lois du mouvement diurne. Nous supposerons qu'un instrument approprié ait permis d'obtenir un grand nombre de fois, dans une même nuit, l'azimut et la hauteur d'une même étoile, l'azimut étant compté, non du point sud que nous ne supposons pas encore connu, mais d'un point quelconque de l'horizon. Nous supposons aussi que le temps soit mesuré au moyen d'un phénomène quelconque susceptible de se reproduire indéfiniment dans des conditions identiques, et que l'on ait noté l'instant de chaque observation.

Soient :

$A, A', A'', \ldots$ les azimuts observés;
$h, h', h'', \ldots$ les hauteurs correspondantes observées;
$\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ les distances zénithales;
$t, t', t'', \ldots$ les temps des observations.

Déduisons des coordonnées observées les coordonnées rectangulaires correspondantes, en prenant pour unité de longueur le rayon de la sphère. Nous avons

$$\begin{aligned} x &= \cos h \cos A, & x' &= \cos h' \cos A', & &\ldots, \\ y &= \cos h \sin A, & y' &= \cos h' \sin A', & &\ldots, \\ z &= \sin h, & z' &= \sin h'. & &\ldots. \end{aligned}$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées rectangulaires du pôle nord du monde au moment de la première observation; P le cosinus de l'arc de grand cercle qui joint ce point au point xyz, on a

$$P = xx_0 + yy_0 + zz_0,$$

ou

$$x\frac{x_0}{P} + y\frac{y_0}{P} + z\frac{z_0}{P} = 1.$$

Or, si l'on envisage les équations

$$\begin{aligned} xX + yY + zZ &= 1, \\ x'X + y'Y + z'Z &= 1, \\ x''X + y''Y + z''Z &= 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \end{aligned}$$

on constatera qu'il existe un système de valeurs de X, Y et Z satisfaisant à toutes ces équations, quel qu'en soit le nombre. Il s'ensuit que l'on peut regarder pendant toute la nuit considérée le pôle du monde comme fixe, et l'étoile comme restant à une distance constante de ce point. Car si l'on pose

$$\frac{x_0}{P} = X, \qquad \frac{y_0}{P} = Y, \qquad \frac{z_0}{P} = Z,$$

on obtient

$$\frac{1}{P^2} = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$x_0 = PX, \qquad y_0 = PY, \qquad z_0 = PZ.$$

Ayant ainsi les coordonnées x_0, y_0, z_0 du pôle du monde, on aura son azimut A_0 et sa hauteur h_0 par les formules

$$\cos h_0 \cos A_0 = x_0, \qquad \cos h_0 \sin A_0 = y_0. \qquad \sin h_0 = z_0.$$

Si l'on compare de la même manière des observations d'une autre étoile, faites la même nuit, ou dans une autre nuit aussi éloignée que l'on voudra de la première, on trouvera toujours le même pôle.

Si l'on diminue de 180° l'azimut A_0, on aura l'azimut du point sud. En retranchant ce dernier de tous les azimuts mesurés, on aura les azimuts comptés du point sud; ce sont ces angles que nous emploierons désormais.

Soient (*fig.* 2) :

P le pôle du monde;
Z le zénith;
E l'étoile.

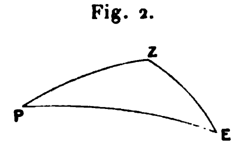
Joignons ces trois points par des arcs de grands cercles.

Dans le triangle sphérique PZE, le côté PZ est la distance zénithale du pôle; le côté ZE est la distance zénithale de l'étoile; l'angle Z est le supplément de l'azimut; ces trois quantités sont

connues. La résolution du triangle fera connaître l'angle horaire de l'étoile et sa distance polaire.

Si l'on fait le calcul pour toutes les observations d'une même étoile faites dans une même nuit, on constatera que les différences des angles horaires sont proportionnelles aux intervalles de temps

Fig. 2.



correspondants. Si, de plus, on en déduit le temps pendant lequel l'angle horaire varie de 360°, on constatera que cet intervalle de temps est le même pour une étoile que pour une autre étoile, observée dans la même nuit, ou dans une nuit aussi éloignée que l'on voudra de la première.

Il suit de là que :

1° *Il existe une droite, dont la position paraît sensiblement invariable par rapport à l'observateur, autour de laquelle, dans une même nuit, toutes les étoiles tournent uniformément et avec la même vitesse angulaire.*

2° *Cette vitesse angulaire reste absolument constante.*

Il est nécessaire de dire dès à présent que, si l'on détermine la distance polaire d'une même étoile par des observations faites dans deux nuits un peu éloignées l'une de l'autre, on ne trouve pas des résultats rigoureusement identiques.

Le mouvement diurne de la sphère céleste est une apparence due au mouvement de rotation de la Terre autour d'un axe qui est fixe par rapport à la Terre elle-même. *Ce mouvement de rotation est uniforme,* et sa vitesse angulaire est constante. Mais *l'axe de la Terre n'a pas une direction fixe dans l'espace.* Cet axe a un mouvement lent qui devient à la longue très considérable, et dont nous étudierons l'effet sur les coordonnées des étoiles sous le nom de *précession* et de *nutation*.

9. **Propriété du méridien. Étoiles circompolaires.** — Nous ne pouvons terminer cette étude du mouvement diurne sans énoncer

ce théorème dont la démonstration est bien aisée : *Le méridien est le seul plan vertical qui divise en deux parties égales le parallèle décrit par une étoile et la partie de ce parallèle située au-dessus de l'horizon.*

Ce théorème donne un moyen immédiat de déterminer le méridien d'un lieu.

Nous remarquerons aussi que les seules étoiles visibles en un point de la Terre sont celles dont la distance polaire est inférieure au supplément de la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon.

Quand la distance polaire est moindre que la hauteur du pôle, l'étoile ne se couche pas.

10. **Troisième système de coordonnées. Ascension droite et déclinaison.** — Le plan fondamental est encore l'*équateur;* mais l'origine de la première coordonnée n'est plus un point fixe par rapport à l'observateur, mais un point indépendant de la position de l'observateur à la surface de la Terre.

L'ascension droite se compte dans le sens direct (de l'ouest à l'est en passant par le sud), de 0° à 360°, ou, en temps, de zéro à vingt-quatre heures, l'introduction des heures ayant le même motif que pour l'angle horaire.

Nous représenterons généralement l'ascension droite par α, la déclinaison par δ; ces coordonnées caractérisent l'étoile; elles sont indépendantes du mouvement diurne.

On appelle *jour sidéral* l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages supérieurs consécutifs de l'origine des ascensions droites au méridien.

L'ascension droite d'un astre (en temps) *est égale à l'heure sidérale au moment du passage de cet astre au méridien;* à un instant quelconque on obtient l'angle horaire d'un astre en retranchant son ascension droite de l'heure sidérale.

Nous verrons plus tard que le centre du Soleil paraît, à chaque instant, décrire une orbite dans un plan passant par le centre de la Terre. Le plan mené par le centre de la sphère céleste parallèlement au plan de cette orbite s'appelle *écliptique.* Ce plan est incliné de $23^\circ,5$ sur le plan de l'équateur. Les grands cercles suivant lesquels la sphère est coupée par ces deux plans se coupent en deux points qu'on appelle les *nœuds.* Celui de ces points où le

Soleil passe de l'hémisphère nord dans l'hémisphère sud s'appelle *point vernal;* c'est ce point qui est l'origine des ascensions droites.

Les coordonnées rectangulaires correspondant au troisième système ont pour axe des z l'axe du monde; l'axe des x est dirigé vers le point vernal; l'axe des y est dans l'équateur et son ascension droite est 90°. Ces coordonnées sont

$$x = r\cos\delta\cos\alpha,$$
$$y = r\cos\delta\sin\alpha,$$
$$z = r\sin\delta.$$

11. Quatrième système. Longitude et latitude. — Le plan de l'*écliptique* est ici le plan fondamental. Le *point vernal* est l'origine de la première coordonnée qui se compte comme l'ascension droite dans le sens direct. La latitude est positive quand l'astre est dans celui des deux hémisphères déterminés par l'écliptique où se trouve le pôle nord de l'équateur.

Les grands cercles perpendiculaires à l'écliptique se nomment *cercles de latitude;* ceux qui sont perpendiculaires à l'équateur se nomment *cercles de déclinaison.*

Si nous désignons par λ la longitude et β la latitude, les coordonnées rectangulaires correspondantes sont

$$x = r\cos\beta\cos\lambda,$$
$$y = r\cos\beta\sin\lambda,$$
$$z = r\sin\beta.$$

Il faut bien remarquer que l'axe des x est le même dans le troisième et dans le quatrième système; c'est la droite qui joint le centre de la sphère au point vernal.

12. Changement de coordonnées : passer du second au troisième système et inversement. — Les deux coordonnées d'une étoile dans l'un quelconque des quatre systèmes déterminent complètement la position de l'étoile; par conséquent les coordonnées des trois autres systèmes peuvent s'en déduire. Nous allons traiter avec détail tous les problèmes de cette nature.

Nous avons déjà dit tout ce qui est nécessaire pour passer du

deuxième au troisième système, ou inversement. La deuxième coordonnée, la déclinaison, appartient aux deux systèmes.

Soient :

α l'ascension droite;
t l'angle horaire;
T l'heure sidérale à l'instant dont on s'occupe.

$$T = \alpha + t,$$

d'où

$$t = T - \alpha,$$
$$\alpha = T - t.$$

L'heure sidérale T est donnée à chaque instant, dans tout observatoire, par un instrument nommé *pendule sidérale* qui marque $0^h 0^m 0^s$ quand le point vernal passe au méridien, et qui marche de vingt-quatre heures en un jour sidéral.

Puisqu'il est si facile de passer du deuxième au troisième système, ou inversement, il ne reste plus qu'à traiter quatre problèmes : passer du premier au deuxième ou du second au premier, du troisième au quatrième ou du quatrième au troisième.

13. **Ayant l'azimut et la hauteur d'un astre, trouver l'angle horaire et la déclinaison, et vice versa.** — Les formules de la Trigonométrie sphérique s'appliquent immédiatement aux deux premiers cas que présente le changement de coordonnées.

Soient :

A (*fig.* 3) l'azimut;
h la hauteur;
t l'angle horaire;
δ la déclinaison;
φ la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon;
E l'étoile.

Considérons le triangle sphérique qui a pour sommet le pôle P du monde, le zénith Z et l'étoile E. Les côtés de ce triangle sont

$$90^\circ - h, \quad 90^\circ - \delta, \quad 90^\circ - \varphi,$$

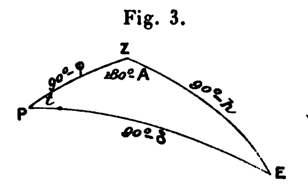
les angles

$$t, \quad 180^\circ - A, \quad E.$$

L'angle E s'appelle souvent *angle parallactique;* dans la plupart des cas on n'est pas intéressé à le connaître.

Dans le premier problème, on donne h, φ, A; on connaît donc ZE, ZP et l'angle compris Z.

Fig. 3.



Dans le problème inverse, on donne δ, φ, t; on connaît encore deux côtés, PE, PZ, et l'angle compris P. Les formules fondamentales donnent une solution de chacun de ces problèmes; nous les écrirons successivement.

Premier problème.

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cos A.\\ \cos\delta\sin t &= \cos h\sin A,\\ \cos\delta\cos t &= \sin h\cos\varphi + \cos h\sin\varphi\cos A,\end{aligned}\right.$$

Second problème.

$$\left\{\begin{aligned} \sin h &= \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t,\\ \cos h\sin A &= \sin t\cos\delta,\\ \cos h\cos A &= -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t.\end{aligned}\right.$$

On rend ces formules calculables par logarithmes, en posant

$$\begin{aligned} \sin h &= m\cos M,\\ \cos h\cos A &= m\sin M,\\ \sin\delta &= m_1\sin M_1,\\ \cos\delta\cos t &= m_1\cos M_1,\end{aligned}$$

d'où

Premier problème.

$$(13\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\delta &= m\sin(\varphi - M),\\ \cos\delta\sin t &= \cos h\sin A,\\ \cos\delta\cos t &= m\cos(\varphi - M).\end{aligned}\right.$$

Second problème.

$$\left\{\begin{aligned} \sin h &= m_1\cos(\varphi - M),\\ \cos h\sin A &= \sin t\cos\delta,\\ \cos h\cos A &= m\ \sin(\varphi - M_1).\end{aligned}\right.$$

Les formules (12) du Chapitre VIII de la première Partie de cet Ouvrage donnent pour le premier problème les précieuses formules de vérifications suivantes :

$$\sin(A-t) = 2m\sin\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{séc} h\sin t\sin\left(45^\circ-M+\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sin\frac{h-\delta}{2} = m\sin\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{séc}\frac{h+\delta}{2}\cos\left(45^\circ-M+\frac{\varphi}{2}\right),$$

et pour le second problème

$$\sin(A-t) = 2m_1\sin\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{séc}\delta\sin A\sin\left(45^\circ+M_1-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sin\frac{h-\delta}{2} = m_1\sin\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{séc}\frac{h+\delta}{2}\cos\left(45^\circ+M_1-\frac{\varphi}{2}\right).$$

On peut encore résoudre les mêmes problèmes au moyen des formules de Delambre. Elles donnent

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\cos\frac{E-t}{2} &= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{h+\varphi}{2},\\
\sin\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{E-t}{2} &= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{h-\varphi}{2},\\
\cos\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\cos\frac{E+t}{2} &= \cos\frac{A}{2}\sin\frac{h+\varphi}{2},\\
\cos\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{E+t}{2} &= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{h-\varphi}{2},\\
\sin\left(45^\circ-\frac{h}{2}\right)\sin\frac{A+E}{2} &= \sin\frac{t}{2}\cos\frac{\varphi+\delta}{2},\\
\sin\left(45^\circ-\frac{h}{2}\right)\cos\frac{A+E}{2} &= \cos\frac{t}{2}\sin\frac{\varphi-\delta}{2},\\
\cos\left(45^\circ-\frac{h}{2}\right)\sin\frac{A-E}{2} &= \sin\frac{t}{2}\sin\frac{\varphi+\delta}{2},\\
\cos\left(45^\circ-\frac{h}{2}\right)\cos\frac{A+E}{2} &= \cos\frac{t}{2}\cos\frac{\varphi+\delta}{2}.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (13) et (14) sont établies en supposant l'azimut et l'angle horaire moindres que 180°. On voit aisément que, dans le cas contraire, il suffit de remplacer A par 360° — A, t par 360° — t. Si l'on change en même temps E en — E, les formules restent les mêmes.

14. Construction de Tables auxiliaires pour faciliter la transformation quand les observations sont faites en un même lieu. — Dans

un même observatoire, φ est une constante. On en peut profiter pour arranger les formules (13) de telle façon qu'elles dépendent de quantités auxiliaires fonctions d'une seule des données (A ou t suivant le problème) et susceptibles, par conséquent, d'être réduites en Tables.

Rendons calculable par logarithmes la première des formules (13) en faisant dépendre la quantité auxiliaire, non plus de h et A (ou de δ et l), mais de φ et A, dans le deuxième problème de φ et t.

Nous poserons à cet égard

$$\sin\varphi = m\cos B, \qquad \sin\varphi = m_1 \cos B_1,$$
$$\cos\varphi\cos A = m\sin B, \qquad \cos\varphi\cos t = m_1\sin B_1.$$

Comme on trouve

$$m^2 = 1 - \cos^2\varphi\sin^2 A, \qquad m_1^2 = 1 - \cos^2\varphi\sin^2 t,$$

m et m_1 sont moindres que 1 en valeur absolue; nous les désignerons par $\sin\gamma$ et $\sin\gamma_1$. On a alors

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin\gamma\cos B, & \sin\varphi &= \sin\gamma_1\cos B_1,\\ \cos\varphi\cos A &= \sin\gamma\sin B, & \cos\varphi\cos t &= \sin\gamma_1\sin B_1,\\ \cos\varphi\sin A &= \cos\gamma, & \cos\varphi\sin t &= \cos\gamma_1,\end{aligned}\right.$$

en supposant que l'on choisisse γ de telle manière que son cosinus ait le signe de $\cos\varphi\sin A$.

La première des équations (13) devient

$$(16)\quad \sin\delta = \sin\gamma\sin(h - B).$$

Si A restant invariable, h devient égal à B, δ devient nul. Donc B est la hauteur du point de l'équateur dont l'azimut est A. Soit t_0 l'angle horaire de ce point. En lui appliquant les équations (13), on a

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \sin\varphi\sin B\\ &\quad - \cos\varphi\cos B\cos A,\\ \sin t_0 &= \cos B\sin A,\\ \cos t_0 &= \cos\varphi\sin B\\ &\quad + \sin\varphi\cos B\cos A.\end{aligned}\right.$$

$$(16)\quad \sin h = \sin\gamma_1\sin(\delta + B_1).$$

Si t restant invariable, δ devient égal à $-B_1$, h devient nul. Donc $-B_1$ est la déclinaison du point de l'horizon dont l'angle horaire est t. Soit A_0 l'azimut de ce point.

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= -\sin\varphi\sin B_1\\ &\quad + \cos\varphi\cos B_1\cos t,\\ \sin A_0 &= \cos B_1\sin t,\\ \cos A_0 &= \cos\varphi\sin B_1\\ &\quad + \sin\varphi\cos B_1\cos t.\end{aligned}\right.$$

Les équations (15) définissent les constantes auxiliaires

γ et B fonctions de φ et de A, γ_1 et B_1 fonctions de φ et de t.

Mais, dans un même observatoire, φ est constant; donc

γ et B sont fonctions de la seule variable A,
γ_1 et B_1 sont fonctions de la seule variable t.

On peut construire des Tables auxiliaires (pour un même observatoire) qui donneront

γ et B pour toutes les valeurs de A,
γ_1 et B_1 pour toutes les valeurs de t.

Les mêmes Tables serviront pour les deux problèmes.

Ayant ces constantes auxiliaires, il est aisé de tirer des formules (13) et (17) d'autres équations donnant rapidement

t et δ, A et h.

On a d'abord l'équation (16).

Si l'on multiplie, membre à membre, la troisième équation (13) par la deuxième équation (17), la deuxième équation (13) par la troisième équation (17) et que l'on retranche membre à membre, on trouve

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\delta\sin(t_0-t) &= \sin A\cos\varphi\sin(h-B)\\ &= \cos\gamma\sin(h-B),\\ \cos h\sin(A_0-A) &= -\sin t\cos\varphi\sin(\delta+B_1)\\ &= -\cos\gamma_1\sin(\delta+B_1).\end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie, membre à membre, les équations (13) par les équations (17) et qu'on additionne les résultats, on trouve

$$(19)\quad \cos\delta\cos(t_0-t)=\cos(h-B),\qquad \cos h\cos(A_0-A)=\cos(\delta+B_1).$$

Les équations (16), (18), (19) donnent rapidement

δ et t_0-t, h et A_0-A,

par leurs tangentes, pourvu que l'on ait sans calcul

γ, B, t_0, γ_1, B_1, A_0.

Or on déduit des équations (17)

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \sin t_0 &= \cos B\sin A, & \sin A_0 &= \cos B_1\sin t,\\ \cos\varphi\cos t_0 &= \sin B, & \cos\varphi\cos A_0 &= \sin B_1,\\ \sin\varphi\cos t_0 &= \cos B\cos A, & \sin\varphi\cos A_0 &= \cos B_1\cos t,\end{aligned}\right.$$

de sorte qu'une troisième Table auxiliaire, bien facile à construire au moyen des formule (20), peut donner

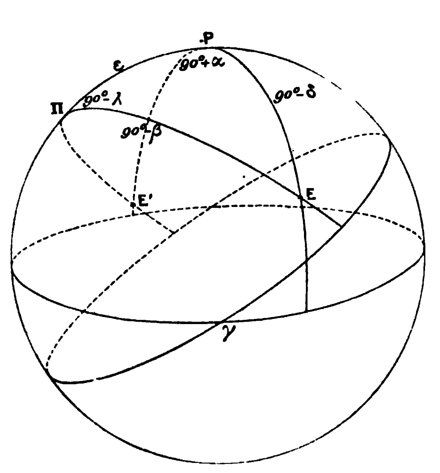
$$t_0 \text{ ayant } A, \quad A_0 \text{ ayant } t.$$

Il faut bien remarquer que les mêmes Tables auxiliaires serviront pour les deux problèmes. Dans la construction de ces Tables, il suffira de faire varier l'argument de 0° à 90°.

15. **Ayant l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, trouver la longitude et la latitude et vice versa.** — Des équations analogues aux équations (13) et (14) permettent de résoudre les deux derniers problèmes relatifs au changement de coordonnées : ayant l'ascension droite α et la déclinaison δ d'un astre, trouver la longitude λ et la latitude β, et inversement.

Dans le triangle qui a pour sommets le pôle nord P (*fig.* 4) de

Fig. 4.



l'équateur, le pôle nord Π de l'écliptique, et l'étoile E, le côté ΠP est égal à l'obliquité ε de l'écliptique sur l'équateur; PE est le complément de la déclinaison, ΠE celui de la latitude. L'angle Π est le complément de la longitude de l'astre; l'angle P surpasse l'ascension droite de 90°.

En appliquant à ce triangle de deux manières différentes les

formules (1), (2), (3), on trouve les formules

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha,\\
\cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha,\\
\cos\beta\sin\lambda &= \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha;\\
\sin\delta &= \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda,\\
\cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda,\\
\cos\delta\sin\alpha &= -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda.
\end{aligned}$$

On les rend calculables par logarithmes en posant

$$\begin{aligned}
\sin\delta &= m\sin M, & \sin\beta &= m_1\sin M_1,\\
\cos\delta\sin\nu &= m\cos M, & \cos\beta\sin\lambda &= m_1\cos M_1.
\end{aligned}$$

Elles deviennent ainsi

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= m\sin(M-\varepsilon), & \sin\beta &= m_1\sin(M_1+\varepsilon),\\
\cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha, & \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda,\\
\cos\beta\sin\lambda &= m\cos(M-\varepsilon), & \cos\delta\sin\alpha &= m_1\cos(M_1+\varepsilon).
\end{aligned}$$

On obtient de précieuses formules de vérification en appliquant les formules (12) du Chapitre VIII de la première Partie de cet Ouvrage.

Elles donnent, pour le premier problème, les deux formules de vérification

$$\sin(\lambda-\alpha) = 2m\sin\frac{\varepsilon}{2}\,\text{séc}\,\delta\cos\lambda\sin\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\sin\frac{\delta-\beta}{2} = m\sin\frac{\varepsilon}{2}\,\text{séc}\,\frac{\delta+\beta}{2}\cos\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et, pour le second problème, les formules de vérification

$$\sin(\lambda-\alpha) = 2m_1\sin\frac{\varepsilon}{2}\,\text{séc}\,\beta\cos\alpha\sin\left(M_1+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\sin\frac{\delta-\beta}{2} = m_1\sin\frac{\varepsilon}{2}\,\text{séc}\,\frac{\delta+\beta}{2}\cos\left(M_1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On peut aussi appliquer au même triangle les formules de Delambre. Elles donnent

$$\begin{aligned}
\sin\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\lambda+E}{2}\right) &= \sin\left(45^\circ-\frac{\delta-\varepsilon}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right),\\
\sin\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{\lambda+E}{2}\right) &= \sin\left(45^\circ-\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right),\\
\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\lambda-E}{2}\right) &= \cos\left(45^\circ-\frac{\delta-\varepsilon}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right),\\
\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{\lambda-E}{2}\right) &= \cos\left(45^\circ-\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right);
\end{aligned}$$

et

$$\sin\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right)\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha - E}{2}\right) = \sin\left(45^\circ - \frac{\beta - \varepsilon}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right),$$
$$\sin\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right)\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha - E}{2}\right) = \sin\left(45^\circ - \frac{\beta + \varepsilon}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right),$$
$$\cos\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right)\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha + E}{2}\right) = \cos\left(45^\circ - \frac{\beta - \varepsilon}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right),$$
$$\cos\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right)\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha + E}{2}\right) = \cos\left(45^\circ - \frac{\beta + \varepsilon}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Les arcs $45^\circ - \frac{\beta}{2}$, $45^\circ - \frac{\delta}{2}$ sont aigus et positifs; il s'ensuit qu'il n'y aura aucune indétermination relativement aux arcs $45^\circ - \frac{\lambda \pm E}{2}$, $45^\circ + \frac{\alpha \pm E}{2}$, dont les sinus et cosinus ont les signes des seconds membres correspondants.

La figure suppose α et λ positifs et moindres que 90°. On voit de suite que si ces quantités étaient négatives et moindres que 90° en valeur absolue, les éléments du triangle ΠPE auraient les mêmes expressions, de sorte que les mêmes formules subsisteraient. Si α et λ étaient compris entre 90° et 270°, l'angle P serait $270^\circ - \alpha$ et l'angle Π serait $\lambda - 90^\circ$. Il faudrait donc remplacer α par $180^\circ - \alpha$, λ par $180^\circ - \lambda$. On s'assurera aisément que les formules ne changent pas.

Il n'y a pas lieu de construire des Tables auxiliaires analogues à celles dont nous avons indiqué l'usage pour les deux premiers problèmes, en raison de ce que l'inclinaison ε de l'écliptique sur l'équateur ne reste pas constante.

16. Lever et coucher d'un astre, intervalle semi-diurne. — Une des questions les plus importantes qui se présentent à propos du mouvement diurne est celle du lever et du coucher des astres, et de l'intervalle de temps pendant lequel un astre reste au-dessus de l'horizon.

Soient φ la latitude nord de l'observateur, P la distance polaire d'un astre, H son angle horaire, ζ sa distance zénithale. On a

$$\cos\zeta = \sin\varphi\cos P + \cos\varphi\sin P\cos H.$$

Si l'astre se couche à l'instant considéré, $\zeta = \frac{\pi}{2}$; donc

$$\cos H = -\frac{\tan\varphi}{\tan P}.$$

Il s'ensuit que les astres, dont la distance polaire nord est moindre que la latitude, ne se couchent jamais; ceux dont la distance polaire nord est plus grande que le supplément de la latitude ne se lèvent jamais. L'intervalle de temps $2H$ pendant lequel un astre reste au-dessus de l'horizon augmente quand P diminue. Cet intervalle de temps, à toute latitude, est de douze heures pour les astres situés dans l'équateur.

L'application la plus importante de cette formule se rapporte au lever et au coucher du Soleil. La distance polaire de cet astre varie entre $90° - \varepsilon$ et $90° + \varepsilon$, ε étant $23°,5$ environ. Il s'ensuit que, si la latitude est moindre que $90° - \varepsilon$, le Soleil se lève et se couche à chaque révolution, et la durée de la journée augmente avec la déclinaison du Soleil. Si la latitude surpasse $90° - \varepsilon$, le Soleil reste au-dessus de l'horizon tant que sa déclinaison est plus grande que $90° - \varphi$, et au-dessous tant que cette déclinaison est inférieure à $-(90° - \varphi)$.

17. Crépuscule, sa durée, son minimum en un lieu donné. — La durée de l'intervalle pendant lequel il fait jour est augmentée par la présence de l'atmosphère. Tant que l'atmosphère elle-même, au-dessus de l'horizon, est éclairée, bien que le Soleil soit au-dessous de l'horizon, il ne fait pas nuit. L'intervalle compris entre le moment où le Soleil se couche et celui où l'atmosphère cesse de recevoir de la lumière s'appelle le *crépuscule*. L'observation montre que ce crépuscule finit quand le Soleil est à 18° au-dessous de l'horizon. Nous allons en étudier la durée.

Soient P (*fig.* 5) le pôle, Z le zénith, S_0S le parallèle décrit par le Soleil, S_0 le point où le Soleil se couche, S le point dont la distance zénithale est 108°, H_0 et H les angles horaires ZPS_0, ZPS. Nous poserons $18° = 2a$.

Le triangle PZS_0 donne

$$\cos H_0 = -\frac{\tang\varphi}{\tang P};$$

le triangle PZS donne

$$\cos H = -\frac{\sin 2a}{\cos\varphi \sin P} + \cos H_0.$$

On en déduit

$$2\sin\frac{H - H_0}{2} = \frac{\sin 2a}{\cos\varphi \sin P \sin\frac{H + H_0}{2}}.$$

Cette formule donne la durée $H - H_0$ du crépuscule.

Cherchons le plus court des crépuscules pour une latitude donnée. Regardant H et H_0 comme des fonctions de P, on doit avoir

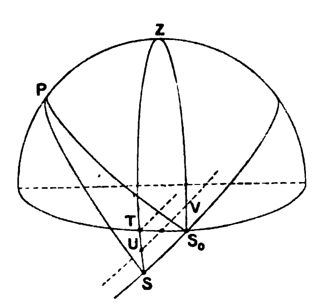
$$H' = H'_0.$$

En différentiant, on a

$$-\sin H_0 . H'_0 = \frac{\tan\varphi}{\sin^2 P},$$

$$-\sin H . H' = \frac{\sin 2a \cos P}{\cos\varphi \sin^2 P} + \frac{\tan\varphi}{\sin^2 P}.$$

Fig. 5.



Faisant $H' = H'_0$ on a, par division,

$$\frac{\sin H}{\sin H_0} = \frac{\sin 2a \cos P}{\sin\varphi} + 1.$$

Éliminant A et H_0, on trouve

$$\sin 2a \cos^2 P + 2 \sin\varphi \cos P + \sin 2a \sin^2\varphi = 0;$$

d'où les deux solutions

$$\frac{\cos P}{\sin\varphi} = -\tan a, \qquad \frac{\cos P}{\sin\varphi} = -\frac{1}{\tan a}.$$

La deuxième solution rend négatif le rapport $\frac{\sin H}{\sin H_0}$. Elle correspond à $H' = -H'_0$; nous n'avons pas à nous en occuper : la première est toujours acceptable.

Elle donne

$$\cos P = -\tan a \sin\varphi.$$

On en déduit que

$$\cos PSZ = \frac{\sin\varphi}{\sin P} = \cos PS_0Z$$

et que

$$-\cos A = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} a = +\cos A_0,$$

d'où

$$A + A_0 = 180°.$$

L'équateur passe au milieu de TS_0 et coupe ZS et ZS_0 en des points U et V, tels que

$$TU = S_0V = a.$$

Il n'y a pas de crépuscule maximum algébriquement.

Le Soleil parvenu à la déclinaison ε redescend. Le crépuscule maximum a lieu au solstice.

Il y a lieu de remarquer à ce propos que $\cos H$ devient égal à -1 si

$$P - \varphi = 2a.$$

Alors le crépuscule finit quand l'aurore commence.

Le minimum de P étant $90° - \varepsilon$, il faut, pour que cette circonstance puisse se produire, que l'on ait

$$90° - \varepsilon - \varphi < 2a$$

ou

$$\varphi > 72° - \varepsilon > 48° \frac{1}{2}.$$

Cette circonstance se présente à Paris, dont la latitude est de $48° 50'$.

CHAPITRE II.

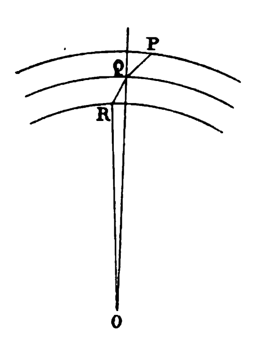
RÉFRACTION ASTRONOMIQUE. MODIFICATION QU'ELLE PRODUIT DANS LA DISTANCE ZÉNITHALE D'UN ASTRE, DANS LA DIFFÉRENCE D'ANGLE HORAIRE ET LA DIFFÉRENCE DE DISTANCE POLAIRE DE DEUX ASTRES TRÈS VOISINS. MESURE DES HAUTEURS AU MOYEN DU BAROMÈTRE.

18. **La réfraction due à l'atmosphère modifie les coordonnées des astres.** — La vérification des lois du mouvement diurne indiquée au n° 8 n'a lieu d'une façon à peu près satisfaisante que si l'on n'y emploie aucune observation faite dans le voisinage de l'horizon. Si, en partant de ces lois et d'observations d'une étoile faites à de grandes hauteurs, on calcule les coordonnées de cette étoile à de faibles hauteurs, on constate, entre les coordonnées calculées et celle que l'on observe réellement, des écarts d'autant plus grands que l'astre est plus voisin de l'horizon. Quand on sait qu'un rayon lumineux qui passe d'un milieu dans un autre est d'autant plus dévié qu'il rencontre plus obliquement la surface de séparation de ces milieux et que la densité de l'atmosphère terrestre augmente à mesure que l'on se rapproche de la surface de la Terre, on est naturellement conduit à attribuer les écarts que nous venons d'indiquer à la réfraction du rayon lumineux dans son passage à travers l'atmosphère et à étudier la déviation qui en résulte.

19. **Équation de la trajectoire que forme le rayon lumineux.** — Nous supposerons l'atmosphère en équilibre et formée, au moins dans toute la région traversée par le rayon lumineux, de couches sphériques concentriques infiniment minces, dont chacune soit homogène. La première condition implique que la force élastique de l'air en un point quelconque est égale au poids d'un cylindre vertical d'air ayant pour base une surface horizontale égale à l'unité, placée au point dont il s'agit et s'étendant jusqu'à la limite supé-

rieure de l'atmosphère. Considérons deux couches infiniment minces consécutives, et soient PQ, QR les parties du rayon lumineux qui traversent ces deux couches. Ces deux éléments PQ, QR et le centre O de la Terre sont dans un même plan, d'où il suit que le rayon lumineux reste toujours dans un même plan vertical. Soient, au point Q, i l'angle d'incidence, i_1 l'angle de réfrac-

Fig. 6.



tion; soient v et v' les vitesses de la lumière dans le premier et dans le second milieu, et v_0 la vitesse dans le vide; soient enfin μ, μ' les indices de réfraction des deux couches par rapport au vide. On démontre en Physique que

$$\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{v}{v'} = \frac{\frac{v_0}{v'}}{\frac{v_0}{v}} = \frac{\mu'}{\mu}.$$

Soient, au point R, i' l'angle d'incidence, r' le rayon OR; soit r le rayon OQ. Dans le triangle OQR,

$$\frac{\sin i_1}{\sin i'} = \frac{r'}{r}.$$

D'où, par multiplication,

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\mu' r'}{\mu r}$$

et, par suite,

$$\mu r \sin i = \text{const.}$$

Si a est le rayon de la Terre, z la distance zénithale observée, μ_0 l'indice de réfraction de l'air par rapport au vide, au point de

l'atmosphère où se trouve l'observateur,

$$\mu r \sin i = \mu_0 a \sin z. \tag{1}$$

Cette équation est, en définitive, l'équation de la trajectoire formée par le rayon lumineux. Effectivement, μ est évidemment une fonction r; i est l'angle que fait en un point de cette trajectoire la tangente avec le rayon vecteur qui joint ce point au centre de la Terre. Nous avons donc une équation entre deux variables que l'on peut regarder comme formant un système plus ou moins commode de coordonnées.

20. Calcul de la déviation totale. — Il a été dit au commencement du numéro précédent que le rayon lumineux reste toujours dans le plan vertical qui passe par l'astre et par l'observateur. La réfraction ne modifie donc pas l'azimut de l'astre; nous nous proposons de calculer de combien elle modifie la hauteur.

Soient

A le point d'arrivée;
M un point quelconque du rayon lumineux;
θ l'angle que fait la tangente au rayon lumineux en ce point avec la verticale AZ du point A;
v l'angle MOZ;
i l'angle que fait la tangente en M avec le rayon vecteur OM.

$$\theta = v + i.$$

A mesure que le point M se rapproche du point A, l'angle θ diminue; nous avons à calculer la valeur totale de cette diminution depuis l'entrée du rayon dans l'atmosphère jusqu'au point A. Or

$$d\theta = dv + di. \tag{2}$$

L'équation (1)

$$\mu r \sin i = \mu_0 a \sin z$$

donne

$$\frac{d(\mu r)}{\mu r} + \frac{di}{\operatorname{tang} i} = 0$$

ou

$$di = -\operatorname{tang} i \left(\frac{d\mu}{\mu} + \frac{dr}{r}\right).$$

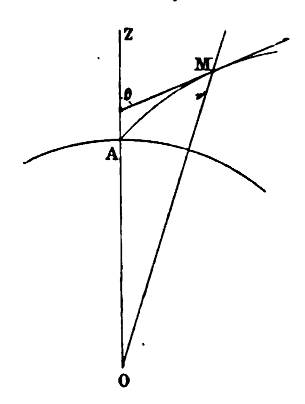
On a aussi, comme on sait, par la Géométrie analytique,

$$dv = \tang i \frac{dr}{r}.$$

Donc

(3) $$d\theta = -\tang i \frac{d\mu}{\mu}.$$

Fig. 7.



On peut, dans l'équation (3), exprimer θ en fonction de r, ainsi : on a

$$\sin i = \frac{\mu_0 a \sin z}{\mu r}$$

d'où

$$\tang i = \frac{\mu_0 a \sin z}{\sqrt{\mu^2 r^2 - \mu_0^2 a^2 \sin^2 z}};$$

par suite

(4) $$d\theta = -\frac{\frac{a}{r}\mu_0 \sin z \, d\mu}{\mu\sqrt{\mu^2 - \frac{a^2}{r^2}\mu_0^2 \sin^2 z}}$$

et

(5) $$\theta = -\int \frac{\frac{a}{r}\mu_0 \sin z \, d\mu}{\mu\sqrt{\mu^2 - \frac{a^2}{r^2}\mu_0^2 \sin^2 z}},$$

l'intégrale étant prise depuis la limite supérieure jusqu'à la limite inférieure de l'atmosphère.

Il importe de bien remarquer que μ dépend de la densité de

l'atmosphère et, par suite, est au fond une fonction de r, ou inversement r une fonction de μ, de sorte que le second membre de l'équation (4) est bien différentielle d'une fonction d'une seule variable.

21. Transformation de l'intégrale. — Le rapport $\frac{a}{r}$ est toujours un peu moindre que l'unité. Nous poserons

$$\frac{a}{r} = 1 - s.$$

On démontre de plus, en Physique, que $\mu^2 - 1$ est proportionnel à la densité ρ de l'air. Nous poserons

$$\mu^2 - 1 = \gamma\rho,$$
$$\mu_0^2 - 1 = \gamma\rho_0;$$

ρ_0 étant la densité de l'air au point d'arrivée du rayon lumineux et au moment de l'observation. La formule (5) devient alors

$$\Delta\theta = -\int \frac{\frac{1}{2}(1-s)(1+\gamma\rho_0)^{\frac{1}{2}}\sin z.\gamma\, d\rho}{(1+\gamma\rho)\sqrt{1+\gamma\rho-(1-s)^2(1+\gamma\rho_0)\sin^2 z}},$$

que nous écrirons

$$\Delta\theta = -\int \frac{1}{2}\frac{(1-s)\sin z\,\frac{1+\gamma\rho}{1+\gamma\rho_0}}{\frac{1+\gamma\rho}{1+\gamma\rho_0}\sqrt{\frac{1+\gamma\rho}{1+\gamma\rho_0}-\sin^2 z(1-s)^2}}.$$

Si nous posons

$$\frac{\gamma\rho_0}{1+\gamma\rho_0} = 2\alpha,$$

nous aurons

$$\frac{1}{1+\gamma\rho_0} = 1 - 2\alpha,$$

$$\gamma\rho_0 = \frac{2\alpha}{1-2\alpha},$$

$$1+\gamma\rho = 1 + \frac{2\alpha}{1-2\alpha}\frac{\rho}{\rho_0},$$

$$\frac{1+\gamma\rho}{1+\gamma\rho_0} = 1 - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

et

$$(6)\quad \Delta\theta = \pm \int_0^{\rho_0} \frac{\frac{\alpha}{\rho_0}(1-s)\sin z\, d\rho}{\left[1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]\sqrt{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)-\sin^2 z(1-s)^2}}.$$

22. Considérations générales sur l'intégrale. — Le calcul de l'intégrale (6) ne peut être effectué rigoureusement parce que l'on ne connaît pas la relation entre ρ et r, relation qui dépend de la distribution des températures dans l'atmosphère. Nous allons d'abord montrer que, pour des valeurs de z inférieures à une certaine limite, on peut, en ne négligeant que des termes insensibles, s'arranger de telle façon que la température n'entre que dans un terme susceptible d'être déterminé à chaque instant par l'observation.

Observons d'abord que le radical qui entre en facteur dans le dénominateur ne peut s'annuler, car il est équivalent à

$$(7)\qquad \mu^2 r^2 - \mu_0^2 a^2 \sin^2 z.$$

Comme

$$\mu r \sin i = \mu_0 a \sin z,$$

on voit que l'expression (7) ne peut être nulle que si $\sin i = 1$; cela ne peut se produire qu'au point d'arrivée, si en ce point le rayon lumineux est horizontal.

On voit aussi que, quand z augmente, les éléments de l'intégrale et par suite l'intégrale elle-même augmentent; la réfraction, pour un état donné de l'atmosphère, est d'autant plus forte que la distance zénithale est plus grande.

23. Simplification du facteur qui multiplie l'intégrale. — On voit encore que l'on peut remplacer le premier facteur du dénominateur par sa valeur moyenne $1-\alpha$. L'erreur commise sur ce facteur, dans chaque élément, est moindre que α; elle est positive dans les régions élevées de l'atmosphère, négative dans les couches inférieures, nulle dans la couche dont la densité est $\frac{1}{2}\rho_0$. L'erreur totale est donc notablement moindre que le produit de la réfraction elle-même par α. Comme α est environ 0,0003 et que la réfraction à l'horizon ne dépasse pas $2100''$, on voit que l'erreur est

sensiblement moindre que $0'',6$ à l'horizon; elle décroît rapidement quand la hauteur augmente. Elle est donc toujours négligeable, et l'on peut écrire

$$(8) \quad \Delta\theta = -\frac{\alpha \sin z}{(1-\alpha)\rho_0} \int_0^{\rho_0} \frac{(1-s)\,d\rho}{\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right) + 2s\sin^2 z - s^2 \sin^2 z}}.$$

24. Suppression d'un terme au dénominateur de la fonction différentielle. — On peut aussi négliger au dénominateur le terme $-s^2 \sin^2 z$. Pour le montrer nettement, il est nécessaire d'évaluer approximativement l'erreur commise. Nous y parviendrons en faisant une hypothèse sur la constitution de l'atmosphère.

Supposons la température constante. Nous allons montrer qu'alors

$$\rho = \rho_0 e^{-ms},$$

où la valeur de m est à peu près égale à 800.

Soient, en effet, p la pression de la couche d'air de densité ρ, g l'accélération de la pesanteur en cette couche, p_0, ρ_0, g_0 les valeurs de p, ρ, g à la surface de la Terre. Entre g et g_0, on a la relation

$$\frac{g}{g_0} = \frac{a^2}{r^2}.$$

La température étant constante, on a

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Par l'hypothèse fondamentale, on a aussi

$$dp = -g\rho\,dr = -g_0 \frac{a^2}{r^2} \rho\,dr.$$

On en déduit

$$\frac{p_0}{\rho_0}\frac{d\rho}{\rho} = + g_0 a^2 d\frac{1}{r},$$

d'où, en intégrant et observant que $\rho = \rho_0$ pour $r = a$,

$$(9) \qquad \rho = \rho_0 e^{\frac{\rho_0}{p_0} g_0 a \left(\frac{a}{r} - 1\right)} = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g_0 a}{p_0} s} = \rho_0 e^{-ms}.$$

Si l'on prend pour unité de longueur le mètre, pour unité

de masse la masse du mètre cube d'air à 0° sous la pression de 0,76, pour unité de volume le mètre cube, pour unité de densité, celle de l'air dans les conditions normales, la densité du mercure est 10517,3. Donc, si, à la surface de la Terre, les conditions de température et de pression sont les conditions normales,

$$p_0 = 10517,3 \times 0,76 \times \rho_0 g_0 = 7993,147 \rho_0 g_0$$

et, par suite,

$$\frac{\rho_0 g_0 a}{p_0} = \frac{a}{7993,147}.$$

Comme a est environ

$$6366200,$$

on voit que m diffère peu de

$$800.$$

25. Hauteur maximum de l'atmosphère. — La formule (9) montre que s est toujours une très petite quantité. Si l'on veut, en effet, que $\frac{\rho}{\rho_0}$ soit moindre qu'un nombre donné n, il suffira de faire

$$s > \frac{1}{m} \log \frac{1}{n}.$$

Le logarithme népérien de 10000 étant environ 9, la densité sera 10000 fois moindre qu'à la surface si

$$s = \frac{9}{m} = 0,011.$$

A des hauteurs plus grandes, l'atmosphère n'exerce visiblement plus sur la réfraction d'influence appréciable.

26. Fin de la question posée au n° 25. — Si l'on néglige au dénominateur de la formule (8) le terme $-s^2 \sin^2 z$, l'erreur relative commise sur un élément est

$$\frac{1}{2} \frac{s^2 \sin^2 z}{\cos^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) + 2s \sin^2 z}.$$

Ce rapport augmente avec z, puisque son dénominateur peut

s'écrire

$$1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) - (1 - 2s)\sin^2 z.$$

L'élément de l'intégrale augmente aussi avec z; il suffit donc, pour avoir une limite de l'erreur commise, de supposer $z = 90°$.

La réfraction horizontale, si l'on emploie la formule (9), est

$$R_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\int_{s_1}^{0} \frac{m(1-s)e^{-ms}\,ds}{\sqrt{2[s - \alpha(1-e^{-ms})]}},$$

et l'erreur commise, en négligeant le terme $-s^2\sin^2 z$, est

$$E = \frac{\alpha}{1-\alpha}\int_{s_1}^{0} \frac{m(1-s)e^{-ms}}{\sqrt{2[s-\alpha(1-e^{-ms})]}}\,\frac{1}{4}\,\frac{s^2}{s-\alpha(1-e^{-ms})}\,ds.$$

Dans ces formules, s_1 désigne la valeur de s à la limite supérieure de l'atmosphère. Les numérateurs renfermant le facteur e^{-ms} qui devient insensible dès que s dépasse la valeur s_1, on peut prendre les intégrales entre les limites ∞ et 0, sans erreur sensible.

Posons

$$u = s - \alpha(1 - e^{-ms}).$$

Nous aurons

$$\frac{du}{ds} = 1 + \alpha m e^{-ms}.$$

La valeur de αm étant environ 0,2, on a

$$u = \mu s,$$

μ étant compris entre 0,8 et 1. Pour nous rendre compte de la grandeur des intégrales R et E, nous regarderons μ comme une constante. Nous remplacerons aussi au numérateur $1 - s$ par 1. Nous avons alors

$$R_0 = -\frac{m\alpha}{\sqrt{2\mu}(1-\alpha)}\int_0^{\infty} \frac{e^{-ms}}{\sqrt{s}}\,ds,$$

$$E = -\frac{m\alpha}{4\mu\sqrt{2\mu}(1-\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-ms}\sqrt{s}\,ds.$$

L'intégration par partie, en observant que $e^{-ms}\,ds$ est la différentielle de $-\frac{1}{m}e^{-ms}$, donne

$$E = -\frac{\alpha}{8\mu\sqrt{2\mu}(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ms}\,ds}{\sqrt{s}} = \frac{R}{8m\mu}.$$

Pour obtenir R_0, posons

$$\sqrt{s} = \frac{t}{\sqrt{m}}, \qquad \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{2\,dt}{\sqrt{m}},$$

nous aurons

$$R_0 = -\frac{2\sqrt{m\alpha}}{\sqrt{2\mu}(1-\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{m\pi}{2\mu}}\,\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Faisant

$$m = 800, \qquad \mu = 0,9, \qquad \alpha = 0,0003,$$

on trouve approximativement

$$R_0 = 2000'',$$

d'où

$$E = \left(\frac{1}{3}\right)''.$$

27. Développement de l'intégrale en série ; termes à conserver. — On conservera donc cette formule, suffisante dans tous les cas,

$$(10) \qquad R = \frac{\alpha \sin z}{(1-\alpha)\rho_0}\int_0^{\rho_0} \frac{(1-s)\,d\rho}{\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right) + 2s\sin^2 z}},$$

où R désigne la valeur absolue de $\Delta\theta$.

Tant que $\cos^2 z$ est plus grand que $2s\sin^2 z$, ou z moindre que 80°, on peut, en mettant $\cos z$ en facteur au dénominateur, développer le radical par la formule du binôme.

On a alors

$$R = \frac{\alpha \operatorname{tang} z}{\rho_0(1-\alpha)}\int_0^{\rho_0} (1-s)\left[1 + \frac{\alpha\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)}{\cos^2 z} - s\operatorname{tang}^2 z + \frac{3}{2}s^2\operatorname{tang}^4 z \ldots\right]d\rho$$

$$= \frac{\alpha}{\rho_0(1-\alpha)}\operatorname{tang} z\int_0^{\rho_0}\left[1 - \frac{s}{\cos^2 z} + \frac{\alpha\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)}{\cos^2 z} + \frac{3}{2}s^2\operatorname{tang}^4 z\ldots\right]d\rho.$$

Le terme conservé

$$(11) \qquad \frac{3}{2}\,\frac{\alpha}{\rho_0(1-\alpha)}\operatorname{tang}^5 z\int_0^{\rho_0} s^2\,d\rho$$

est de beaucoup le plus grand terme du troisième ordre. L'intégration par partie donne

$$\int_0^{\rho_0} s^2\,d\rho = (\rho s^2)_0^{\rho_0} - 2\int_0^{\rho_0} s\rho\,ds = -2\int_0^{\rho_0} s\rho\,ds.$$

Le terme (11) devient donc, au signe près,

$$(12) \qquad 3\frac{\alpha}{\rho_0(1-\alpha)}\operatorname{tang}^5 z\int_0^{\rho_0} s\rho\, ds.$$

Or, si l'on suppose la température de l'atmosphère constante,

$$\rho = \rho_0 e^{-ms}.$$

L'expression (12) devient

$$\frac{3\alpha}{1-\alpha}\operatorname{tang}^5 z\int_0^{\infty} e^{-ms} s\, ds = \frac{3\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{m^2}\operatorname{tang}^5 z.$$

Si la température va en diminuant, l'intégrale diminue, car l'abaissement de température a pour effet d'abaisser les molécules et, par suite, de diminuer s.

Si l'on fait

$$z = 80°,$$

on a

$$\operatorname{tang}^5 z = 5867$$

et

$$\frac{3\alpha}{m^2}\operatorname{tang}^5 z = \frac{5}{640000}.$$

ou en secondes : $2''$.

Pour $z = 75°$, $\operatorname{tang}^5 z = 724$, et la valeur du terme s'abaisse à $0'',3$.

On peut donc, pour des distances zénithales qui ne dépassent pas $76°$, prendre

$$R = \frac{\alpha}{\rho_0(1-\alpha)}\operatorname{tang} z\int_0^{\rho_0}\left[1 - \frac{s}{\cos^2 z} + \frac{\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{\cos^2 z}\right] d\rho,$$

que nous allons intégrer.

28. Intégration. Formule définitive. — On a successivement

$$R = \frac{\alpha}{\rho_0(1-\alpha)}\operatorname{tang} z\left[\rho_0 + \frac{\alpha}{\cos^2 z}\left(\rho_0 - \frac{\rho_0}{z}\right)\right] - \frac{\alpha}{\rho_0(1-\alpha)}\frac{\operatorname{tang} z}{\cos^2 z}\int_0^{\rho_0} s\, d\rho$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha}\operatorname{tang} z\left(1 + \frac{\alpha}{2\cos^2 z}\right) - \frac{\alpha}{\rho_0(1-\alpha)}\frac{\operatorname{tang} z}{\cos^2 z}\int_0^{\rho_0} s\, d\rho$$

$$= \alpha\operatorname{tang} z\left[1 + \frac{\alpha(2\cos^2 z + 1)}{2\cos^2 z}\right] - \frac{\alpha}{\rho_0(1-\alpha)}\frac{\operatorname{tang} z}{\cos^2 z}\int_0^{\rho_0} s\, d\rho.$$

L'intégration par partie donne

$$\int_0^{\rho_0} s\,d\rho = (\rho s)_0^{\rho_0} - \int \rho\,ds = -a\int_{r_1}^{a} \frac{\rho\,dr}{r^2} = a\int_a^{r_1} \frac{\rho\,dr}{r^2},$$

r_1 désignant le rayon de la couche supérieure de l'atmosphère.

Soient ϖ le poids d'une colonne verticale d'air ayant pour base l'unité de surface et s'étendant de l'observateur à la limite de l'atmosphère, g l'accélération de la pesanteur au point de l'atmosphère dont la densité est ρ, g_0 cette accélération au point où se trouve l'observateur; on a successivement

$$\varpi = \int_a^{r_1} g\rho\,dr, \qquad \frac{g}{g_0} = \frac{a^2}{r^2}, \qquad \varpi = a^2 g_0 \int_a^{r_1} \frac{\rho\,dr}{r^2};$$

d'où

$$a\int_a^{r_1} \frac{\rho\,dr}{r^2} = \frac{\varpi}{a g_0}.$$

Soient D la densité du mercure, h la hauteur barométrique observée

$$\varpi = g_0 \mathrm{D} h,$$

d'où

$$a\int_a^{r_1} \rho\frac{dr}{r^2} = \frac{\mathrm{D}h}{a}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \alpha \tang z\left[1 + \frac{\alpha(2\cos^2 z + 1)}{2\cos^2 z}\right] - \frac{\alpha}{\rho_0(1-\alpha)}\,\frac{\tang z}{\cos^2 z}\,\frac{\mathrm{D}h}{a} \\ &= \alpha \tang z\left[1 + \frac{\alpha\left(\cos^2 z + \frac{1}{2}\right) - \frac{\mathrm{D}h}{a\rho_0}}{\cos^2 z}\right]. \end{aligned}$$

Nous avons, dans le dernier terme, négligé α au dénominateur; les 0,0003 du dernier terme sont absolument insensibles, car $\frac{\mathrm{D}h}{a\rho_0} = 0{,}001$, $\alpha = 60''$, $\frac{1}{\cos^3 z} = 200$ au maximum.

29. Réfraction moyenne. Correction pour la température et la pression. — Il importe de mettre en nombres la formule ci-dessus. On a

$$\mathrm{D} = 10517{,}3;$$

si la hauteur du baromètre est réduite à 0°,

$$\rho_0 = \frac{h}{0{,}76}\,\frac{1}{1+mt},$$

m étant le coefficient de dilatation de l'air, d'où

$$\frac{Dh}{a\rho_0} = \frac{7993,15}{a}(1+mt), \qquad \text{avec} \qquad a = 6366198.$$

Posons

$$\frac{7993,15}{a} = k,$$

k est environ 0,001. On a aussi

$$\alpha = \alpha_0 \rho_0 = \alpha_0 \frac{h}{0,76}\,\frac{1}{1+mt}$$

et

$$\alpha_0 = 0,0002939.$$

Posant

$$\frac{1}{1+mt} = \varepsilon, \qquad \frac{h}{0,76} = \eta,$$

on a

$$R = \alpha_0 \varepsilon\eta \operatorname{tang} z\left[1 + \frac{3}{2}\alpha_0\varepsilon\eta - \frac{k}{\varepsilon} + \operatorname{tang}^2 z\left(\frac{1}{2}\alpha_0\varepsilon\eta - \frac{k}{\varepsilon}\right)\right].$$

On appelle *réfraction moyenne* la réfraction dans les conditions normales $t = 0°$, $h = 0,76$:

$$R_m = \alpha_0 \operatorname{tang} z\left[1 + \frac{3}{2}\alpha_0 - k + \operatorname{tang}^2 z\left(\frac{1}{2}\alpha_0 - k\right)\right],$$

On constate que $\frac{R}{\varepsilon\eta}$ diffère de R_m, au plus d'une seconde pour $z = 80°$.

R_m est une fonction de z que l'on a pu réduire en Table. Pour avoir R on multiplie R_m par le produit $\varepsilon\eta$. La *Connaissance des Temps* donne à cet effet des Tables calculées par Caillet; seulement on y a pris pour réfraction moyenne la réfraction sous la pression 0,76, à la température de $+10°$, qui est plus voisine que 0° de la moyenne des températures auxquelles se font les observations astronomiques.

R_m pour la hauteur de 44° est 1'; à la hauteur de 26°, 2'; à la hauteur de 18°, 3'; à la hauteur de $13°\frac{1}{2}$, 4'; à la hauteur de $10°\frac{2}{3}$, 5'; à la hauteur de 5°, 10'; à la hauteur de $1°\frac{2}{3}$, 20'; à la hauteur de 0°, 33'48''.

30. Grandeur de l'influence de la réfraction sur les coordonnées équatoriales d'un astre; sur la différence des coordonnées de deux astres. — Certains instruments d'Astronomie donnent l'azimut et la distance zénithale de l'astre; les Tables déduites de la théorie

précédente permettent de corriger immédiatement de la réfraction les observations faites au moyen de tels instruments. D'autres sont appropriés à la mesure des angles horaires et des distances polaires, ou plutôt des différences entre les angles horaires et les distances polaires de l'astre que l'on étudie et d'un astre très voisin dont les coordonnées sont supposées connues. Nous allons établir les formules qui servent à corriger dans ces deux cas les observations.

Le triangle sphérique, qui a pour sommets le pôle, le zénith et l'étoile, permet d'exprimer l'angle horaire H et la distance polaire P en fonction de la latitude φ, de l'azimut A et de la distance zénithale z. En différentiant les formules où on regarde z, H et P comme variables, et remplaçant leurs différentielles par leurs variations, on aura des formules exactes à des termes près du second ordre. Il importe de se rendre compte du degré de précision que ce procédé comporte.

Soit dz la réfraction en distance zénithale. Pour $z = 85^\circ$, $dz = 10'$. D'où $dz^2 = (10')^2 = \frac{10'}{342} = 2''$ environ, ce qui n'est pas négligeable. Si l'on s'arrête à $z = 80^\circ$, $dz = 5'$, $dz^2 = \left(\frac{1}{2}\right)''$. On voit donc que si l'on avait réellement à calculer la réfraction en angle horaire et en distance polaire, les termes du second ordre ne seraient sûrement négligeables que pour des valeurs de z notablement inférieures à 80°.

Mais on n'a à considérer que la différence entre les corrections relatives à deux astres très voisins.

Supposons que la différence de distance zénithale des deux astres soit de $20'$. La variation de dz^2 d'un astre à l'autre est $2\,dz\,\delta\,dz$.

Si $z = 85^\circ$, $dz = 10'$ et les Tables donnent $\delta\,dz = 31''$. Donc

$$2\,dz\,\delta\,dz = \frac{20'}{3420}\,31'' = 0'',2.$$

Pour $z = 80^\circ$, $dz = 5'$, et $\delta\,dz = 10''$,

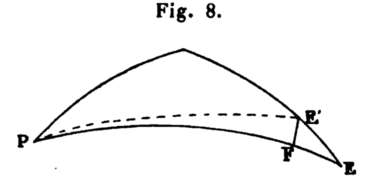
$$2\,dz\,\delta\,dz = 0'',03.$$

On peut donc en toute sécurité remplacer les accroissements finis par les différentielles.

31. Correction de l'angle horaire et de la distance polaire d'un astre. — La réfraction amène l'astre de E en E′. Menons l'arc de grand cercle E′F perpendiculaire sur PE. La substitution précédente revient à faire

$$\Delta P = FE, \qquad \sin P\,\Delta H = E'F$$

Fig. 8.



et à regarder le triangle E′FE comme rectiligne. On a donc

$$\Delta P = \cos E\,\Delta z,$$

$$\Delta H = \frac{\sin E}{\sin P}\Delta z.$$

dz est négatif; $\sin E$ et $\sin P$ sont positifs; la réfraction rapproche l'astre du méridien; il s'ensuit que, tandis que la première formule s'applique à tous les cas, la seconde doit s'écrire

$$\pm\,\Delta H = \frac{\sin E}{\sin P}\Delta z,$$

en prenant le signe supérieur après le méridien, le signe inférieur avant. On a

$$\Delta z = -\,\alpha \tang z,$$

α étant un coefficient fonction de z, mais dont la variation est assez lente pour que, dans la question qui nous occupe, nous puissions le regarder comme constant en lui attribuant la valeur qui correspond à la moyenne des distances zénithales des deux astres. Donc

$$\Delta P = \frac{\alpha \cos E \sin z}{\cos z}, \qquad \pm\,\Delta H = \alpha\frac{\sin E \sin z}{\sin P \cos z},$$

en changeant les signes pour avoir des formules permettant de passer des positions observées aux positions vraies.

En remplaçant dans ces expressions $\cos z$, $\sin z \sin E$, $\sin z \cos E$ par les valeurs que donne l'application des formules fondamen-

tales au triangle PZE, on a

$$\Delta P = \alpha \frac{\sin\varphi \sin P - \cos\varphi \cos P \cos H}{\sin\varphi \cos P + \cos\varphi \sin P \cos H},$$

$$\pm \Delta H = \alpha \frac{\cos\varphi \sin H}{\sin P(\sin\varphi \cos P + \cos\varphi \sin P \cos H)}.$$

32. Correction de la différence d'angle horaire et de la différence de distance polaire de deux astres. — ΔP et ΔH sont les corrections qu'il faut apporter à des coordonnées P et H mesurées directement pour passer des coordonnées vues aux coordonnées vraies. Comme nous l'avons dit, on emploie, à l'ordinaire, les instruments équatoriaux à mesurer les différences d'ascension droite et de distance polaire entre l'astre que l'on étudie et une étoile voisine connue. Si δP et $\delta Æ$ sont les différences mesurées (astre — ★) en distance polaire et en ascension droite, il faut manifestement appliquer à ces différences la correction

$$\delta \Delta P, \quad \delta \Delta H.$$

Or on a

$$\delta \Delta P = \frac{\partial \Delta P}{\partial P} \delta P + \frac{\partial \Delta P}{\partial H} \delta H.$$

$$\delta \Delta H = \frac{\partial \Delta H}{\partial P} \delta P + \frac{\partial \Delta H}{\partial H} \delta H.$$

Le calcul des quatre dérivées partielles est trop facile pour que nous nous y arrêtions. En posant

$$\operatorname{tang} N = \cot\varphi \cos H, \qquad \operatorname{tang} M = \frac{\cot\varphi}{\cos H},$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\cos^2(P - N)}, \qquad \gamma = \beta \sin N, \qquad \varepsilon = \gamma \cdot \operatorname{tang} H,$$

on trouve

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial P} = \beta, \qquad \frac{\partial \Delta H}{\partial P} = \frac{\varepsilon \cos(2P - N)}{\sin^2 P},$$

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial H} = \varepsilon \cos N, \qquad \frac{\partial \Delta H}{\partial H} = \gamma \frac{\cos N \cos(P - M)}{\cos M \sin P}.$$

Nous ajouterons que, le plus souvent, l'observation est tellement conduite que les deux astres ont même angle horaire; alors il n'y a pas lieu de tenir compte des seconds termes de $\delta \Delta P$ et $\delta \Delta H$.

33. Mesure des hauteurs au moyen du baromètre. — Nous plaçons naturellement dans ce Chapitre la mesure des différences d'altitude de deux stations voisines, au moyen du baromètre.

Soient, comme précédemment, ρ la densité de l'air, p sa force élastique, θ sa température en un lieu donné

$$p = k\rho(1+\alpha\theta),$$

où α désigne le coefficient de dilatation de l'air 0,00366, et k une constante dont la valeur numérique est égale à 7993, en supposant que les unités soient celles adoptées au n° 24, et que g_0 désigne l'accélération de la pesanteur au point où on a déterminé le nombre 7993.

D'autre part,

$$dp = -g\rho\, dr,$$

g désignant l'accélération de la pesanteur à la distance r du centre de la Terre. Posons

$$r = r_0 + z,$$

$$\frac{g}{g_0} = \frac{r_0^2}{(r_0+z)^2}.$$

Donc

$$\frac{dp}{p} = -g_0 \frac{r_0^2}{(r_0+z)^2}\, \frac{dz}{k(1+\alpha\theta)}.$$

Pour intégrer cette équation, on regarde θ comme constant, et on lui attribue une valeur moyenne entre les températures des deux points considérés.

D'autre part, si $z=0$, $p=\varpi$, ce qui détermine la constante d'intégration ; l'intégration donne

$$\log\frac{p}{\varpi} = -\frac{g_0 r z}{k(1+\alpha\theta)(r_0+z)}.$$

Soient h et h' les hauteurs du baromètre aux stations inférieure et supérieure, la dernière étant ramenée à la température T du baromètre à la station inférieure ; soit m la densité du mercure à cette station

$$\varpi = mg_0 h, \qquad p = mgh' = \frac{mg_0 r^2 h'}{(r+z)^2}.$$

On en conclut

$$\log\frac{h}{h'} + 2\log\frac{r+z}{r} = \frac{g_0 r z}{k(1+\alpha\theta)(r+z)}.$$

Il importe de remplacer les constantes par leurs valeurs numériques. On a d'abord $\alpha = 0{,}00366$. Pour tenir compte de ce que, quand la température augmente, la quantité de vapeur d'eau augmente aussi, on peut remplacer α par $0{,}004$. D'autre part, g_0 varie avec la latitude et, si G en est la valeur à Paris,

$$g_0 = \frac{(1 - 0{,}002588 \cos 2\varphi) G}{1 - 0{,}002588 \cos 2\varphi_0},$$

φ_0 étant la latitude de Paris $48^\circ 50' 14''$. Pour remplacer le log népérien par un log vulgaire, on le multiplie par le module

$$M = 0{,}4342945.$$

Poisson prend $k = 7961{,}10\,G$, le nombre $7961{,}10$ répondant à un état moyen d'humidité de l'air, d'où

$$\frac{k}{M}(1 - 0{,}002588 \cos 2\varphi_0) = 18337{,}46\,G,$$

et on en conclut

$$z = \frac{18337{,}46\left[1 + \frac{2(t + t')}{1000}\right]}{1 - 0{,}002588 \cos 2\varphi}\left[\log\frac{h}{h'} + 2\log\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

Si au deuxième membre on néglige $\frac{z}{r}$, que l'on augmente un peu le coefficient $18337{,}46$ et que l'on fasse $\varphi = 45^\circ$, on obtient la formule ordinaire

$$z = 18393\left[1 + \frac{2(t + t')}{1000}\right]\log\frac{h}{h'}.$$

La formule de Laplace, dont les coefficients ont été déterminés en s'aidant des observations, est

$$z = 18336(1 + 0{,}002845 \cos 2\varphi)\left[1 + \frac{2(t + t')}{1000}\right]\left[\left(1 + \frac{z}{r}\right)\log\frac{h}{h'} + \frac{z}{r}\,0{,}868589\right].$$

CHAPITRE III.

PARALLAXE.

34. Notions générales sur la parallaxe. — Pour rendre comparables les observations faites en divers points de la surface de la Terre, il convient de déduire des coordonnées ainsi observées les coordonnées *géocentriques*. La correction à apporter, à cet effet, aux résultats de l'observation a reçu le nom de *parallaxe*.

Il est manifeste que l'on ne peut opérer cette réduction que si l'on connaît, d'une part, les coordonnées géocentriques de l'observateur, et, d'autre part, la distance de l'astre à la Terre. Toutes les fois que cette distance dépassera 2062648 rayons terrestres, la correction de parallaxe sera inférieure à 0",1 et sera regardée comme insensible. Le maximum de cette correction pour le Soleil est environ 8",9; pour Neptune 0",3; on voit donc qu'il n'y a lieu de l'appliquer qu'aux astres qui font partie du système solaire.

Nous verrons ultérieurement comment on peut déterminer pour chacun de ces astres la parallaxe maximum, ou parallaxe horizontale équatoriale, c'est-à-dire l'angle que fait la direction géocentrique de l'astre avec la direction qui serait observée si l'observateur était sur l'équateur, l'astre à l'horizon, à la distance du centre de la Terre où il se trouve réellement. En désignant par P cette parallaxe horizontale équatoriale, a le rayon équatorial de la Terre et Δ la distance de l'astre au centre de la Terre, on a la relation

$$\sin P = \frac{a}{\Delta}, \tag{1}$$

a et Δ étant évaluées au moyen de la même unité.

Nous étudierons dans un autre Chapitre la forme de la Terre: nous verrons que la Terre est, avec une approximation suffisante pour notre objet actuel, un ellipsoïde de révolution aplati. La latitude d'un point est l'angle que fait la normale de ce point avec l'équateur. Nous avons besoin, dans le présent Chapitre, du rayon

vecteur mené au centre et de l'angle que fait ce rayon vecteur avec l'équateur, angle qui a reçu le nom de *latitude géocentrique* ou *latitude réduite* [1]. Il est évident que, si l'on connaît les dimensions de l'ellipsoïde terrestre, la Géométrie permet de calculer ce rayon vecteur r et cette latitude géocentrique φ en fonction de la latitude géographique. Nous supposerons ce calcul fait, et observerons seulement que le rayon vecteur, la latitude géocentrique et le temps sidéral de l'observation sont les coordonnées polaires équatoriales géocentriques de l'observateur. Le temps sidéral t en est l'ascension droite, et la latitude géocentrique la déclinaison.

35. Équations fondamentales. — Cela étant, si Δ, α, δ sont les coordonnées géocentriques de l'astre, Δ', α', δ' les coordonnées observées, on a immédiatement, par les formules du changement de coordonnées rectilignes quand on ne fait que déplacer l'origine, les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta' \cos\delta' \cos\alpha' = \Delta \cos\delta \cos\alpha - r\cos\varphi \cos t, \\ \Delta' \cos\delta' \sin\alpha' = \Delta \cos\delta \sin\alpha - r\cos\varphi \sin t, \\ \Delta' \sin\delta' = \Delta \sin\delta - r\sin\varphi. \end{cases}$$

Profitant de ce que $\frac{r}{\Delta}$ est toujours une petite fraction, nous allons déduire de ces formules les valeurs de $\alpha' - \alpha$ et $\delta' - \delta$ en fonction de α, δ, Δ, φ, t, r.

36. Parallaxe dans les observations méridiennes. — Nous examinerons d'abord, à cause de son extrême simplicité, le cas d'observations méridiennes. Dans ces observations, $\alpha - t$ est nul, ou tout au moins très petit, bien inférieur à 1^m de temps, ou à $\frac{1}{200}$; le produit $\frac{r}{\Delta}\sin(\alpha - t)$ est donc négligeable. Or on déduit des deux premières équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta' \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) = \Delta\cos\delta - r\cos\varphi\cos(\alpha - t), \\ \Delta' \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) = r\cos\varphi \sin(\alpha - t); \end{cases}$$

on a donc

$$\alpha' = \alpha.$$

---

[1] Legendre a aussi donné le nom de *latitude réduite* à l'anomalie excentrique de l'ellipse méridienne.

Il n'y a pas, dans les observations méridiennes, de corrections de parallaxe en ascension droite.

On déduit de la première formule (3)

$$\Delta' \cos\delta' = \Delta \cos\delta - r\cos\varphi;$$

comme

$$\Delta' \sin\delta' = \Delta \sin\delta - r\sin\varphi,$$

on obtient

$$\sin(\delta' - \delta) = \frac{r}{\Delta}\sin(\delta' - \varphi).$$

Il n'existe qu'un seul cas dans lequel le cube de la parallaxe soit sensible, celui de la Lune, pour laquelle $\frac{a}{\Delta}$ est environ $\frac{1}{60}$, de sorte que le cube de la parallaxe en est la $\frac{1}{3600}$ partie ou à peu près 1″. Donc, dans tous les autres cas, on a, avec une précision suffisante,

$$\delta' - \delta = \frac{r}{\Delta}\sin(\delta' - \varphi).$$

Il faut observer seulement que r et Δ ne sont pas, à l'ordinaire, exprimés par rapport à la même unité. r est donné par rapport au rayon a de l'équateur terrestre, et les distances des corps célestes sont exprimées en prenant pour unité la moyenne distance A du Soleil à la Terre. Il convient donc d'écrire

$$\delta' - \delta = \frac{r}{a}\frac{a}{A}\frac{A}{\Delta}\sin(\delta' - \varphi).$$

Nous représenterons toujours dans ce qui va suivre par la lettre r le rapport $\frac{r}{a}$, par la lettre Δ le rapport $\frac{\Delta}{A}$, et nous poserons

$$\frac{a}{A} = \sin\varpi,$$

ϖ étant la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil que l'on peut confondre avec son sinus. Si l'on exprime ϖ en secondes d'arc, on aura ainsi, en secondes d'arc,

$$(3) \qquad \delta' - \delta = \frac{r}{\Delta}\varpi\sin(\delta' - \varphi).$$

37. **Cas de la Lune.** — Dans le cas de la Lune, les réductions qui précèdent ne sont plus permises; en outre, on ne peut observer le centre, mais un bord, et le point observé n'est pas le

même pour un observateur placé à la surface de la Terre que pour un observateur placé au centre. La lunette méridienne ne permettant pas d'observer le centre, mais un bord, il y a une correction de parallaxe en ascension droite et cette correction est analogue à celle que l'on applique à des observations extraméridiennes. Nous nous en occuperons à la fin de ce Chapitre. Il n'en est pas de même de la parallaxe en déclinaison. On a soin d'observer toujours assez près du méridien pour qu'il n'en résulte pas d'erreur sensible sur celui des bords supérieur ou inférieur qui est visible. Nous supposerons donc, pour le calcul de la parallaxe en déclinaison, l'observation faite rigoureusement au méridien.

38. **Parallaxe de la Lune en déclinaison dans les observations méridiennes.** — Soient (*fig.* 9) :

A l'observateur;
AH la trace de l'horizon sur le plan du méridien pris pour plan de la figure;
O le centre de la Terre;
OE l'équateur;
L le centre de la Lune;
AC, OD les rayons menés des points A et O tangentiellement à la Lune au bord supérieur;
Δ la distance du centre de la Lune au centre de la Terre;
z' la distance zénithale observée du bord supérieur de la Lune, corrigée de la réfraction;
z la distance zénithale vue de O;
λ la latitude de l'observateur;
φ la latitude réduite.

Menons deux axes rectangulaires Ox et Oy parallèles à AH et à la verticale.

Les coordonnées du point A sont

$$r\sin(\lambda-\varphi),\qquad r\cos(\lambda-\varphi).$$

Celles du point L sont

$$\Delta\sin(z+h),\qquad \Delta\cos(z+h).$$

L'équation de la droite AC est

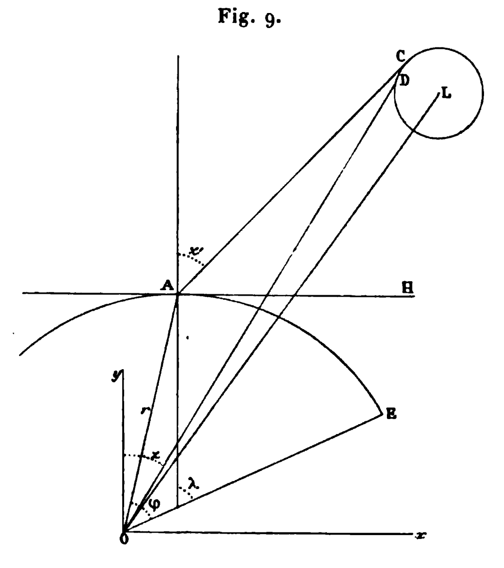
$$\sin z'[y - r\cos(\lambda - \varphi)] - \cos z'[x - r\sin(\lambda - \varphi)] = 0.$$

Cette droite est tangente au disque de la Lune si la distance du centre L à cette droite est



$$\Delta \sin h.$$

Fig. 9.



Cette condition donne

$$\sin z'[\Delta \cos z + h) - r\cos(\lambda - \varphi)]$$
$$- \cos z'[\Delta \sin(z + h) - r\sin(\lambda - \varphi)] = -\Delta \sin h$$

ou

$$\Delta \sin(z' - z - h) - r\sin(z' - \lambda + \varphi) = -\Delta \sin h,$$

d'où, en désignant par p la parallaxe et posant $z' - \lambda + \varphi = \zeta$,

$$\sin(p - h) - \frac{r}{\Delta}\sin\zeta = -\sin h.$$

Soit P la parallaxe horizontale équatoriale du centre de la Lune au moment de l'observation,

$$\sin P = \frac{a}{\Delta};$$

par suite,

$$\sin(p - h) = \frac{r}{a}\sin P \sin\zeta - \sin h.$$

En admettant que P soit 57′ ou environ $\frac{1}{60}$, P^3 est environ $\frac{1}{3600}$ de P, ou 1″; les termes en P^3 ne sont pas négligeables et de même ceux en h^3; mais ceux du quatrième ordre n'atteignent pas $\frac{1}{60}$ de seconde. On peut donc s'en tenir à ceux du troisième ordre. Ayant

$$\sin(p-h)=m,$$

on a

$$p-h=m+\frac{m^3}{6}$$

ou

(4) $$p=p_1+p_2,$$

en posant

$$p_1=\frac{r}{a}\,\mathrm{P}\sin\zeta,$$

$$-p_2=\left(\frac{1}{6}p^3\cos^2\zeta+\frac{1}{2}p^2h\sin\zeta-\frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,h^2\right)\sin\zeta.$$

Pour le bord inférieur, il faudrait changer h en $-h$.

Les valeurs de p_1 et p_2 sont exprimées en parties du rayon si P et h le sont. Si P et h sont donnés en secondes, il faut conserver p_1, mais multiplier p_2 par le carré du sinus de 1″. Dans ces conditions, on a

(5) $$\begin{cases} p_1=\dfrac{r}{a}\,\mathrm{P}\sin\zeta,\\ p_2=-\left(\dfrac{1}{6}\mathrm{P}_3\cos^2\zeta\pm\dfrac{1}{2}\mathrm{P}^2h\sin\zeta-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{P}\,h^2\right)\sin\zeta\sin^2 1''.\end{cases}$$

39. Corrections de parallaxes dans les observations équatoriales extra-méridiennes. — Revenons actuellement à des observations faites dans une position quelconque.

Nous déduisons des deux premières équations (2) les suivantes :

$$\Delta'\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha)=r\cos\varphi'\sin(\alpha-t),$$
$$\Delta'\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha)=\Delta\cos\delta-r\cos\varphi'\cos(\alpha-t).$$

Par division, en posant

$$m=\frac{r\cos\varphi'}{\Delta\cos\delta},$$

nous aurons

$$\mathrm{tang}(\alpha'-\alpha)=\frac{m\sin(\alpha-t)}{1-m\cos(\alpha-t)}.$$

On déduit aussi des deux premières équations (2) en les multipliant respectivement par $\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2}$ et $\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}$, et les ajoutant

$$\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta - \frac{\cos\varphi'\cos\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}-t\right)}{\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}}.$$

Posant

$$\tang\gamma = \tang\varphi'\frac{\cos\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}-t\right)},$$

nous avons

$$\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta - r\sin\varphi'\cot\gamma.$$

Combinant avec

$$(6)\qquad \Delta'\sin\delta' = \Delta\sin\delta - r\sin\varphi',$$

nous déduisons

$$\Delta'\sin(\delta'-\delta) = \frac{r\sin\varphi'\sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma},$$

$$\Delta'\cos(\delta'-\delta) = \Delta - \frac{r\sin\varphi'\cos(\delta-\gamma)}{\sin\gamma}.$$

Posant

$$n = \frac{r\sin\varphi'}{\Delta\sin\gamma},$$

nous avons

$$\tang(\delta'-\delta) = \frac{n\sin(\delta-\gamma)}{1-n\cos(\delta-\gamma)}.$$

40. Ordre de grandeur de $\alpha'-\alpha$ et $\delta'-\delta$. — Les quantités m et n sont toujours petites à cause du facteur $\frac{r}{\Delta}$.

En vérité, si δ approche de 90°, m peut augmenter considérablement; mais cela tient au système de coordonnées employées et n'a aucune importance. En effet, $\alpha'-\alpha$ est de l'ordre de m. Or ce qui caractérise la précision d'une observation en ascension droite, ce n'est pas la précision de α, mais celle de $\alpha\cos\delta$. Si $\Delta\alpha$ varie, mais que $\Delta\alpha\cos\delta$ reste constant, l'astre se déplacera d'une même quantité sur la sphère.

A l'égard de n, il faut observer que cette quantité ne grandit pas quand $\sin\gamma$ s'approche de zéro. En effet, cela ne peut avoir

lieu que si $\tan\!\mathrm{g}\,\varphi$ approche de zéro. Mais

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} = \frac{\cos\varphi}{\cos\gamma}\,\frac{\cos\left(\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} - t\right)}{\cos\dfrac{\alpha'-\alpha}{2}}.$$

On voit qu'alors le rapport $\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$ qui est facteur de n ne grandit pas, et même que son dénominateur est voisin de 1 et son numérateur moindre que 1. La correction de parallaxe en déclinaison est donc toujours de l'ordre de $\frac{r}{\Delta}$.

41. Expressions définitives des corrections de parallaxe. — Les formules qui donnent $\alpha' - \alpha$ et $\delta' - \delta$ sont de la forme

$$\mathrm{tang}\,y = \frac{a \sin x}{1 - a\cos x}.$$

Nous avons vu au Chapitre IX de la première Partie de cet Ouvrage que l'on en déduit

$$y = k\pi + a\sin x + \frac{a^2}{2}\sin 2x + \frac{a^3}{3}\sin 3x + \ldots.$$

Ici l'application de ce développement se limite au premier terme, et l'on a

$$\alpha' - \alpha = \frac{A}{\Delta}\,\frac{r}{a}\,\frac{a}{A}\,\frac{\cos\varphi\sin(v - t)}{\cos\delta},$$

$$\delta' - \delta = \frac{A}{\Delta}\,\frac{r}{a}\,\frac{a}{A}\,\frac{\sin\varphi\sin(\delta - \gamma)}{\sin\gamma}, \qquad \text{où} \qquad \mathrm{tang}\,\gamma\,\frac{\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos(\alpha - t)}.$$

Nous avons déjà dit que la moyenne distance A de la Terre au Soleil est prise pour unité de distance dans le système solaire, le rayon équatorial a de la Terre, pour unité dans la mesure des rayons terrestres, et $\frac{a}{A}$ la parallaxe horizontale équatoriale ϖ du Soleil égale $8'',9$.

$$(7) \qquad \alpha' - \alpha = \frac{1}{\Delta}\,r\varpi'\,\frac{\cos\varphi\sin(\alpha - t)}{\cos\delta}, \qquad \delta' - \delta = \frac{1}{\Delta}\,r\varpi'\,\frac{\sin\varphi\sin(\delta - \gamma)}{\sin\gamma}.$$

Les multiplicateurs de $\frac{1}{\Delta}$ dans ces formules s'appellent *facteurs de la parallaxe en ascension droite et en déclinaison*. Les

observateurs ont coutume d'en donner les logarithmes en publiant leurs observations. Dans un même observatoire, ces facteurs sont des fonctions de l'angle horaire $t-\alpha$ et de la déclinaison δ de l'astre, et l'on a des Tables qui en donnent immédiatement les logarithmes.

Les formules sont préparées pour donner $\alpha'-\alpha$ et $\delta'-\delta$ quand on connaît les coordonnées géocentriques. Si l'on veut passer des coordonnées observées aux coordonnées géocentriques, on remplace dans les seconds membres α et δ par α' et δ' : il n'en résulte pas d'erreur sensible.

42. Réduction de l'observation méridienne d'ascension droite d'un astre à mouvement propre, à diamètre apparent et à parallaxe sensibles. — Supposons que, pour un tel astre, on n'ait observé que l'un des bords et que l'observation n'ait pas été faite exactement au méridien. Soit t_s l'heure sidérale du passage du bord à un fil qui détermine une direction faisant avec celle du tourillon ouest de la lunette un angle égal à $90^\circ+c+f$. Nous désignerons par h' le demi-diamètre apparent de l'astre vu de l'observateur, et représenterons ce demi-diamètre par un nombre positif ou un nombre négatif suivant que le bord observé aura été le premier ou le second.

Dans les deux cas, le centre passait à l'heure t_s à un fil fictif situé dans une position représentée par $f+h'$. Soit α' son ascension droite vue de l'observateur à cet instant.

Soit δ la déclinaison lue de l'axe optique de la lunette. C'est la déclinaison du centre de l'astre vu de l'observateur. En conservant les notations ordinaires employées dans les réductions méridiennes, on a

$$(8)\qquad (\alpha'-t_s)\cos\delta' = m\cos\delta' + n\sin\delta' + f + c + h'.$$

On tire de là l'ascension droite géocentrique du centre de l'astre comme il suit :

Des deux premières formules (2), on tire

$$\Delta\cos\delta\sin(\alpha-t_s) = \Delta'\cos\delta'\sin(\alpha'-t_s)$$

ou, en négligeant des quantités du troisième ordre,

$$(9)\qquad (\alpha-t_s)\,\Delta\cos\delta = (\alpha'-t_s)\,\Delta'\cos\delta'.$$

En multipliant les deux membres de la formule (8) par Δ', on a

$$(10)\qquad (\alpha - t_s)\,\Delta\cos\delta = m\,\Delta'\cos\delta' + n\,\Delta'\sin\delta' + c\,\Delta' f\,\Delta' + h'\,\Delta'.$$

Or les formules (6) du présent Chapitre donnent, avec une approximation suffisante,

$$\Delta'\cos\delta' = \Delta(\cos\delta - r\sin\varpi\cos\varphi'),$$
$$\Delta' = \Delta[1 - r\sin\varpi\cos(\varphi' - \delta)].$$

On a aussi, avec une précision suffisante, même dans le cas de la Lune, en représentant par h le demi-diamètre apparent géocentrique de l'astre,

$$\frac{h'\Delta'}{\Delta} = h.$$

En tenant compte de ces diverses relations, l'équation (10) devient

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha - t_s = {} & (m + n\,\mathrm{tang}\,\delta' + c\,\mathrm{séc}\,\delta')\,\frac{\cos\delta - r\sin\varpi\cos\varphi'}{\cos\delta} \\ & + \frac{h}{\cos\delta} + f\,\frac{1 - r\sin\varpi\cos(\varphi' - \delta)}{\cos\delta}. \end{aligned}\right.$$

Le second membre de cette formule est ce qu'il faudrait ajouter à t_s, si l'astre n'avait pas de mouvement propre, pour avoir l'heure sidérale du passage du centre de cet astre au méridien. Mais, si en une seconde sidérale il a, en ascension droite, un mouvement λ vers l'est, le centre de l'astre mettra à venir au méridien un temps égal à

$$\frac{\alpha - t_s}{1 - \lambda}.$$

Si donc on désigne par α_m l'ascension droite géocentrique du centre de l'astre au moment de son passage au méridien, on a

$$\begin{aligned} \alpha_m = t_s + (m + n\,\mathrm{tang}\,\delta' + c\,\mathrm{séc}\,\delta')\,\frac{\cos\delta - r\sin\varpi\cos\varphi'}{(1 - \lambda)\cos\delta} \\ + \frac{h}{(1 - \lambda)\cos\delta} + f\,\frac{1 - r\sin\varpi\cos(\varphi' - \delta)}{(1 - \lambda)\cos\delta}. \end{aligned}$$

Si le bord de l'astre a été observé à tous les fils, le dernier terme disparaît dans la moyenne.

Si, comme cela arrive pour le Soleil, on a pu observer les deux bords, l'avant-dernier terme disparaît aussi dans la moyenne.

Quant au second terme, il peut s'écrire avec une précision suffisante

$$\frac{1}{1-\lambda}(m + n \operatorname{tang}\delta' + c \operatorname{séc}\delta')(1 - r \sin\varpi \cos\varphi' \operatorname{séc}\delta').$$

43. Parallaxe d'une étoile. — Nous avons vu, au début de ce Chapitre, que, dès qu'un astre sort du système solaire, la parallaxe est insensible. Par conséquent, les observations d'étoiles fixes faites à une même date en divers points de la surface de la Terre sont immédiatement comparables. Les coordonnées mesurées se confondent avec les coordonnées géocentriques.

Il n'en est pas de même des observations d'une même étoile faites à des époques différentes. Nous verrons plus loin que la Terre décrit en une année autour du Soleil une ligne plane peu différente d'un cercle dont le rayon serait environ 23000 rayons terrestres. On appelle *parallaxe d'une étoile* l'angle sous lequel, de cette étoile, on voit celui (R) de ces rayons qui est perpendiculaire à la droite joignant l'étoile au Soleil. Cet angle est 23000 fois l'angle sous lequel on verrait de l'étoile le rayon de la Terre.

Si l'on détermine, au moment où la Terre est à l'extrémité du rayon R, la direction de l'étoile, et qu'on fasse la même détermination six mois après, au moment où la Terre est à l'extrémité du rayon opposé à R, les deux directions ainsi obtenues forment un angle double de la parallaxe. La comparaison des coordonnées mesurées mettra cette parallaxe en évidence si elle est sensible.

L'observation montre que les parallaxes ainsi définies sont encore généralement inappréciables. A cause de leur petitesse on compare, pour les mettre en évidence, à deux époques séparées par un intervalle de six mois, l'astre à un astre immédiatement voisin dont la parallaxe est regardée comme nulle. Les mesures peuvent se faire au moyen d'un micromètre et offrent une précision bien plus grande que celle que l'on pourrait attendre d'observations méridiennes.

La première parallaxe qui ait été ainsi déterminée est celle de α Lyre par F. Struve en 1836; elle fut trouvée égale à $0'',2$; peu après, Bessel, en 1840, trouva celle de la 61[e] du Cygne égale à $0'',35$. La plus forte parallaxe connue est celle de α du Centaure, qui paraît voisine de $0'',9$.

44. Influence de la parallaxe d'une étoile sur son ascension droite et sa déclinaison. — Si l'on désigne par α et δ l'ascension droite et la déclinaison héliocentriques d'une étoile, par α' et δ' les coordonnées géocentriques, on obtiendra $\alpha' - \alpha$ et $\delta' - \delta$ au moyen des formules (2). Il suffira d'y remplacer les derniers termes par les coordonnées rectangulaires équatoriales héliocentriques de la Terre, qui sont

$$-\mathrm{R}\cos\odot, \quad -\mathrm{R}\sin\odot\cos\varepsilon, \quad -\mathrm{R}\sin\odot\sin\varepsilon,$$

où R est la distance de la Terre au Soleil, $\odot$ la longitude géocentrique du Soleil, ε l'obliquité de l'écliptique.

Par des combinaisons analogues à celles du n° 39, on obtient, sans introduire de variables auxiliaires telles que m, n, γ,

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha' - \alpha = \dfrac{\mathrm{R}}{\Delta}\,\text{séc}\,\delta(\cos\varepsilon\sin\odot\cos\alpha - \cos\odot\sin\alpha), \\ \delta' - \delta = \dfrac{\mathrm{R}}{\Delta}(\sin\varepsilon\sin\odot\cos\delta - \cos\varepsilon\sin\odot\sin\alpha\sin\delta - \cos\odot\cos\alpha\sin\delta). \end{cases}$$

De ces formules on déduit celles qui font connaître l'influence de la parallaxe sur la longitude et la latitude d'un astre en faisant coïncider le plan de l'équateur avec l'écliptique, c'est-à-dire en supposant ε nulle. On a ainsi

$$(13)\quad \begin{cases} (\lambda' - \lambda)\cos\beta = -\dfrac{\mathrm{R}}{\Delta}\sin(\lambda - \odot), \\ \beta' - \beta = -\dfrac{\mathrm{R}}{\Delta}\sin\beta\cos(\lambda - \odot). \end{cases}$$

Si, par la position héliocentrique, on mène, dans le plan tangent à la sphère, deux axes rectangulaires dont l'un soit parallèle à l'écliptique, on voit que $(\lambda' - \lambda)\cos\beta$ et $\beta' - \beta$ sont les coordonnées rectangulaires de la position géocentrique de l'étoile, et les formules (13) montrent que la position géocentrique décrit, autour de la position héliocentrique, en un an, une ellipse dont le grand axe est parallèle à l'écliptique et égal à $\frac{\mathrm{R}}{\Delta}$, et le petit à $\frac{\mathrm{R}}{\Delta}\sin\beta$. Cette ellipse est un cercle si l'astre est au pôle de l'éclip-

tique, une droite si l'astre est dans l'écliptique. $\frac{\pi}{2} - \odot + \lambda$ en est l'anomalie excentrique.

Si l'on évalue r en prenant le demi grand axe de l'orbite terrestre pour unité, le rapport $\frac{R}{r}$ prend la forme Rp, p désignant la parallaxe de l'étoile.

CHAPITRE IV.

ABERRATION DES FIXES. — SON INFLUENCE SUR LES COORDONNÉES ÉQUATORIALES D'UN ASTRE. — INFLUENCE DU MOUVEMENT DU SYSTÈME SOLAIRE DANS L'ESPACE. — ABERRATION ANNUELLE; ELLIPSE D'ABERRATION. — ABERRATION DIURNE. — ABERRATION DES PLANÈTES.

---

45. **Angle d'aberration.** — La direction dans laquelle nous voyons un astre diffère de la direction du rayon lumineux émané de l'astre et reçu par notre œil, parce que la vitesse des corps célestes n'est pas entièrement négligeable par rapport à la vitesse de propagation de la lumière. L'angle des deux directions a été désigné, par Bradley, sous le nom d'*aberration*.

Fig. 10.

Soit ba la direction d'un rayon lumineux. Supposons que, dans le temps θ, la lumière aille de b en a et que, dans le même temps, l'œil de l'observateur soit venu de a' en a, ab est la direction vraie de l'astre, $a'b$ est la direction apparente ou observée. L'angle aba' est l'angle d'aberration.

46. **Influence de l'aberration sur les coordonnées équatoriales d'un astre.** — Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires équatoriales, Ox passant par le point vernal; désignons par x, y, z les coordonnées du point a, par x', y', z' celles du point b;

$x - \theta\frac{dx}{dt}$, $y - \theta\frac{dy}{dt}$, $z - \theta\frac{dz}{dt}$ seront celles du point a'; représentons, en outre, par λ la longueur ab, par λ' la longueur $a'b$, par α et δ les coordonnées polaires de la direction ab, par α' et δ' celles de $a'b$. On a évidemment

$$\lambda\cos\delta\cos\alpha = x' - x, \qquad \lambda'\cos\delta'\cos\alpha' = x' - x + \theta\frac{dx}{dt},$$

$$\lambda\cos\delta\sin\alpha = y' - y, \qquad \lambda'\cos\delta'\sin\alpha' = y' - y + \theta\frac{dy}{dt},$$

$$\lambda\sin\delta = z' - z, \qquad \lambda'\sin\delta' = z' - z + \theta\frac{dz}{dt}.$$

Posons

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \mathrm{L}, \qquad \frac{\theta}{\lambda} = k,$$

k sera le temps mis par la lumière à venir du Soleil à la Terre, et l'on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{L}\cos\delta'\cos\alpha' = \cos\delta\cos\alpha + k\dfrac{dx}{dt}, \\ \mathrm{L}\cos\delta'\sin\alpha' = \cos\delta\sin\alpha + k\dfrac{dy}{dt}, \\ \mathrm{L}\sin\delta' = \sin\delta + k\dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Le chemin $a'a$ est environ la dix-millième partie de ab; il s'ensuit que les derniers termes de ces équations sont très petits par rapport aux autres, et leurs carrés sont négligeables. Les deux premières équations (1) donnent

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{L}\cos\delta'\cos(\alpha' - \alpha) = \cos\delta + k\left(\cos\alpha\dfrac{dx}{dt} + \sin\alpha\dfrac{dy}{dt}\right), \\ \mathrm{L}\cos\delta'\sin(\alpha' - \alpha) = k\left(\cos\alpha\dfrac{dy}{dt} - \sin\alpha\dfrac{dx}{dt}\right); \end{cases}$$

d'où, en s'en tenant aux termes du premier ordre,

$$(3)\qquad \alpha' - \alpha = k\left(\cos\alpha\frac{dy}{dt} - \sin\alpha\frac{dx}{dt}\right)\operatorname{séc}\delta.$$

La première équation (2) donne

$$\mathrm{L}\cos\delta' = \cos\delta + k\left(\cos\alpha\frac{dx}{dt} + \sin\alpha\frac{dx}{dt}\right),$$

et, en combinant cette équation avec la troisième équation (1),

on trouve

$$L\cos(\delta'-\delta) = 1 + k\left[\cos\delta\left(\cos\alpha\frac{dx}{dt} + \sin\alpha\frac{dy}{dt}\right) + \sin\delta\frac{dz}{dt}\right],$$

$$L\sin(\delta'-\delta) = k\left(-\cos\alpha\sin\delta\frac{dx}{dt} - \sin\alpha\sin\delta\frac{dy}{dt} + \cos\delta\frac{dz}{dt}\right),$$

d'où

$$(4)\qquad \delta'-\delta = k\left(-\cos\alpha\sin\delta\frac{dx}{dt} - \sin\alpha\sin\delta\frac{dy}{dt} + \cos\delta\frac{dz}{dt}\right).$$

Les équations (3) et (4) donnent les différences cherchées entre les coordonnées apparentes et les coordonnées vraies. Il ne reste plus qu'à y remplacer les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs.

47. Composantes du mouvement de l'observateur. — Soient X, Y, Z les coordonnées du centre du Soleil, r sa distance à la Terre, $\odot$ sa longitude, ε l'obliquité de l'écliptique, ρ la distance de l'observateur au centre de la Terre, φ' sa latitude réduite, μ l'heure sidérale; μ et φ' sont l'ascension droite et la déclinaison géocentriques de l'observateur. On a visiblement

$$\begin{aligned} x &= X - r\cos\odot \qquad + \rho\cos\varphi'\cos\mu,\\ y &= Y - r\sin\odot\cos\varepsilon + \rho\cos\varphi'\sin\mu,\\ z &= Z - r\sin\odot\sin\varepsilon + \rho\sin\varphi'. \end{aligned}$$

Il est manifeste que, $\alpha'-\alpha$ et $\delta'-\delta$ étant des fonctions linéaires de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on peut remplacer successivement x, y, z par les trois parties dont ces quantités sont formées et faire la somme des résultats.

48. Influence du mouvement du système solaire. — Dans l'état actuel de l'Astronomie, $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ sont des constantes, le mouvement du Soleil dans l'espace étant regardé comme rectiligne et uniforme; donc ce mouvement a pour effet de modifier d'une manière constante la position de chaque étoile; nous n'avons aucun moyen de calculer rigoureusement cette modification, ni aucun intérêt à le faire. Il suffira de dire que les recherches relatives au mouvement du Soleil indiquent que sa vitesse est infé-

rieure à 100^{km} de sorte que le carré du rapport de cette vitesse à celle de la lumière est négligeable.

49. Aberration annuelle. — La partie de l'aberration qui provient des seconds termes s'appelle *aberration annuelle,* parce qu'elle est représentée par des termes périodiques dont la période est l'année; la troisième partie a la même période que $\sin\mu$ et $\cos\mu$, période qui est le jour sidéral: on l'appelle *aberration diurne.*

Nous verrons ultérieurement que l'on a

$$r^2 \frac{d\odot}{dt} = n\cos\varphi, \qquad \frac{dr}{dt} = n\,\text{tang}\varphi\sin(\odot - \varpi),$$
$$\frac{\cos^2\varphi}{r} = 1 + e\cos(\odot - \varpi).$$

On en conclut, pour l'aberration annuelle,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{n}{\cos\varphi}(\quad \sin\odot + \sin\varphi\sin\varpi),$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{n}{\cos\varphi}(-\cos\odot - \sin\varphi\cos\varpi)\cos\varepsilon,$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{n}{\cos\varphi}(-\cos\odot - \sin\varphi\cos\varpi)\sin\varepsilon$$

et, par suite,

$$\alpha' - \alpha = -\frac{nk}{\cos\varphi}(\sin\alpha\sin\odot + \cos\alpha\cos\odot\cos\varepsilon)\,\text{séc}\,\delta$$
$$-\frac{nk\sin\varphi}{\cos\varphi}(\sin\alpha\sin\varpi + \cos\alpha\cos\varpi\cos\varepsilon)\,\text{séc}\,\delta,$$

$$\delta' - \delta = \frac{nk}{\cos\varphi}[(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon)\cos\odot - \cos\alpha\sin\delta\sin\odot]$$
$$+\frac{nk\sin\varphi}{\cos\varphi}[\cos\varpi(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon) - \sin\varpi\cos\alpha\sin\delta].$$

Si l'on prend pour unité de longueur la moyenne distance de la Terre au Soleil, pour unité de temps le jour solaire moyen, la lumière mettant à peu près 493^s à venir du Soleil, on a approximativement

$$k = \frac{493}{86400}.$$

Le mouvement de la Terre autour du Soleil en un jour étant

environ un degré dans une orbite à peu près circulaire de rayon un, n est à peu près $\frac{1}{57}$. Donc approximativement

$$nk = \frac{493}{57.86400} = \frac{1}{10000}.$$

Le coefficient $\frac{nk}{\cos\varphi}$, d'après les déterminations de Nyrèn, est $20'',481$; $\frac{nk\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0'',343$. On néglige le plus souvent ce terme, dû à l'ellipticité de l'orbite terrestre. Il est d'ailleurs aisé d'en tenir compte.

Pour faciliter les applications numériques, on pose

$$-\frac{nk}{\cos\varphi}\cos\odot\cos\varepsilon = h\sin\mathrm{H}, \qquad -\frac{nk}{\cos\varphi}\sin\odot = h\cos\mathrm{H},$$
$$-\frac{nk}{\cos\varphi}\cos\odot\sin\varepsilon = i,$$
$$-\frac{nk}{\cos\varphi}\sin\varphi\cos\varpi\cos\varepsilon = h'\sin\mathrm{H}', \qquad -\frac{nk}{\cos\varphi}\sin\varphi\sin\varpi = h'\cos\mathrm{H}',$$
$$-\frac{nk}{\cos\varphi}\sin\varphi\cos\varpi\sin\varepsilon = i'.$$

On trouve ainsi

$$\alpha' - \alpha = h\sin(\mathrm{H}+\alpha)\operatorname{séc}\delta + h'\sin(\mathrm{H}'+\alpha)\operatorname{séc}\delta,$$
$$\delta' - \delta = h\cos(\mathrm{H}+\alpha)\sin\delta + h'\cos(\mathrm{H}'+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta + i'\cos\delta.$$

Les nombres h, H, h', H', i, i' varient avec le temps, et sont donnés, de jour en jour, dans les éphémérides astronomiques.

50. Influence de l'aberration annuelle sur les longitudes et latitudes des astres. Représentation sur la sphère. — Si l'on veut avoir les valeurs de l'aberration en longitude et en latitude, il suffira de faire $\varepsilon = 0$ et de remplacer les coordonnées équatoriales par les coordonnées écliptiques. On trouve ainsi

$$\lambda' - \lambda = -20'',481\cos(\odot - \lambda)\operatorname{séc}\beta - 0'',343\cos(\varpi - \lambda)\operatorname{séc}\beta,$$
$$\beta' - \beta = -20'',481\sin(\odot - \lambda)\sin\beta - 0'',343\sin(\varpi - \lambda)\sin\beta,$$
$$\varpi = 280^\circ 21' 21'' + 61'',70(t - 1850).$$

Il résulte de là une interprétation simple de la partie principale de l'aberration annuelle. La position apparente de l'étoile décrit, en un an, autour de la position vraie, sur la sphère que nous confondons avec le plan tangent en ce point, une ellipse dont le

grand axe est parallèle à l'écliptique et égal à $20'',481$; le rapport du petit axe au grand est le sinus de la latitude; $\odot - \lambda$ en est l'anomalie excentrique, et le mouvement de la position apparente sur cette ellipse a lieu en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.

51. **Aberration diurne.** — On a, pour l'aberration diurne,

$$\frac{dx}{dt} = -\rho\cos\varphi'\sin\mu\frac{d\mu}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \rho\cos\varphi'\cos\mu\frac{d\mu}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt} = 0.$$

On en conclut

$$\alpha' - \alpha = k\rho\cos\varphi'\cos(\mu - \alpha)\,\text{séc}\,\delta\,\frac{d\mu}{dt},$$

$$\delta' - \delta = k\rho\cos\varphi'\sin(\mu - \alpha)\sin\delta\,\frac{d\mu}{dt}.$$

Si l'on adopte les mêmes unités que pour l'aberration annuelle, ρ évalué en secondes est égal à la parallaxe du Soleil $8'',9$, k est $\frac{493}{86400}$ et, la Terre tournant de 2π en un jour, $\frac{d\mu}{dt}$ est 2π. D'où $k\rho\frac{d\mu}{dt}$ est $8'',9 \times \frac{493 . 2\pi}{86400}$ ou environ $0'',3$.

On a plus exactement

$$k\rho\frac{d\mu}{dt} = 0'',322.$$

Il est à remarquer que, dans les observations méridiennes, $\delta' - \delta$ est nul, et $\alpha' - \alpha = 0'',322\cos\varphi'\,\text{séc}\,\delta = \varkappa\,\text{séc}\,\delta$.

D'où

$$\alpha = \alpha' - \varkappa\,\text{séc}\,\delta.$$

Cette correction $-\varkappa\,\text{séc}\,\delta$ est appliquée invariablement par l'observateur lui-même. Dans les observations équatoriales où l'on compare une étoile à une étoile voisine, la valeur de l'aberration diurne est la même pour les deux astres, de sorte qu'il n'y a lieu d'appliquer aucune correction.

52. **Aberration des planètes.** — La non-instantanéité de la propagation de la lumière a, pour les astres doués d'un mouvement propre sensible, un autre effet que l'aberration des fixes que nous venons d'étudier. Au moment où nous recevons le rayon lumineux émis par l'astre, cet astre, en raison de son mou-

vement propre, ne se trouve plus dans la position qu'il occupait à l'instant où le rayon a été émis. Si t est l'heure de l'observation, θ le temps qu'a mis la lumière à venir de l'astre, *la direction observée, corrigée de l'aberration des fixes, est celle de la droite qui joint la position occupée dans l'espace par l'observateur au temps t à la position qu'avait l'astre au temps $t - \theta$.*

Soient, dans l'espace, E la position de l'astre au temps $t - \theta$,

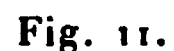
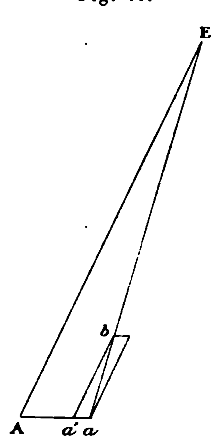


Fig. 11.



A celle de l'observateur au même instant. Soient, au temps t, b le centre optique de l'objectif de la lunette, $a'b$ la direction de la lunette, Eb est la direction du rayon lumineux qui, par hypothèse, arrive en a en même temps que l'oculaire a'.

Pendant le temps θ, le mouvement de l'observateur, comme celui de la lumière, peut être regardé comme rectiligne et uniforme. Il s'ensuit que

$$\frac{ba'}{a'a} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A}a}.$$

Les deux droites $a'b$, AE sont donc parallèles. Donc :

La direction apparente ab de l'astre au temps t est la même que la direction vraie AE *de cet astre au temps $t - \theta$.*

Les deux propositions que nous venons d'énoncer sont utilisées dans la construction d'éphémérides donnant les directions apparentes des astres mobiles.

CHAPITRE V.

DÉPLACEMENT DE L'ÉCLIPTIQUE ET DE L'ÉQUATEUR SUR LA SPHÈRE, PRÉCESSION DES ÉQUINOXES. — PRÉCESSION LUNISOLAIRE, PRÉCESSION PLANÉTAIRE, PRÉCESSION GÉNÉRALE. — NUTATION. — ÉLÉMENTS DE LA PRÉCESSION SUR L'ÉQUATEUR. — VARIATION DES COORDONNÉES ÉCLIPTIQUES OU ÉQUATORIALES DES ASTRES DUES A LA PRÉCESSION PROPREMENT DITE. PRÉCESSION ANNUELLE; SA DÉTERMINATION DIRECTE. INFLUENCE DE LA NUTATION. FORMULES POUR TROUVER LES COORDONNÉES VRAIES D'UN ASTRE A UNE DATE DONNÉE. — INFLUENCE DE LA PRÉCESSION SUR LES ÉLÉMENTS QUI DÉFINISSENT UN GRAND CERCLE DE LA SPHÈRE. — MOUVEMENTS PROPRES DES ÉTOILES.

53. **Causes du phénomène de la précession des équinoxes.** — Les attractions du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial de la Terre produisent un déplacement lent de l'équateur, et les actions des planètes sur le Soleil et sur la Terre produisent un déplacement plus lent encore du plan de l'écliptique. L'étude de ces déplacements, des modifications qu'ils produisent dans les positions relatives de l'équateur et de l'écliptique, des changements qui en résultent dans les coordonnées d'un astre, et aussi dans les quantités qui définissent la position d'un grand cercle quelconque de la sphère céleste sont l'objet du présent Chapitre.

La démonstration des formules qui font connaître, en fonction du temps, les angles qui définissent, à une date quelconque, la position de l'équateur et celle de l'écliptique par rapport à des plans fixes de la sphère céleste, appartient à l'Astronomie théorique, à la *Mécanique céleste*. Nous ne nous en occuperons pas, et nous emprunterons ces formules au Traité de M. Oppolzer déjà cité au Chapitre IX du I[er] Volume de cet Ouvrage. Les nombres qui y figurent ne diffèrent que d'une manière insensible de ceux qui sont donnés au Tome II du beau *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand. Ces formules ont la forme de développements en séries.

54. Forme des séries qui représentent les angles dont dépendent la position de l'équateur et celle de l'écliptique. Équateur moyen, écliptique moyen. — Les séries représentant les angles qui définissent la position de l'équateur à une date donnée renferment des termes fonctions entières du temps, et des termes périodiques dont les arguments dépendent des positions relatives du Soleil, de la Lune et de leurs orbites. Les termes de la première sorte constituent la précession proprement dite, les autres ont reçu le nom de *nutation*. L'ensemble de ces derniers ne dépasse pas un petit nombre de secondes d'arc.

De même, les angles qui définissent la position de l'écliptique à une date donnée sont exprimés par des fonctions entières du temps et par des termes périodiques qui dépendent des positions relatives du Soleil et des planètes. Dans l'étude de la précession et de la nutation on néglige entièrement ces derniers termes; le plan obtenu en les supprimant dans l'expression des angles qui définissent l'écliptique s'appelle *écliptique moyen*. Le plan obtenu en supprimant la nutation des valeurs des angles qui définissent l'équateur à une date donnée s'appelle *équateur moyen*.

Nous prendrons comme plans fixes l'équateur moyen A_f et l'écliptique moyen E_f au commencement de l'année 1850. La connaissance de l'équateur moyen suppose la connaissance préalable de la nutation, que nous voulons étudier. On procède ici, comme dans toutes les questions d'Astronomie, par approximations successives.

55. Relations entre les angles et les arcs qui définissent les positions de l'équateur et de l'écliptique. — Soit E_v l'écliptique moyen et A_v l'équateur vrai à une autre date. Nous regarderons l'intersection B′ de ces deux plans (*fig.* 12) comme étant l'équinoxe vrai, négligeant définitivement les perturbations périodiques de l'écliptique.

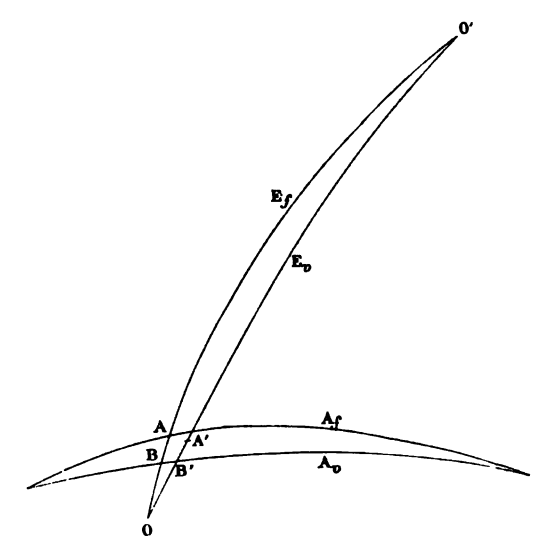
Le déplacement AB de l'équinoxe sur l'écliptique, dû uniquement au déplacement de l'équateur s'appelle la *précession lunisolaire* en longitude; l'arc BB′ dû au déplacement de l'écliptique s'appelle *précession planétaire;* si l'on prend $O'A' = O'A$, envisageant, ce qui est visiblement arbitraire, le point A′ comme cor-

respondant au point A, A'B' s'appelle la *précession générale*. Nous poserons

$$AB = \psi_0, \quad A'B' = \psi', \quad BB' = \lambda_0, \quad \widehat{ABA_\nu} = \varepsilon_0, \quad \widehat{A'B'A_\nu} = \varepsilon'.$$

$$\widehat{AOA'} = \pi_0, \quad AO' = \Pi_0.$$

Fig. 12.



La connaissance des quantités ψ_0, ψ', ε_0, ε', en fonction du temps, entraîne celle des trois quantités π_0, Π_0, λ_0. En fait, les expressions de π_0 et Π_0 sont tirées de la théorie du Soleil, ψ_0 et ε_0 de la théorie du mouvement de rotation de la Terre. Le triangle OBB' a pour côtés

$$\lambda_0, \quad 180° - \Pi_0 - \psi_0, \quad 180° - \Pi_0 - \psi',$$

et pour angles

$$\pi_0, \quad \varepsilon', \quad 180° - \varepsilon_0.$$

Si l'on regarde comme connus le second côté et les angles adjacents, on peut aisément en déduire les trois autres éléments

par les formules de Delambre

$$\cos\left(\frac{\Pi_0}{2}+\frac{\psi'}{2}-\frac{\lambda_0}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon'}{2}=\sin\left(\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\pi_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\Pi_0}{2}+\frac{\psi_0}{2}\right),$$
$$\sin\left(\frac{\Pi_0}{2}+\frac{\psi'}{2}-\frac{\lambda_0}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon'}{2}=\sin\left(\frac{\varepsilon_0}{2}-\frac{\pi_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\Pi_0}{2}+\frac{\psi_0}{2}\right),$$
$$\cos\left(\frac{\Pi_0}{2}+\frac{\psi'}{2}+\frac{\lambda_0}{2}\right)\cos\frac{\varepsilon'}{2}=\cos\left(\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\pi_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\Pi_0}{2}+\frac{\psi_0}{2}\right),$$
$$\sin\left(\frac{\Pi_0}{2}+\frac{\psi'}{2}+\frac{\lambda_0}{2}\right)\cos\frac{\varepsilon'}{2}=\cos\left(\frac{\varepsilon_0}{2}-\frac{\pi_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\Pi_0}{2}+\frac{\psi_0}{2}\right).$$

56. **Expressions numériques des éléments introduits.** — On trouve pour ψ_0, ε_0, ψ', ε', π_0, Π_0, λ_0 les développements suivants, en négligeant des termes périodiques dont chacun ne dépasse guère $0'',1$,

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 5036'',924\,t - 1'',0888\,t^2 + \Psi,\\
\varepsilon_0 &= 23^\circ 27' 31'',83 + 0'',0713\,t^2 + \mathrm{E},\\
\psi' &= 5023'',465\,t + 1'',1291\,t^2 + \Psi,\\
\varepsilon' &= 23^\circ 27' 31'',83 - 47'',594\,t - 0'',0143\,t^2 + \mathrm{E},\\
\lambda_0 &= 14'',673\,t - 2'',4184\,t^2,\\
\pi_0 &= 47'',951\,t - 0'',0325\,t^2,\\
\Pi_0 &= 173^\circ 0' 12'' - 868'',3\,t + 0'',11\,t^2,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
\Psi = &- 17'',27 \sin\Omega + 0'',21 \sin 2\Omega - 0'',20 \sin(2g + 2\omega + 2\Omega)\\
&- 1'',26 \sin(2g' + 2\omega' + 2\Omega),\\
\mathrm{E} = &+ 9'',24 \cos\Omega + 0'',55 \cos(2g' + 2\omega' + 2\Omega).
\end{aligned}$$

Dans ces formules, t désigne le temps compté à partir du commencement de l'année 1850 et exprimé en siècles d'années tropiques (¹); g et g' les anomalies moyennes de la Lune et du Soleil, Ω la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Lune, ω et ω' les distances des périgées lunaire et solaire à ce nœud ascendant.

Les valeurs de ψ_0, ε_0, ψ', ε' que l'on obtient en supprimant Ψ

(¹) Nous définirons ultérieurement le jour moyen et les autres éléments employés ici, en étudiant les mouvements propres du Soleil, des planètes et de leurs satellites.

et E correspondent à un équateur fictif que l'on nomme *équateur moyen,* et c'est le déplacement de l'équateur moyen que l'on désigne plus particulièrement sous le nom de *précession*. Le changement de plans, qui consiste à passer de *l'équateur* et de *l'équinoxe moyens* relatifs à une date donnée à *l'équateur* et *l'équinoxe vrais* à cette même date, a reçu le nom de *nutation*.

57. Représentation géométrique des termes principaux de la précession et de la nutation. — Les termes de la précession et de la nutation sont susceptibles d'interprétation géométrique simple.

Abstraction faite de la nutation, ε_0 est très sensiblement constant et ψ_0 proportionnel au temps. Donc *la précession proprement dite équivaut sensiblement à une rotation uniforme de l'axe du monde autour de l'axe initial de l'écliptique, la vitesse angulaire étant de* 5037″ *par siècle, et par suite la durée de la révolution* 258 *siècles*. L'influence des termes du second ordre ne diminue pas de quatorze ans cette durée.

Si l'on considère les deux positions de l'équateur à deux dates voisines l'une de l'autre, il résulte de ce qui précède que les points où ces deux grands cercles se coupent sont sensiblement à 90° du point vernal. Soient en effet, sur la sphère céleste (*fig.* 13),

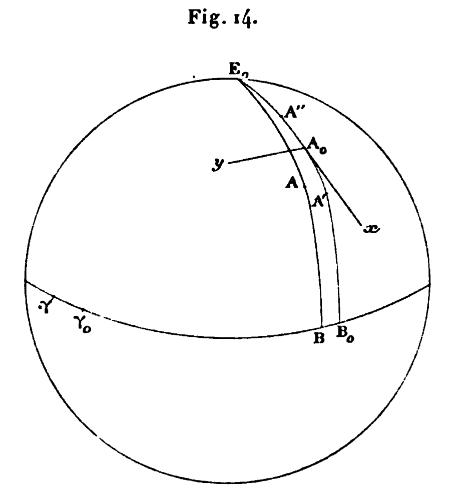
Fig. 13.

E_c l'écliptique initial, Π son pôle, E_q l'équateur initial, P_0 son pôle, E'_q l'équateur à une date voisine, P_v son pôle. Si l'on menait l'arc de grand cercle P_0P_v, il serait perpendiculaire aux deux équateurs, et, par suite, les points où ces deux équateurs se coupent en seraient les pôles. Si P_v tend vers P_0, le grand cercle P_0P_v tend

à être tangent au petit cercle $P_0 P_\nu$ de pôle Π et, par suite, tend à passer par le point vernal γ_0. Ce point γ_0 est donc à 90° des points vers lesquels tendent les intersections de l'équateur E'_q avec l'équateur E_q.

Soit E_0 le pôle nord de l'écliptique fixe (*fig.* 14), A_0 le pôle

Fig. 14.



nord de l'équateur moyen, γ_0 le point vernal. L'arc de grand cercle $E_0 A_0$ est l'obliquité ε de l'écliptique. Réduisons la nutation Ψ et E à ses termes principaux $\Delta\psi$ et $\Delta\varepsilon$ en posant

$$\Delta\psi = -17'',27 \sin \Omega,$$
$$\Delta\varepsilon = 9'',24 \cos \Omega.$$

L'arc Ω représente la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Lune sur l'écliptique. Ce nœud décrit l'écliptique d'un mouvement rétrograde en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ.

Supposons que Ω à une certaine époque soit égal à 360°, $\Delta\psi$ sera nul et $\Delta\varepsilon$ sera égal à $9'',24$. Le pôle vrai de l'équateur sera en A' sur l'arc de grand cercle $E_0 A_0 B_0$ et l'on aura

$$A_0 A' = 9'',24.$$

Immédiatement après cette date, Ω décroît; $\Delta\psi$ devient positif et $\Delta\varepsilon$ décroît. La variation $\Delta\psi$ transporte le point vernal γ_0 en un

point γ tel que $\gamma_0\gamma = \Delta\psi$. Le pôle vrai de l'équateur vient en A, en une position telle que le grand cercle E_0AB fasse avec $E_0A_0B_0$ un angle égal à $\Delta\psi$, et que la différence $E_0A - E_0A_0$ soit $\Delta\varepsilon$. Si l'on mène en A_0 la tangente A_0x au cercle de latitude et la tangente A_0y au parallèle à l'équateur, on pourra sans erreur sensible remplacer le point A par sa projection sur le plan xAy et, désignant par x et y les coordonnées de ce point par rapport aux axes Ax, Ay, on aura

$$x = \Delta\varepsilon \qquad = -9'',24 \cos \Omega,$$
$$y = \sin\varepsilon\,\Delta\psi = -17'',27 \sin\Omega \sin\varepsilon = -6'',87 \sin\Omega.$$

Donc *le pôle vrai*, vu du centre de la sphère, *décrit autour du pôle moyen, en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre*, ou dans le sens rétrograde, *une ellipse dont le petit axe est parallèle à l'écliptique; la période est* 18 *ans* $\frac{2}{3}$. *La longitude du nœud de la Lune est l'anomalie excentrique de cette ellipse*. Le pôle vrai est le plus près de l'écliptique quand le nœud ascendant de l'orbite de la Lune est au point vernal.

58. Changement de l'origine du temps dans les formules de la précession. — Les formules données au § 56 font connaître les angles et les arcs qui déterminent l'équateur moyen et l'écliptique à la date $1850 + t$ par rapport à l'écliptique et à l'équateur à la date 1850. Il est commode, pour la solution des problèmes qu'il nous reste à résoudre, de déduire de ces formules d'autres faisant connaître la position de l'équateur moyen et de l'écliptique à la date $1850 + t$ par rapport à l'équateur moyen et à l'écliptique à la date $1850 + t_1$.

Dans la *fig.* 15, E_f, E_0, E_v représentent l'écliptique aux trois dates 1850,0, $1850 + t_1$, $1850 + t$; $\mathcal{A}_f$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_v$ l'équateur moyen aux mêmes dates. On a pris $O'A' = O'A$, $O'_2A'_1 = O'_2A_1$.

Si l'on veut passer de la date 1850,0 à la date $1850 + t$, les sept éléments introduits sont respectivement

$$(a) \quad \psi = AB, \quad \varepsilon_0 = B, \quad \psi'_0 = A'B', \quad \varepsilon' = B', \quad \pi = O', \quad \Pi = O'A, \quad \lambda = BB'.$$

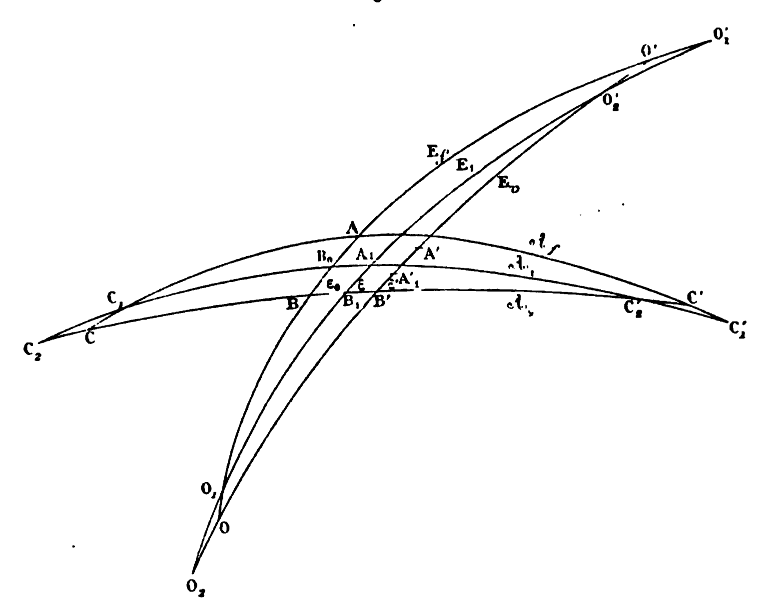
Ces quantités sont connues en fonction de t.

En y remplaçant t par t_1, on obtient les arcs et les angles

suivants : ε devient l'angle $E_f B_0 \mathcal{A}_1$; ε' l'angle $E_1 A_1 \mathcal{A}_1$; π devient l'angle O'_1, λ l'arc $B_0 A_1$ et Π l'arc $O'_1 A$.

Il est manifeste que ces éléments déterminent entièrement la *fig.* 15 et l'on voit sans peine que la résolution du triangle $O' O'_1 O'_2$ où l'on connaît le côté $O'O'_1$ et les angles adjacents permettra de calculer les éléments suivants (b) qui déterminent les plans E_ν, $\mathcal{A}_\nu$

Fig. 15.



par rapport aux plans E_0, $\mathcal{A}_0$ de la même manière que les sept éléments (a) déterminent les plans E_ν, $\mathcal{A}_\nu$ par rapport aux plans E_f, $\mathcal{A}_f$

$$(b) \qquad A_1B_1, \quad A_1B_1B', \quad A'_1B', \quad \varepsilon', \quad O'_2, \quad O'_2A_1, \quad B_1B'.$$

Ce sont ces éléments que nous représenterons désormais par les notations ψ, ε, ψ', ε', π, Π, λ. ε' est le même angle ainsi désigné aux § 55 et 56 ; mais ψ' n'est pas le même arc.

Nous supposerons ces calculs effectués, et, en outre, que l'on ait remplacé, comme unité de temps, le siècle Julien par l'année tropique, comptée suivant l'indication de Bessel à partir du moment où la longitude moyenne du Soleil est égale à 280°. On ob-

tient ainsi les valeurs suivantes :

$$\psi = (50'',36924 + 0'',0000501\,t_0)(t - t_0) - 0'',00010888(t - t_0)^2,$$
$$\varepsilon = 23°27'31'',83 - 0'',47593\,t_0 - 0'',0000014\,t_0^2 + 0'',0000071\,(t - t_0)^2,$$
$$\psi' = (50',23465 + 0'',0002258\,t_0)(t - t_0) + 0'',00011291(t - t_0)^2,$$
$$\varepsilon' = 23°27'31'',83 - 0'',47593\,t_0 - 0'',0000014\,t_0^2$$
$$- (0'',47593 + 0'',0000029\,t_0)(t - t_0),$$
$$\lambda = (0'',14673 - 0'',0001917\,t_0)(t - t_0) - 0'',0002418(t - t_0)^2,$$
$$\pi = (0'',47950 - 0'',0000065\,t_0)(t - t_0) - 0'',0000032(t - t_0)^2,$$
$$\Pi = 173°0'12'' + 32'',869\,t_0 - 0'',683(t - t_0).$$

59. **Éléments relatifs à l'équateur.** — Les équateurs $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ se coupent en des points C_2, C'_2 qui sont à peu près à un quadrant des points A_1, B_1. L'arc C'_2A_1 a, sur l'équateur, le même rôle que O'_2A_1 ou Π sur l'écliptique. Nous le représenterons par P et poserons

$$P = 90° - p.$$

De même l'arc C'_2B' a le même rôle que O'_2B'. La différence $C'_2B' - P$ est l'analogue de ψ'. Nous la représenterons par m, C'_2B_1 par Q et poserons

$$Q = 90° - q,$$

de sorte que nous aurons

$$C'_2B' = Q - \lambda$$

et, par suite,

$$m = Q - \lambda - P.$$

Enfin nous désignerons par n l'angle C'_2, analogue à O'_2 ou π.

Dans le triangle $C'_2A_1B_1$, le côté A_1B_1 est égal à ψ; l'angle B_1 est actuellement représenté par ε; l'angle A_1 est le supplément de la valeur (ε) que prend ε pour $t = t_1$. Les formules de Neper donnent

$$\operatorname{tang}\frac{p+q}{2} = -\frac{\sin\frac{\varepsilon - (\varepsilon)}{2}}{\sin\frac{\varepsilon + (\varepsilon)}{2}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{p-q}{2} = \frac{\cos\frac{\varepsilon + (\varepsilon)}{2}}{\cos\frac{\varepsilon - (\varepsilon)}{2}}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}$$

et

$$\operatorname{tang}\frac{n}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varepsilon + (\varepsilon)}{2}\,\frac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p+q}{2}}.$$

La différence $\varepsilon - (\varepsilon)$ étant beaucoup moindre que ψ, on voit que p, q aussi bien que n sont petits. Le développement de ces formules en séries donne

$$m = (46'',05931 + 0'',0002839\,t_0)(t - t_0) + 0'',00014195(t - t_0)^2,$$
$$n = (20'',05150 - 0'',00008867\,t_0)(t - t_0) - 0'',00004334(t - t_0)^2,$$
$$\mathrm{P} = 90° - (23'',030 + 0'',000142)(t - t_0) - 0'',000031(t - t_0)^2.$$

60. Variations des coordonnées d'un astre produites par la précession. — Les formules que nous venons d'obtenir sont toutes préparées pour la solution de ce problème : *Ayant les coordonnées moyennes d'un astre à une date, trouver les coordonnées moyennes à une autre date.* Il suffit d'adopter pour t_1 la première date, pour t la seconde et ces formules donnent les déplacements des plans fondamentaux.

Soient λ_1 la longitude, β_1 la latitude de l'astre à la date t_1; λ, β à la date t; soient α_1 l'ascension droite, δ_1 la déclinaison à la date t_1, α et δ à la date t, nous remarquerons, pour abréger, qu'aux quantités

$$\pi,\quad \Pi,\quad \psi',\quad \lambda_1,\quad \beta_1,\quad \lambda,\quad \beta,$$

qui se rapportent à l'écliptique, correspondent avec des significations entièrement analogues par rapport à l'équateur les quantités

$$n,\quad \mathrm{P},\quad m,\quad \alpha_1,\quad \delta_1,\quad \alpha,\quad \delta,$$

de sorte que les formules relatives au changement des coordonnées écliptiques donneront de suite celles qui serviront au changement des coordonnées équatoriales.

61. Variations des coordonnées écliptiques. — Le triangle qui a pour sommets l'étoile et les pôles de l'écliptique à la date t_1 et à la date t a pour côtés

$$90° - \beta,\quad 90 - \beta_1,\quad \pi$$

et pour angles

$$90° + \lambda_1 - \Pi,\quad 90° - \lambda + \Pi + \psi',\quad \mathrm{E}.$$

On en conclut les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin\beta_1 \cos\pi - \cos\beta_1 \sin\pi \sin(\lambda_1 - \Pi), \\ \cos\beta \cos(\lambda - \Pi - \psi') &= \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \Pi), \\ \cos\beta \sin(\lambda - \Pi - \psi') &= \sin\beta_1 \sin\pi + \cos\beta_1 \cos\pi \sin(\lambda_1 - \Pi), \end{aligned}$$

qu'il convient d'écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\beta &= -\sin\beta_1 + q \cot\frac{\pi}{2} \cos\beta_1, \\ \cos\beta \cos(\lambda - \Pi - \psi') &= \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \Pi), \\ \cos\beta \sin(\lambda - \Pi - \psi') &= \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Pi) + q \cos\beta_1, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(2) \qquad q = \sin\pi \left[\operatorname{tang}\beta_1 - \sin(\lambda_1 - \Pi) \operatorname{tang}\frac{\pi}{2} \right];$$

on en déduit

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\beta \sin(\lambda - \lambda_1 - \psi') &= q \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - \Pi), \\ \cos\beta \cos(\lambda - \lambda_1 - \psi') &= \cos\beta_1 + q \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Pi), \end{aligned} \right.$$

$$(4) \qquad \operatorname{tang}(\lambda - \lambda_1 - \psi') = \frac{q \cos(\lambda_1 - \Pi)}{1 + q \sin(\lambda_1 - \Pi)};$$

Le sinus de $\lambda - \lambda_1 - \psi'$ a le signe du numérateur, et le cosinus celui du dénominateur, ce qui lève toute indétermination.

On déduit aussi des équations (3)

$$\cos\beta \cos\frac{\lambda - \lambda_1 - \psi'}{2} = \cos\beta_1 \cos\left(\frac{\lambda - \lambda_1 - \psi'}{2}\right) + q \cos\beta_1 \sin\left(\lambda_1 - \Pi + \frac{\lambda - \lambda_1 - \psi'}{2}\right),$$

d'où

$$\cos\beta = \cos\beta_1 + q \cos\beta_1 \frac{\sin\left(\lambda_1 - \Pi + \frac{\lambda - \lambda_1 - \psi'}{2}\right)}{\cos\frac{\lambda - \lambda_1 - \psi'}{2}},$$

ce qui donne

$$2 \sin\frac{\beta + \beta_1}{2} \sin\frac{\beta - \beta_1}{2} = -q \cos\beta_1 \frac{\sin\left(\lambda_1 - \Pi + \frac{\lambda - \lambda_1 - \psi'}{2}\right)}{\cos\frac{\lambda - \lambda_1 - \psi'}{2}}.$$

Or la première équation (1) équivaut à

$$2 \sin\frac{\beta + \beta_1}{2} \cos\frac{\beta - \beta_1}{2} = q \cot\frac{\pi}{2} \cos\beta_1.$$

De ces deux équations on conclut

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\frac{\beta-\beta_1}{2} = -\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\left(\lambda_1-\Pi+\frac{\lambda-\lambda_1-\psi'}{2}\right)}{\cos\frac{\lambda-\lambda_1-\psi'}{2}}.$$

Les équations (2), (4) et (5) résolvent le problème proposé.

62. Coordonnées équatoriales. — Par les permutations de lettres indiquées plus haut, on résout le même problème pour les coordonnées équatoriales par les formules suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} q' = \sin n\left[\operatorname{tang}\delta_1 - \sin(\alpha_1-P)\operatorname{tang}\frac{n}{2}\right], \\ \operatorname{tang}(\alpha-\alpha_1-m) = \dfrac{q'\cos(\alpha_1-P)}{1+q'\sin(\alpha_1-P)}, \\ \operatorname{tang}\dfrac{\delta-\delta_1}{2} = -\operatorname{tang}\dfrac{n}{2}\,\dfrac{\sin\left(\alpha_1-P+\frac{\alpha-\alpha_1-m}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha-\alpha_1-m}{2}}. \end{cases}$$

63. Cas d'astres voisins du pôle de l'écliptique ou du pôle de l'équateur. — Dans le voisinage du pôle de l'écliptique, $\lambda-\lambda_1$ peut cesser d'être petit, et, de même, $\alpha-\alpha_1$ dans le voisinage du pôle de l'équateur; mais cette circonstance est due à la présence du facteur $\cos\beta_1$ ou $\cos\delta_1$, suivant le cas, en dénominateur dans la tangente de $\lambda-\lambda_1-\psi'$ ou de $\alpha-\alpha_1-m$, de sorte que les produits $(\lambda-\lambda_1-\psi')\cos\beta_1$, $(\alpha-\alpha_1-m)\cos\delta_1$ restent toujours petits; il n'y a donc pas à se préoccuper de la diminution apparente de la précision (*voir* § 40).

64. Mode de calcul adopté dans le cas général. Précession annuelle. — Les termes du troisième ordre ne peuvent être sensibles que pour des intervalles de temps très considérables, et pour des étoiles très voisines du pôle, si l'on veut avoir pour ces étoiles une précision exceptionnelle. Le procédé suivant, applicable, dans d'autres circonstances, permet de tenir compte de ceux du second ordre, ou plutôt de les éliminer, en n'utilisant que les expressions de ceux du premier. Posons

$$\frac{1}{2}(t+t_1) = x,\qquad \frac{1}{2}(t-t_1) = y.$$

et soit $f(t)$ une coordonnée d'une étoile à la date t. On a

$$f(t_1) = f(x-y) = f(x) - yf'(x) + \frac{y^2}{1.2}f''(x)\ldots.$$

$$f(t) = f(x+y) = f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{1.2}f''(x)\ldots,$$

d'où

$$(7)\qquad f(t) - f(t_1) = 2yf'(x) = (t-t_1)f'\left(\frac{t+t_1}{2}\right).$$

Dans l'application de cette formule on ne néglige, en vérité, que les termes de troisième ordre.

On déduit immédiatement des formules (6)

$$\alpha - \alpha_1 = (m' + n' \operatorname{tang}\delta_1 \sin\alpha_1)(t-t_1) + A(t-t_1)^2 + B(t-t_1)^3,$$
$$\delta - \delta_1 = n'\cos\alpha_1(t-t_1) + A'(t-t_1)^2 + B'(t-t_1)^3,$$

formules dans lesquelles m' et n' représentent les coefficients de la première puissance de $t - t_1$ dans m et n.

On en conclut qu'à une date t_2,

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_2 = m'_2 + n'_2 \operatorname{tang}\delta_2 \sin\alpha_2,$$
$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_2 = n'_2 \cos\alpha_2.$$

Par suite, si m'_m et n'_m désignent les valeurs de m' et n' à la date moyenne entre t et t_1, on aura, par l'application de la formule (7),

$$\alpha - \alpha_1 = (t-t_1)(m'_m + n'_m \operatorname{tang}\delta_m \sin\alpha_m),$$
$$\delta - \delta_1 = (t-t_1)n'_m \cos\alpha_m.$$

On obtiendra les valeurs de α_m et de δ_m au moyen de valeurs approchées de la précession annuelle; on les tire ordinairement d'un Catalogue d'étoiles ou d'une table auxiliaire.

65. Cas où l'on connaît la variation de la précession annuelle. — A la date t_1, on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = m' + n' \operatorname{tang}\delta_1 \sin\alpha_1 + 2A(t-t_1) + 3B(t-t_1)^2,$$
$$\frac{d\delta}{dt} = n'\cos\alpha_1 + 2A'(t-t_1) + 3B'(t-t_1)^2.$$

On peut regarder $\frac{d\alpha}{dt}$ comme étant la précession annuelle; 2A en est alors la variation en un an; 200A en un siècle. 200A et 200A′ s'appellent *variations séculaires* de la précession en ascension droite et en déclinaison.

Les Catalogues d'étoiles donnent, pour le commencement d'une certaine année tropique, les coordonnées moyennes des étoiles qu'ils renferment. La plupart donnent en même temps les valeurs de la précession annuelle p_r à cette date; quelques-uns donnent aussi la variation séculaire s; quand cela a lieu, le calcul de la précession est des plus simples, si du moins on néglige les termes du troisième ordre; on a, en effet, pour la valeur de la précession annuelle à la date moyenne

$$p_r + \frac{t - t_1}{2}\,\frac{s}{100},$$

et pour le changement total de coordonnées,

$$(t - t_1)\left[p_r + \frac{(t - t_1)s}{200}\right].$$

Divers astronomes ont construit des Tables auxiliaires pour faciliter le calcul des termes du deuxième et du troisième ordre; nous n'y insisterons pas, observant que, si l'on n'a qu'un petit nombre de transformations à faire pour lesquelles les termes du troisième ordre soient sensibles, on peut toujours revenir aux formules rigoureuses.

Tout ce que nous venons de dire des coordonnées équatoriales s'applique aux coordonnées écliptiques; il suffit de faire les changements de notation indiqués plus haut.

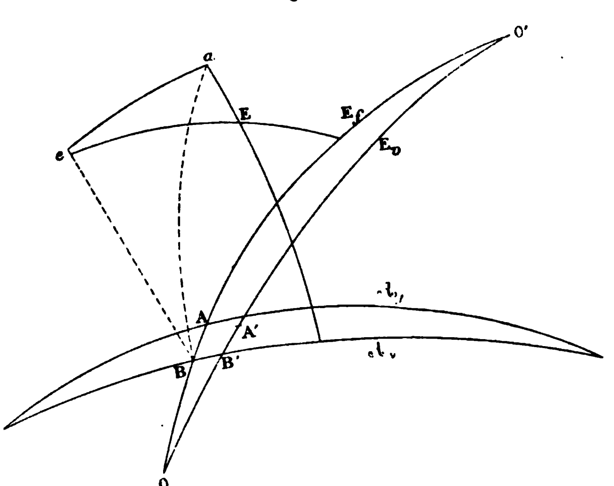
66. Détermination directe de la précession annuelle en ascension droite et en déclinaison. — La marche exposée, d'après M. Oppolzer, dans les paragraphes qui précèdent, a l'avantage de donner des formules rigoureuses applicables dans tous les cas. Il est possible de déduire directement des formules du § 56 les valeurs de la précession annuelle en ascension droite et en déclinaison, et d'obtenir immédiatement ainsi les formules du § 64 qui sont le plus ordinairement employées dans la pratique de l'Astronomie.

Désignons par L et B la longitude et la latitude de l'étoile par rapport à l'écliptique fixe, par α et δ l'ascension droite et la déclinaison par rapport à l'équateur variable et considérons le triangle sphérique (*fig.* 16) qui a pour sommets : le pôle e de l'écliptique fixe E_f relatif à 1850,0, le pôle a, de l'équateur variable $\mathcal{A}_v$ et l'étoile E. Les côtés de ce triangle sont

$$ae = \varepsilon_0, \qquad eE = 90^\circ - B, \qquad aE = 90^\circ - \delta,$$

et, l'arc de grand cercle aB étant perpendiculaire à $\mathcal{A}_v$, et le

Fig. 16.



point B étant le pôle de ea, les angles opposés sont respectivement

$$E, \quad 90^\circ + \alpha + \lambda_0, \quad 90^\circ - L - \psi_0.$$

On a donc entre ces éléments les relations

$$\sin B = \cos\varepsilon_0 \sin\delta - \sin\varepsilon_0 \cos\delta \sin(\alpha + \lambda_0),$$
$$\cos B \cos(L + \psi_0) = \cos\delta \cos(\alpha + \lambda),$$
$$\cos B \sin(L + \psi_0) = \cos\varepsilon_0 \sin\delta + \sin\varepsilon_0 \cos\delta \sin(\alpha + \lambda_0).$$

Dans ces formules, L et B sont des constantes et toutes les autres quantités des fonctions du temps. Ces formules, au reste, ne sont pas distinctes et se réduisent à deux.

Si on les différentie, qu'on multiplie respectivement les trois

équations ainsi obtenues par les coefficients de $\frac{d\alpha}{dt}$ dans ces mêmes équations et qu'on les additionne membre à membre, $\frac{d\delta}{dt}$ disparaîtra et l'équation obtenue donnera $\frac{d\alpha}{dt}$. On trouvera $\frac{d\delta}{dt}$ en éliminant $\frac{d\alpha}{dt}$ entre les deux équations différentielles extrêmes. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} = &-\frac{d\lambda_0}{dt} + \cos\varepsilon_0 \frac{d\psi_0}{dt}\\ &+ \tang\delta \frac{d\psi_0}{dt}\left[\sin\varepsilon_0 \sin(\alpha+\lambda_0) - \cos(\alpha+\lambda_0)\frac{d\varepsilon_0}{d\psi_0}\right],\\ \frac{d\delta}{dt} = &\sin\varepsilon_0 \frac{d\psi_0}{dt}\left[\cos(\alpha+\lambda_0) + \sin(\alpha+\lambda_0)\frac{d\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0\, d\psi_0}\right].\end{aligned}$$

Le quotient $\frac{d\varepsilon_0}{d\psi_0}$ au bout d'un siècle n'atteint pas $\frac{1}{30000}$, son carré est entièrement négligeable. Si on le néglige, les formules précédentes peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{d\lambda_0}{dt} + \cos\varepsilon_0 \frac{d\psi_0}{dt} + \tang\delta \sin\varepsilon_0 \sin\left(\alpha + \lambda_0 - \frac{d\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0\, d\psi_0}\right)\frac{d\psi_0}{dt},\\ \frac{d\delta}{dt} &= \frac{d\psi_0}{dt} \sin\varepsilon_0 \cos\left(\alpha+\lambda_0 - \frac{d\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0\, d\psi_0}\right).\end{aligned}$$

Or, les formules du n° 56 donnent sensiblement

$$\lambda_0 - \frac{d\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0\, d\psi_0} = 0.$$

On a donc

$$\frac{d\alpha}{dt} = m' + n' \tang\delta \sin\alpha,$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n' \cos\alpha,$$

en posant

$$m' = -\frac{d\lambda_0}{dt} + \cos\varepsilon_0 \frac{d\psi_0}{dt}, \qquad n' = \sin\varepsilon_0 \frac{d\psi_0}{dt}.$$

Si l'on prend pour ψ_0, λ_0, ε_0 les valeurs données au § 56 l'application de ces formules donne précisément pour m' et n' les dérivées des valeurs données au § 59 pour m et n, où l'on aura fait $t_1 = 0$. Nous retrouvons donc exactement les résultats donnés au paragraphe précédent.

67. Influence de la nutation. Passage des coordonnées moyennes aux coordonnées vraies. — Ayant les coordonnées moyennes d'un astre à une date t, on en conclut les coordonnées vraies en appliquant la nutation, c'est-à-dire en tenant compte des termes périodiques Ψ et E de ψ et ε. Ces termes ne déplaçant que l'équateur *sont sans influence sur la latitude et augmentent la longitude de* Ψ.

S'il s'agit des coordonnées équatoriales, on observera qu'elles se déduisent des coordonnées écliptiques par les formules

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha\cos\delta &= \cos\lambda\cos\beta, \\ \sin\alpha\cos\delta &= -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda, \\ \sin\delta &= \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda. \end{aligned}\right.$$

Nous devons calculer les variations que subissent α et δ quand, β restant constant, λ s'accroît de Ψ et ε de E.

On aura

$$d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\Psi + \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}E,$$

$$d\delta = \frac{\partial\delta}{\partial\lambda}\Psi + \frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon}E.$$

On déduit des équations (5)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} = \cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial\lambda} = \cos\alpha\sin\varepsilon,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} = -\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon} = \sin\alpha.$$

On en conclut pour la nutation en ascension droite et en déclinaison

$$d\alpha = \Psi\cos\varepsilon + \mathrm{tang}\,\delta(\Psi\sin\alpha\sin\varepsilon - E\cos\alpha),$$
$$d\delta = \Psi\sin\varepsilon\cos\alpha + E\sin\alpha.$$

68. Ayant les coordonnées moyennes d'un astre au commencement d'une année tropique, trouver les coordonnées vraies à une date quelconque de cette année. — Dans la pratique on a à passer des coordonnées moyennes relatives au commencement d'une année tropique aux coordonnées vraies relatives à une date quelconque de cette même année. Soit τ l'intervalle de temps en fraction d'année tropique.

On applique d'abord la précession par les formules

$$d\alpha_1 = \tau(m + n \sin\alpha \operatorname{tang}\delta),$$
$$d\delta_1 = \tau n \cos\alpha,$$

où α et δ désignent les coordonnées moyennes relatives au commencement de l'année, puis la nutation par les formules ci-dessus. On en conclut pour la réduction totale

$$d\alpha = m\tau + \cos\varepsilon\, d\psi + \sin\alpha \operatorname{tang}\delta(n\tau + \sin\varepsilon\, d\psi) - \cos\alpha \operatorname{tang}\delta\, d\varepsilon,$$
$$d\delta = (n\tau + \sin\varepsilon\, d\psi)\cos\alpha + d\varepsilon \sin\alpha.$$

On a coutume de poser, d'après Bessel,

$$f = m\tau + \cos\varepsilon\, d\psi,$$
$$g\cos G = n\tau + \sin\varepsilon\, d\psi,$$
$$g\sin G = -d\varepsilon,$$

et l'on a

$$d\alpha = f + g\sin(G + \alpha)\operatorname{tang}\delta,$$
$$d\delta = g\cos(G + \alpha).$$

Les quantités f, g, G sont données, de jour en jour, dans les éphémérides astronomiques.

Si l'on veut faire la réduction inverse, on applique la même formule en signe contraire en mettant pour α et δ les coordonnées vraies; il n'en résulte pas d'erreur sensible.

69. **Influence de la précession sur les éléments qui déterminent la position d'un grand cercle.** — Dans la pratique, les plans des orbites des corps du système solaire sont rapportés aux plans fondamentaux moyens du commencement d'une année tropique. On peut avoir besoin de les rapporter à ceux du commencement d'une autre année.

Soient PP′ le plan dont il s'agit (*fig.* 17), OAO′ l'écliptique moyen, CAC′ l'équateur moyen à la date t_0, OB′O′, CB′C′ les mêmes plans à la date t.

Désignons par ω l'arc $\Omega\Omega_0$, par ω' l'an $\Omega'\Omega'_0$, par Ω_0 la longitude AΩ_0 du nœud sur l'équateur à la date t_0, par Ω la longitude B′Ω du nœud sur l'équateur à la date t. Le triangle O′$\Omega\Omega_0$ a pour côtés

$$\Pi - \Omega_0,\quad \Pi + \psi' - \Omega,\quad \omega$$

et pour angles opposés

$$i,\quad 180^\circ - i_0,\quad \pi.$$

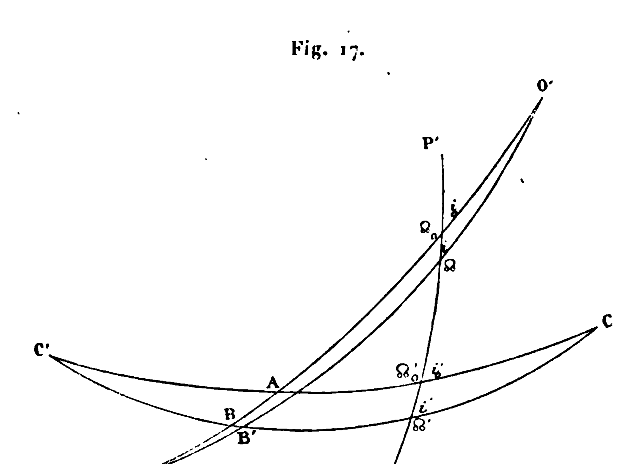
De même pour les coordonnées équatoriales, le triangle $C\Omega'_0\Omega'$ a pour côtés

$$P - \Omega'_0, \quad P + m - \Omega', \quad \omega'$$

et pour angles opposés

$$i', \quad 180^\circ - i'_0, \quad n.$$

Fig. 17.



La résolution de ces triangles donnera les quantités inconnues.

Nous allons développer les formules relatives à l'écliptique; il est manifeste qu'une simple permutation de lettres donnera celles qui se rapportent à l'équateur. Les analogies de Néper donnent

$$\tang\frac{1}{2}(\Omega - \Pi - \psi' + \omega) = \frac{\cos\frac{1}{2}(i_0 + \pi)}{\cos\frac{1}{2}(i_0 - \pi)}\tang\frac{1}{2}(\Omega_0 - \Pi),$$

$$\tang\frac{1}{2}(\Omega - \Pi - \psi' - \omega) = \frac{\sin\frac{1}{2}(i_0 + \pi)}{\sin\frac{1}{2}(i_0 - \pi)}\tang\frac{1}{2}(\Omega_0 - \Pi),$$

$$\tang\frac{1}{2}(i - i_0) = -\frac{\cos\frac{1}{2}(\Omega_0 + \Omega - 2\Pi - \psi')}{\cos\frac{1}{2}(\Omega_0 - \Omega + \psi')}\tang\frac{\pi}{2}.$$

Cette dernière formule est toute préparée pour le calcul de $i - i_0$ quand on a déduit Ω des deux premières. Celles-ci sont de la forme

$$\tan y = h \tan x,$$

d'où l'on tire, en posant $\frac{h-1}{h+1} = k$,

$$y - x = k \sin 2x + \frac{k^2}{2} \sin 4x + \frac{k^3}{3} \sin 6x.$$

Pour la première formule la valeur de k est

$$-\tan\frac{i_0}{2}\tan\frac{\pi}{2},$$

pour la deuxième elle est

$$\cot\frac{i_0}{2}\tan\frac{\pi}{2};$$

nous les représenterons par u et v : nous aurons donc

$$\frac{1}{2}(\Omega - \Pi - \psi' + \omega) - \frac{1}{2}(\Omega_0 - \Pi)$$
$$= u \sin(\Omega_0 - \Pi) + \frac{u^2}{2} \sin 2(\Omega_0 - \Pi) + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}(\Omega - \Pi - \psi' - \omega) - \frac{1}{2}(\Omega_0 - \Pi)$$
$$= v \sin(\Omega_0 - \Pi) + \frac{v^2}{2} \sin 2(\Omega_0 - \Pi) + \ldots.$$

Les seconds membres doivent être exprimés en secondes d'arc, et pour cela divisés par le rapport de l'arc de $1''$ au rayon.

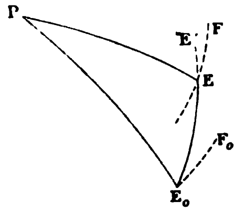
Par addition et soustraction on aura Ω et ω.

Dans la plupart des cas les termes du second ordre sont négligeables.

70. **Définition des mouvements propres d'une étoile en ascension droite et en déclinaison à une date donnée.** — Si, après avoir ramené à un même équinoxe les positions moyennes d'une étoile à diverses dates, on constate des variations, on essaye de les expliquer par un mouvement propre de cette étoile. Dans l'état actuel

de l'Astronomie, *on peut toujours regarder ce mouvement comme s'effectuant sur un grand cercle de la sphère céleste, et uniformément.* Soient, à une date donnée t_0, M (*fig.* 18) le

Fig. 18.



déplacement annuel de l'astre sur ce grand cercle, G_0 l'angle que fait ce déplacement E_0E avec le parallèle E_0F_0 mené par la position initiale, E_0F_0 étant dirigé vers l'est et l'angle F_0E_0E étant compté de 0 à 2π, vers le nord. Si μ_0 désigne la variation annuelle d'ascension droite et μ'_0 la variation annuelle de déclinaison, δ_0 cette déclinaison, on a

$$\mu_0 \cos\delta_0 = M\cos G_0, \qquad \mu'_0 = M\sin G_0.$$

μ_0 et μ'_0 sont les mouvements annuels en ascension droite et en déclinaison à l'époque t_0. Ces mouvements ne sont pas les mêmes à une autre époque t en raison du déplacement de l'équateur de la date t_0 à la date t.

71. Variation des coordonnées d'un astre résultant du mouvement propre. — *Connaissant à une date t_0 les mouvements propres μ_0 et μ'_0 d'une étoile et les coordonnées équatoriales α_0, δ_0 de cette étoile, trouver les coordonnées $\alpha_0+\Delta\alpha_0$, $\delta_0+\Delta\delta_0$ de la même étoile par rapport au même équateur et au même équinoxe à la date t.*

Soient P le pôle à l'époque t_0, E_0 la position de l'étoile à cette date, E la position de l'étoile à la date t, E_0F_0, EF les parallèles correspondants. Le triangle PE_0E a pour côtés

$$M(t-t_0), \quad 90^\circ-\delta_0, \quad 90^\circ-\delta_0-\Delta\delta_0,$$

et les angles opposés sont

$$\Delta\alpha_0,\quad 90^\circ + G,\quad 90^\circ - G_0,$$

G étant l'angle FEE′ analogue à G_0, à la date t.

Les calculs effectués au § 61 s'appliquent ici. Si l'on remplace π par $M(t-t_0)$, β_1 par δ_0, β par δ, $\lambda_1 - \Pi$ par $-G_0$, $-\lambda + \Pi + \psi'$ par G et q par r, les formules (2), (4), (5) de ce paragraphe deviennent

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} r &= \sin M(t-t_0)\left[\tang\delta_0 + \sin G_0 \tang\frac{M(t-t_0)}{2}\right],\\ \tang(G-G_0) &= \frac{-r\cos G_0}{1-r\cos G_0},\\ \tang\frac{\Delta\delta_0}{2} &= \frac{\sin\frac{G+G_0}{2}}{\cos\frac{G-G_0}{2}}\tang\frac{M(t-t_0)}{2}. \end{aligned}\right.$$

D'autre part les relations fondamentales entre les trois côtés et deux angles du triangle donnent de suite

$$(9)\qquad \tang\Delta\alpha_0 = \frac{\cos G_0 \sec\delta_0 \tang M(t-t_0)}{1-\sin G_0 \tang\delta_0 \tang M(t-t_0)}.$$

Si l'on développe $\Delta\alpha_0$ et $\Delta\delta_0$ suivant les puissances du temps, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_0 &= \mu_0(t-t_0) + \mu_0\mu'_0 \tang\ \delta_0(t-t_0)^2 + \ldots,\\ \Delta\delta_0 &= \mu'_0(t-t_0) - \tfrac{1}{4}\mu_0^2 \sin\ 2\delta_0(t-t_0)^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Les termes du second ordre sont, en fait, toujours négligeables dans l'état actuel de l'Astronomie.

Il s'ensuit que l'on passe immédiatement de μ_0 et μ'_0 à $\Delta\alpha_0$ et $\Delta\delta_0$ par ces formules

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_0 &= \mu_0(t-t_0),\\ \Delta\delta_0 &= \mu'_0(t-t_0). \end{aligned}$$

Si après cela on veut déduire les *coordonnées moyennes de l'étoile à la date t des coordonnées moyennes à la date* t_0, on appliquera la précession aux coordonnées $\alpha_0 + \Delta\alpha_0$, $\delta_0 + \Delta\delta_0$ pour les ramener à l'équinoxe relatif à la date t.

72. Ayant les coordonnées moyennes d'une étoile à deux dates, trouver le mouvement propre à l'une d'elles. — Si l'on connaît les

coordonnées moyennes α_0, δ_0, α, δ, aux dates t_0 et t, on obtiendra comme il suit le mouvement propre à la date t_0. On appliquera la précession aux coordonnées α, δ de façon à les ramener aux plans fondamentaux de la date t_0; si α', δ' sont les coordonnées ainsi obtenues, $\frac{\alpha'-\alpha_0}{t-t_0}$, $\frac{\delta'-\delta_0}{t-t_0}$ seront les mouvements propres en ascension droite et en déclinaison à la date t_0. En rapportant α_0, δ_0 aux plans fondamentaux de la date t, on aurait de même les mouvements propres à la date t. Il ne faudrait pas croire que ces valeurs puissent être confondues avec les premières.

On peut déduire les unes des autres comme il suit :

Les coordonnées α, δ et les coordonnées $\alpha_0+\Delta\alpha_0$, $\delta_0+\Delta\delta_0$ représentent un même point de la sphère par rapport aux plans fondamentaux de la date t et de la date t_0; ces quantités sont donc liées par des formules analogues aux premières du § 61, savoir

$$\begin{aligned}
\cos\delta\cos(\alpha-\mathrm{P}-m) &= \cos(\delta_0+\Delta\delta_0)\cos(\alpha_0+\Delta\alpha_0-\mathrm{P}),\\
\cos\delta\sin(\alpha-\mathrm{P}-m) &= \sin(\delta_0+\Delta\delta_0)\sin n\\
&\quad+\cos(\delta_0+\Delta\delta_0)\cos n\sin(\alpha_0+\Delta\alpha_0-\mathrm{P}),\\
\sin\delta &= \sin(\delta_0+\Delta\delta_0)\cos n\\
&\quad-\cos(\delta_0+\Delta\delta_0)\sin n\sin(\alpha_0+\Delta\alpha_0-\mathrm{P}).
\end{aligned}$$

Si l'on donne à α_0 et δ_0 des variations μ_0, μ'_0, il en résulte pour α, δ des variations μ, μ' que l'on obtient en différentiant ces équations. On trouve, après des transformations faciles

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
\mu &= \mu_0[\cos n-\sin\operatorname{tang}\delta\sin(\alpha-\mathrm{P}-m)]\\
&\quad+\mu'_0\frac{\sin n\cos(\alpha-\mathrm{P}-m)}{\cos\delta\cos(\delta_0+\Delta\delta_0)},\\
\mu' &= -\mu_0\sin n\cos(\alpha-\mathrm{P}-m)\\
&\quad+\mu'_0\frac{\cos\delta[\cos n-\operatorname{tang}\delta\sin n\sin(\alpha-\mathrm{P}-m)]}{\cos(\delta_0+\Delta\delta_0)}.
\end{aligned}\right.$$

73. **Application.** — Les nombres suivants donneront une idée des variations de coordonnées qui peuvent être dues au mouvement propre et des variations des mouvements propres annuels en ascension droite et en déclinaison qui résultent de la précession.

Les coordonnées moyennes de la polaire au commencement

de 1883 sont

$$\alpha_0 = 18^\circ 57' 58'',18, \qquad \delta_0 = 88^\circ 41' 5'',90.$$

Les mouvements propres annuels à la même date sont

$$\mu_0 = 1'',821, \qquad \mu'_0 = 0'',005.$$

En 1755 les coordonnées rapportées à l'équinoxe de 1883 sont $\alpha_0 + \Delta\alpha_0$ et $\delta_0 + \Delta\delta_0$ et l'on trouve par les formules (6)

$$\Delta\alpha_0 = -3'53'',06, \qquad \Delta\delta_0 = -0'',64.$$

Si l'on rapporte ces coordonnées $\alpha_0 + \Delta\alpha_0$, $\delta_0 + \Delta\delta_0$ à l'équinoxe de 1755, on trouve les coordonnées moyennes à cette date

$$\alpha = 10^\circ 55' 44'',75, \qquad \delta = 87^\circ 59' 41'',10.$$

Si d'autre part on rapporte à l'équinoxe de 1755 les coordonnées α_0, δ_0, elles deviennent

$$\alpha'_0 = 10^\circ 58' 14'',63, \qquad \delta'_0 = 87^\circ 59' 42'',32.$$

La comparaison des coordonnées α, δ, α'_0, δ'_0 montre que les mouvements propres en 1755 étaient

$$\mu = 1'',171, \qquad \mu' = 0'',010.$$

On voit que ces mouvements diffèrent notablement de μ_0 et μ'_0. On aurait pu trouver ces valeurs par l'application des formules (10).

CHAPITRE VI.

OBSERVATIONS DU SOLEIL. — ASCENSION DROITE ET DÉCLINAISON DE SON CENTRE. — DIAMÈTRE APPARENT, DISTANCE DU SOLEIL A LA TERRE. — L'ORBITE APPARENTE DU SOLEIL EST PLANE, ÉQUINOXES. — CETTE ORBITE EST UNE ELLIPSE : PÉRIGÉE, EXCENTRICITÉ. — POSITION DU SOLEIL A UN INSTANT DONNÉ; ANOMALIE VRAIE, EXCENTRIQUE; ÉQUATION DE KÉPLER, ANOMALIE MOYENNE. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE KÉPLER, MÉTHODE DE GAUSS. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES. — ÉQUATION DU CENTRE. — DURÉE DE LA RÉVOLUTION DU SOLEIL, ANNÉE SIDÉRALE, ANNÉE TROPIQUE. — JOUR MOYEN. — TRANSFORMATION DU TEMPS SIDÉRAL EN TEMPS MOYEN ET VICE VERSA. — ÉQUATION DU TEMPS. — CALENDRIER.

---

74. Premières apparences du mouvement du Soleil. — Il suffit d'observer le ciel à l'œil nu au moment du coucher ou du lever du Soleil, pour reconnaître que cet astre ne conserve pas une position invariable par rapport aux étoiles. Des étoiles qui, à une certaine date, se levaient immédiatement avant lui sont déjà, au bout de quelques jours, notablement au-dessus de l'horizon au moment de son lever. Des étoiles qui se couchaient après lui ne se voient plus, et le Soleil s'est visiblement rapproché d'astres qui se couchaient assez longtemps après lui. Ces apparences suffisent à montrer que le Soleil a par rapport aux étoiles un mouvement dirigé plus ou moins exactement vers l'est, et il fait sur la sphère une révolution complète dans un intervalle de temps voisin de l'année vulgaire. Pendant cette période, on le voit à son lever se rapprocher pendant six mois du point nord, et pendant les six mois suivants du point sud. Le Soleil a donc un mouvement propre en ascension droite et un mouvement propre en déclinaison. Nous étudierons dans le présent Chapitre les lois et les effets de ces mouvements.

75. Observations du Soleil. — Les formules données au Chapitre III, n° 42 de ce Volume, montrent qu'il est aisé d'obtenir l'ascension droite du Soleil au moment de son passage au

méridien pourvu que l'observation ait été faite à tous les fils de la lunette méridienne et que l'on ait observé les deux bords. L'ascension droite géocentrique est alors donnée par la formule

$$\alpha = t + c_p + \frac{\cos\delta - \rho \sin\varpi \cos\varphi'}{(1-\lambda)\cos\delta}(m + n \operatorname{tang}\delta' + c \operatorname{séc}\delta').$$

Dans cette formule, λ désigne le mouvement propre du Soleil en une seconde, ϖ la parallaxe du Soleil. Or cette parallaxe est très petite, et, en raison de la petitesse des constantes m, n, c, la formule se réduit à la formule ordinaire de Bessel applicable aux étoiles fixes

$$(1) \qquad \alpha = t + c_p + m + n \operatorname{tang}\delta' + c \operatorname{séc}\delta',$$

δ' étant la déclinaison observée.

En déclinaison, l'observation des deux bords supérieur et inférieur donne la déclinaison du centre. Il faudra seulement avoir soin de corriger séparément les deux observations de la réfraction avant de prendre la moyenne, la correction n'étant pas tout à fait la même pour les deux bords.

La déclinaison ainsi obtenue sera la déclinaison du centre du Soleil au moment du passage au méridien, vu de la position de l'observateur. Pour avoir la déclinaison géocentrique, il faut appliquer la correction de parallaxe, ce qui suppose la connaissance de la parallaxe horizontale équatoriale ϖ que nous apprendrons plus tard à déterminer et qui est comprise entre 8″,8 et 8″,9.

Nous nous bornerons à cet égard à constater que le jour d'un solstice le mouvement en déclinaison du Soleil n'est guère que de 0″,5 par heure, de sorte que la comparaison des déclinaisons de cet astre, mesurée le même jour en deux observatoires tels que ceux de Paris et du Cap de Bonne-Espérance, situés l'un dans l'hémisphère sud, l'autre dans l'hémisphère nord, et à peu près à la même longitude, donnerait une valeur déjà très approchée de cette parallaxe, valeur qui suffirait presque à déduire des observations des déclinaisons géocentriques du Soleil.

76. Premiers résultats de la comparaison des coordonnées géocentriques. — La comparaison des résultats obtenus montre

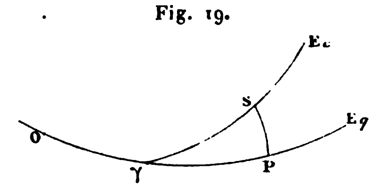
que l'ascension droite du Soleil, comptée d'un cercle horaire fixe, par exemple, du cercle horaire d'une étoile déterminée, augmente constamment d'environ 1° par jour sidéral. Pendant que l'ascension droite croît de 360°, la déclinaison oscille sensiblement entre — 23°,5 et + 23°,5.

On peut représenter graphiquement les positions géocentriques sur une sphère dont un grand cercle arbitraire représenterait l'équateur céleste, les pôles de ce grand cercle les pôles du monde, et un demi grand cercle arbitraire allant d'un pôle à l'autre, le cercle horaire servant d'origine aux ascensions droites. Quand on exécute cette représentation graphique, on constate que toutes les positions paraissent appartenir à un grand cercle incliné de 23°,5 sur l'équateur.

77. Détermination des équinoxes et de l'obliquité de l'écliptique. — La Trigonométrie sphérique permet de vérifier plus exactement qu'il en est ainsi et de déterminer la position de ce grand cercle qui a reçu le nom d'*écliptique*.

Soient sur la sphère (*fig.* 19) E_q l'équateur, γE_c l'écliptique,

Fig. 19.



O l'origine des ascensions droites, a l'ascension droite $O\gamma$ du nœud ascendant de l'écliptique, point qui s'appelle aussi *équinoxe du printemps,* ou *point vernal;* ε l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire l'angle de l'écliptique avec l'équateur; S une position du Soleil; SP le cercle de déclinaison correspondant; A et D l'ascension droite OP et la déclinaison PS. Le triangle sphérique rectangle γPS donne la relation

$$\tan D = \sin(A - a) \tan \varepsilon. \tag{2}$$

Si A′ et D′ sont les coordonnées du Soleil dans une autre position, on a aussi

$$\tan D' = \sin(A' - a) \tan \varepsilon.$$

Ces deux équations permettent de calculer a et ε; s'il s'agissait de les résoudre pour des valeurs quelconques des données, on aurait, en les combinant par addition et soustraction,

$$2\tang\varepsilon\sin\left(\frac{A'+A}{2}-a\right)\cos\frac{A'-A}{2}=\frac{\sin(D'+D)}{\cos D'\cos D},$$

$$2\tang\varepsilon\cos\left(\frac{A'+A}{2}-a\right)\sin\frac{A'-A}{2}=\frac{\sin(D'-D)}{\cos D'\cos D},$$

d'où l'on déduirait sans peine $\frac{A'+A}{2}-a$ et ε par des formules calculables par logarithmes.

On trouve

$$\tang\left(\frac{A'+A}{2}-a\right)=\tang\frac{A'-A}{2}\frac{\sin(D'+D)}{\sin(D'-D)}.$$

Si l'on désigne par δa la variation que subit a pour des variations δA, $\delta A'$, δD, $\delta D'$ de A, A', D, D', on a

$$\frac{\delta\left(\frac{A+A'}{2}-a\right)}{\frac{1}{2}\sin(A'+A-2a)}=\frac{\delta\frac{A'-A}{2}}{\frac{1}{2}\sin(A'-A)}+\frac{\delta(D'+D)}{\tang(D'+D)}-\frac{\delta(D'-D)}{\tang(D'-D)}.$$

Si D est petit et D' voisin de son maximum, ce qui arrive si la première observation est faite dans le voisinage de l'équinoxe et la seconde du solstice, A est voisin de a et A' de $a+90°$, et l'on a

$$\delta\left(\frac{A+A'}{2}-a\right)=\delta\left(\frac{A'-A}{2}\right)+\frac{\delta D}{\tang D'},$$

d'où

$$\delta a=\delta A-\frac{2\delta D}{\tang D'}.$$

Si une troisième observation est faite à la même déclinaison D, près de l'équinoxe suivant, à une ascension droite A_1-a supplémentaire de $A-a$, et qu'on la combine avec la seconde, on aura

$$\delta\left(\frac{A_1+A'}{2}-a\right)=\delta\frac{A'-A_1}{2}-\frac{\delta' D}{\tang D'},$$

d'où

$$\delta a=\delta A_1+\frac{2\delta' D}{\tang D'}.$$

La moyenne des deux déterminations comportera une incer-

titude donnée par la formule

$$\delta a = \frac{1}{2}(\delta A + \delta A_1) + \frac{2(\delta' D - \delta D)}{\tang D'}.$$

Il y a lieu de remarquer que D ayant sensiblement la même valeur dans les deux observations extrêmes, les parties de δD et $\delta' D$ qui proviennent de la réfraction seront sensiblement égales; il en sera de même de celles qui proviennent de la graduation du cercle méridien employé.

Ayant a, on déterminera ε par la formule primitive

$$\tang \varepsilon = \frac{\tang D'}{\sin(A' - A)}.$$

On a

$$\frac{\delta \varepsilon}{\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon} = \frac{\delta D'}{\frac{1}{2}\sin 2D'} - \frac{\delta(A' - A)}{\tang(A' - A)}.$$

Le dernier terme est insensible puisque $A' - A$ est voisin de 90°, et comme on a sensiblement $\varepsilon = D'$, on en conclut

$$\delta\varepsilon = \delta D'.$$

Il est évident qu'il convient de faire concourir à la détermination de a et de ε un nombre aussi grand que possible d'observations faites dans le voisinage des équinoxes et des solstices.

Ayant déterminé ces quantités, on constatera que toutes les observations satisfont à l'équation (2) et que, par suite, *le Soleil paraît bien décrire une orbite située dans un plan passant par le centre de la Terre.*

78. Variation de la distance du Soleil à la Terre. — Nous avons vu, au Chapitre III, qu'avec une approximation toujours suffisante, la distance d'un astre au centre de la Terre est en raison inverse de son diamètre apparent. Si donc on prend les inverses des diamètres apparents mesurés, on aura des nombres q, q', ... proportionnels aux distances du Soleil au centre de la Terre aux époques des diverses observations. On reconnaît que ces distances croissent depuis une époque postérieure au solstice d'hiver jusqu'au milieu de l'année et décroissent ensuite jusqu'à la valeur primitive.

79. Vitesse angulaire du Soleil. — Ayant la position du point vernal et l'obliquité de l'écliptique, il est aisé de déduire du triangle γSP (*fig.* 19) la longitude γS du Soleil donnée par une des formules

$$\operatorname{tang} l = \frac{\operatorname{tang}(A - a)}{\cos \varepsilon}, \qquad \cos l = \cos(A - a)\cos D, \qquad \sin l = \frac{\sin D}{\sin \varepsilon}.$$

Si l'on fait les quotients

$$\frac{l' - l}{t' - t}, \quad \frac{l'' - l'}{t'' - t'}, \quad \ldots,$$

on reconnaît qu'ils ne sont pas tout à fait constants.

Il s'ensuit que l n'est pas une fonction du premier degré de t. On constate que l'on peut, avec une approximation suffisante, représenter l par une fonction du second degré

$$l = b + ct + dt^2.$$

Ayant déduit des observations les valeurs de b, c, d, on a la vitesse angulaire du mouvement par la relation

$$\omega = \frac{dl}{dt} = c + 2\,dt.$$

Si l'on calcule ω par cette formule et que l'on rapproche les valeurs de ω de celles de q, on reconnaît que le produit

$$q^2\omega$$

est constant.

80. Loi des aires. — Si r désigne le rayon vecteur du Soleil et h une constante, on a

$$q = rt.$$

Donc $r^2\omega$ est constant. Il s'ensuit que *l'aire* $\frac{1}{2}r^2\omega\,dt$ *décrite dans un temps infiniment petit dt par le rayon vecteur mené de la Terre au centre du Soleil est proportionnelle au temps; il en est évidemment de même de l'aire décrite dans un temps fini.*

81. L'orbite du Soleil est une ellipse. — Si l'on représentait

sur un plan les directions du Soleil et que l'on portât sur ces directions des longueurs proportionnelles aux distances de cet astre à la Terre, on pourrait reconnaître que la trajectoire du Soleil ressemble beaucoup à une ellipse dont le Soleil occupe un foyer. Il est aisé de vérifier par les observations qu'il en est ainsi. En prenant pour axe polaire une direction quelconque, l'équation d'une ellipse est

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(v - \varpi)}, \tag{3}$$

où v désigne l'angle que fait le rayon vecteur avec l'axe polaire, ϖ l'angle analogue correspondant au point de l'ellipse le plus voisin de l'origine. Cette équation peut s'écrire

$$r + r\cos v . e\cos\varpi + r\sin v . e\sin\varpi - p = 0. \tag{4}$$

Chaque observation donne une équation de cette forme où l'on devra remplacer r par le nombre mesuré q. Ces équations sont du premier degré en $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, p. On les résoudra par la méthode des moindres carrés. En comptant ϖ de l'équinoxe moyen au 1er janvier 1850, on a à cette date

$$\varpi = 280^\circ 21' 40'',0, \qquad e = 0,01677046.$$

Nous poserons $p = a(1 - e)$. Ce qui précède laisse indéterminé le demi grand axe a qui ne peut être fourni directement par les observations du Soleil faites en un même lieu. Sa détermination dépend de celle de la parallaxe du Soleil qui peut être mesurée comme il a été dit au n° 75. Nous exposerons plus tard des méthodes qui permettent de le faire avec plus de précision. Quelle que soit cette parallaxe, nous prendrons le demi grand axe de l'orbite terrestre comme unité de longueur pour mesurer les distances des corps célestes.

82. Formules relatives au mouvement elliptique. — Soient (*fig.* 20) T le centre de la Terre, PSA l'ellipse décrite par le Soleil, P et A les extrémités de l'axe focal, PS'A le cercle circonscrit, O le centre commun du cercle et de l'ellipse.

Si l'on pose

$$l - \varpi = v,$$

v sera l'angle PTS que fait le rayon vecteur mené de la Terre au centre du Soleil avec la direction TP du point de l'orbite où le Soleil est le plus voisin de la Terre. Cet angle v a reçu le nom d'*anomalie vraie.*

Fig. 20.

Soient S une position quelconque du Soleil, S′ le point du cercle circonscrit qui a le point S pour projection quand on fait tourner le plan du cercle circonscrit autour de AP de telle manière que l'ellipse soit la projection du cercle. L'angle POS′ s'appelle *anomalie excentrique.*

En écrivant que OM = OT + TM et que le rapport de MS à MS′ est égal au rapport du petit axe de l'ellipse au grand, on obtient les relations

(5) $$r \cos v = a \cos u - ae,$$

(6) $$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin u.$$

On en conclut, en élevant au carré et additionnant,

$$r^2 = a^2(1 - e \cos u)^2,$$

d'où, en raison de ce que r est positif et e moindre que *un,*

(7) $$r = a(1 - e \cos u).$$

Combinant les relations (5) et (7) par addition et soustraction, on trouve

$$2r \cos^2 \frac{v}{2} = 2a(1 - e) \cos^2 \frac{u}{2},$$

$$2r \sin^2 \frac{v}{2} = 2a(1 + e) \sin^2 \frac{u}{2}$$

ou

(6)
$$\left\{\begin{aligned}\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{v}{2} &= \sqrt{1-e}\cos\frac{u}{2},\\ \sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{v}{2} &= \sqrt{1+e}\sin\frac{u}{2},\end{aligned}\right.$$

d'où

(7)
$$\tang\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{u}{2}$$

et

(8)
$$\left\{\begin{aligned}\sin\frac{v-u}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{r}}\left(\sqrt{1+e}-\sqrt{1-e}\right)\sin u\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e}}-\frac{1}{\sqrt{1+e}}\right)\sin v,\\ \sin\frac{v+u}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{r}}\left(\sqrt{1+e}+\sqrt{1-e}\right)\sin u\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e}}+\frac{1}{\sqrt{1+e}}\right)\sin v,\end{aligned}\right.$$

On pose fréquemment

$$e = \sin\varphi,$$

et c'est même ainsi que l'on donne en général l'excentricité d'une orbite elliptique : on fait connaître φ en degrés, minutes et secondes. On a alors

(9)
$$\left\{\begin{aligned}\sqrt{1+e} &= \sqrt{\sin 90^\circ+\sin\varphi} = \sqrt{2\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)}\\ &= \sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right),\\ \sqrt{1-e} &= \sqrt{\sin 90^\circ-\sin\varphi} = \sqrt{2\cos\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)}\\ &= \sqrt{2}\cos\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right),\\ \sqrt{1-e^2} &= \cos\varphi,\\ \sqrt{1+e}-\sqrt{1-e} &= 2\sqrt{2}\sin 45^\circ\sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2},\\ \sqrt{1+e}+\sqrt{1-e} &= 2\sqrt{2}\cos 45^\circ\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}\right.$$

En réunissant tous ces résultats on forme le Tableau suivant :

(10)

I..... $p = a(1 - e^2) = a\cos^2\varphi,$

II.... $r = \dfrac{p}{1 + e\cos v},$

III... $r = a(1 - e\cos u),$

IV.... $\cos u = \dfrac{\cos v + e}{1 + e\cos v}, \qquad \cos v = \dfrac{\cos u - e}{1 - e\cos u},$

V..... $\sqrt{\dfrac{r}{a}}\cos\dfrac{v}{2} = \sqrt{1 - e}\cos\dfrac{u}{2},$

VI.... $\sqrt{\dfrac{r}{a}}\sin\dfrac{v}{2} = \sqrt{1 + e}\sin\dfrac{u}{2},$

VII... $\tang\dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tang\dfrac{u}{2} = \tang\left(45^\circ + \dfrac{\varphi}{2}\right)\tang\dfrac{u}{2},$

VIII.. $r\sin v = a\cos\varphi\sin u,$

IX... $\begin{cases} r\cos v = a(\cos u - e) \\ \qquad = 2a\cos\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\varphi}{2} + 45^\circ\right)\cos\left(\dfrac{u}{2} - \dfrac{\varphi}{2} - 45^\circ\right), \end{cases}$

X.... $\sin\dfrac{v - u}{2} = \sqrt{\dfrac{a}{r}}\sin\dfrac{\varphi}{2}\sin u = \sqrt{\dfrac{r}{p}}\sin\dfrac{\varphi}{2}\sin v,$

XI.... $\sin\dfrac{v + u}{2} = \sqrt{\dfrac{a}{r}}\cos\dfrac{\varphi}{2}\sin u = \sqrt{\dfrac{r}{p}}\cos\dfrac{\varphi}{2}\sin v,$

83. Relation entre l'anomalie excentrique et le temps. — Nous avons dit que l'aire décrite par le rayon vecteur mené de la Terre au centre du Soleil est proportionnelle au temps employé à la décrire. Cette aire a pour élément différentiel $\frac{1}{2}r^2\,dv$. Si donc on désigne par h une constante convenablement choisie, on a la relation

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\int_0^v r^2\,dv = h(t - t_0),$$

t_0 représentant la date à laquelle v est nul, c'est-à-dire l'instant du passage du Soleil au point P de son orbite le plus voisin de la Terre.

L'intégrale qui figure au premier membre de l'équation (11) s'obtient sans peine en fonction de l'anomalie excentrique.

Si, en effet, l'on différentie l'équation VII du Tableau (10), on a

$$(12) \qquad \frac{dv}{\cos^2 \frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{du}{\cos^2 \frac{u}{2}},$$

qui, en tenant compte de l'équation (5), devient

$$r\,dv = a\sqrt{1-e^2}\,du,$$

de sorte que

$$\frac{1}{2}\int_0^v r^2\,dv = \frac{a^2}{2}\sqrt{1-e^2}\int_0^u (1-e\cos u)\,du = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2}(u - e\sin u),$$

attendu que u s'annule en même temps que v.

L'équation (11) devient ainsi

$$(13) \qquad u - e\sin u = \frac{2h}{a^2\sqrt{1-e^2}}(t-t_0).$$

Le second membre a reçu le nom d'*anomalie moyenne*. Cet angle croît en même temps que u et v, augmente de 2π en même temps que u et v, mais varie proportionnellement au temps. Cette équation (13) est connue sous le nom d'*équation de Képler*.

La constante $\frac{2h}{a^2\sqrt{1-e^2}}$ s'appelle *moyen mouvement;* nous la représenterons par la lettre n. La durée de la révolution T est égale à $\frac{2\pi}{n}$.

84. Résolution de l'équation de Képler. — Quand on connait l'anomalie moyenne à une époque quelconque, on en conclut l'anomalie excentrique en résolvant l'équation

$$(14) \qquad u - e\sin u = \mathrm{M}.$$

La résolution de cette équation peut être faite par différentes méthodes. Nous exposerons d'abord, à cause de son élégance et de sa rapidité, la méthode de Gauss.

On voit de suite que la dérivée de $u - e\sin u$ est toujours positive. Cette fonction est donc toujours croissante; elle varie entre $-\infty$ et $+\infty$. L'équation a donc une racine unique.

Soit u_0 une valeur approchée de u, x la partie complémentaire

$u - u_0$. Supposons u_0 et x exprimés en secondes; prenons dans une table $\log \sin u_0$ et la variation λ de $\log \sin u_0$ pour une variation de $1''$ de u_0; concluons en $\log e'' \sin u_0$ et cherchons la variation μ de ce dernier logarithme pour une variation de une unité dans le nombre $e'' \sin u_0$.

Nous prendrons dans tous les cas λ et μ positivement sans nous préoccuper de leurs signes.

On a, en regardant la variation d'un nombre comme proportionnelle à celle de son logarithme et celle d'un arc comme proportionnelle à celle du logarithme de son sinus

$$\frac{e'' \sin(u_0 + x) - e'' \sin u_0}{1} = \frac{\log e'' \sin(u_0 + x) - \log e'' \sin u_0}{\mu}$$
$$= \frac{\log \sin(u_0 + x) - \log \sin u_0}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\log \sin(u_0 + x) - \log \sin u_0}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{x}{1}.$$

Seulement, si l'on ne s'est préoccupé que des valeurs absolues des quantités, on remarquera que, dans le premier et le quatrième quadrant, le premier membre augmente avec x; dans les deux autres, il diminue. Donc

$$e'' \sin(u_0 + x) - e'' \sin u_0 = \pm \frac{\lambda}{\mu} x,$$

en prenant le signe supérieur dans le premier et le quatrième quadrant, le signe inférieur dans les deux autres. Or on a ainsi

$$u_0 + x - e'' \sin(u_0 + x) = \mathrm{M},$$
$$u_0 + x - \mathrm{M} - e'' \sin u_0 = \pm \frac{\lambda}{\mu} x,$$

d'où

$$x\left(1 \mp \frac{\lambda}{\mu}\right) = e'' \sin u_0 + \mathrm{M} - u_0$$
$$= (\mathrm{M} - u_0 + e'' \sin u_0)\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \mp \frac{\lambda}{\mu}(\mathrm{M} - u_0 + e'' \sin u_0)$$

et

$$(15) \qquad u = u_0 + x = \mathrm{M} + e'' \sin u_0 \pm \frac{\lambda}{\mu \mp \lambda}(\mathrm{M} - u_0 + e'' \sin u_0).$$

85. Application numérique. — Pour éclaircir cette méthode, appliquons-la, avec Gauss, à l'exemple suivant :

Posant

$$e = \sin \varphi,$$

supposons

$$\varphi = 14°12'\ 1'',87,$$
$$M = 332°28'54'',77.$$

La valeur de φ donne

$$\log e'' = 4,7041513.$$

Dans la formule (15) on devra prendre les signes supérieurs. Un calcul rapide, sur lequel il est inutile d'insister, de

$$M + e'' \sin M$$

conduit à prendre

$$u_0 = 326°.$$

Nous donnons ci-dessous la disposition du calcul que nécessite l'application de la méthode de Gauss :

	Première approximation.	Deuxième approximation.	Troisième approximation.
λ	0,32	29,25	»
μ	1,60	147	»
$\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$	$\frac{32}{128}$	$\frac{29,25}{117,75}$	»
$\log \sin u_0$	$\bar{1}$,74756n	$\bar{1}$,7663058n	$\bar{1}$,7663366n
$\log e'' \sin u_0$	4,45171	4,4704571	4879
$e'' \sin u_0$	— 28295″ — 7°51′35″	— 29543″,17 — 8°12′23″,17	— 29543″,27 — 25″,27
$M + e'' \sin u_0 - u_0$	— 1°22′41″	— 8″,40	— 0″,01
$\frac{\lambda}{\mu-\lambda}(M + e'' \sin u_0 - u_0)$	— 20′40″	— 2″,09	»
$M + e'' \sin u_0$	324°37′20″	324°16′31″,60	29″,50
u_1	324°16′40″	324°16′29″,51	324°16′29″,50

On voit combien chaque approximation est rapide et combien les résultats convergent rapidement.

L'erreur primitive sur u_0 étant

$$1°43'31'' = 6211'',$$

l'erreur sur u_1 est

$$11'',$$

l'erreur sur u_2 est

$$< 0'',01,$$

et cependant la valeur de l'excentricité e est assez forte.

86. Comparaison de la méthode de résolution de Gauss à la méthode ordinaire de Newton. — La méthode de Gauss, que nous venons d'exposer, ne diffère pas essentiellement de celle de Newton,

puisque l'une et l'autre reviennent à négliger, dans un développement en série, les termes du second ordre. Mais les calculs numériques qu'entraîne la méthode de Newton sont environ deux fois plus longs. On en jugera aisément par le Tableau ci-dessous des calculs qu'elle nécessite :

Posant

$$u = u_0 + x,$$

la méthode de Newton revient à prendre

$$x = -\frac{u_0 - e'' \sin u_0 - M}{1 - e \cos u_0}.$$

On a

$$\log e = \bar{1},3897262.$$

u_0	326°	324° 16′ 14″	324° 16′ 29″,51
$\log \sin u_0$	$\bar{1}$,74756*n*	$\bar{1}$,7663820*n*	$\bar{1}$,7663366*n*
$\log e'' \sin u_0$	4,45171*n*	4,4705333*n*	4,4704879*n*
$e'' \sin u_0$	— 28295″	— 29548″,35	— 29545″,27
	— 7° 51′ 35″	— 8° 12′ 28″,35	— 8° 12′ 25″,27
$u_0 - M$	— 6° 28′ 55″	— 8° 12′ 40″,77	— 8° 12′ 25″,26
$\log \cos u_0$	$\bar{1}$,91857	$\bar{1}$,9094402	»
$\log e \cos u_0$	$\bar{1}$,30830	$\bar{1}$,2991664	»
$e \cos u_0$	0,20338	0,19914	»
$1 - e \cos u_0$	0,79662	0,80086	»
$u_0 - M - e'' \sin u_0$	1° 22′ 40″	— 12″,42	0″,01
	4960″	»	»
$\log(u_0 - M - e'' \sin u_0)$	3,69548	1,09412*n*	»
$\log(1 - e \cos u_0)$	$\bar{1}$,90125	$\bar{1}$,90356	»
$\log(-x)$	3,79423	1,19056*n*	»
x	— 6226″	15″,51	— 0″,01
	— 1° 43′ 46″	»	»
$u_0 + x$	324° 16′ 14″	324° 16′ 29″,51	324° 16′ 29″,50

87. Résolution de l'équation de Képler par la formule de Lagrange. — La formule de Lagrange a pour but le développement d'une racine z de l'équation

$$z - \alpha\varphi(x + z) = 0, \tag{16}$$

ou plus généralement d'une fonction de cette racine, suivant les puissances de α. Les conditions d'application de cette formule, telles qu'elles ont été énoncées par M. Rouché, sont les suivantes :

Si la constante α est telle que le module maximum de

$$\frac{\alpha\varphi(x + z)}{z} \tag{17}$$

soit moindre que l'unité pour un module ρ de z inférieur à celui pour lequel la fonction $\varphi(x+z)$ cesse d'être bien déterminée, finie et continue, l'équation (16) aura une racine dont le module sera moindre que ρ, et n'en aura qu'une.

Désignant par z_1 cette racine, par $F(x+z)$ une fonction bien déterminée, finie et continue pour les valeurs de z dont le module ne dépasse pas ρ, la fonction $F(x+z_1)$ est développable en série convergente par la formule

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x+z_1) = F(x) + \frac{\alpha}{1}F'(x)\varphi(x) \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d}{dx}[F'(x)\varphi(x)^2] + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{d^2}{dx^2}[F'(x)\varphi(x)^3] + \ldots \end{aligned}\right.$$

Cela étant, l'équation de Képler, si l'on y représente l'excentricité par α, l'anomalie moyenne par x et que l'on pose $u - x = z$, devient

$$z = \alpha \sin(x+z).$$

La fonction $\sin(x+z)$ est bien déterminée, finie et continue pour toute valeur de z. Pour un module ρ de z, le module maximum de

$$\frac{\alpha \sin(x+z)}{z}$$

a lieu en même temps que celui de $\sin(x+z)$; on montrera au paragraphe suivant qu'il est égal à

$$\alpha \frac{e^\rho + e^{-\rho}}{2\rho},$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

Si donc

$$\alpha < \frac{2\rho}{e^\rho + e^{-\rho}},$$

l'équation (16) admet dans le cercle de rayon ρ une racine unique, développable en série par la formule (18) où l'on aura remplacé $F(x+z)$ par $x+z$, ce qui donne

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &u = x + z_1 = x + \frac{\alpha}{1}\sin x \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d}{dx}(\sin^2 x) + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{d^2}{dx^2}(\sin^3 x) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Ce développement s'applique donc à toute valeur de α qui ne dépasse pas le minimum de

$$\frac{2\rho}{e^\rho + e^{-\rho}},$$

minimum qui a lieu pour

$$\frac{e^\rho + e^{-\rho}}{2\rho} = \frac{e^\rho - e^{-\rho}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}},$$

équation qui peut s'écrire encore

$$(20) \qquad 2\rho - \log\frac{\rho+1}{\rho-1} = 0.$$

On reconnaît aisément que l'équation (20) n'a qu'une racine positive comprise entre un et deux et on la trouve égale à $1,19967864$, d'où $\sqrt{\rho^2 - 1} = 0,6627434$, ce qui est la plus grande valeur de l'excentricité pour laquelle l'anomalie excentrique puisse être développée en série par la formule (19).

88. Module maximum de $\sin(x+z)$, où x désigne un nombre réel. — Posons

$$z = \rho e^{\theta i}.$$

Nous aurons

$$\sin(x+z) = \sin(x + \rho e^{\theta i}).$$

Le nombre conjugué est

$$\sin(x + \rho e^{-\theta i}).$$

Le carré du module est le produit des nombres conjugués. Il est donc égal à

$$\sin(x + \rho e^{\theta i}) \sin(x + \rho e^{-\theta i}),$$

ou à

$$\frac{1}{4}[e^{2\rho\sin\theta} + e^{-2\rho\sin\theta} - 2\cos 2(x + \rho\cos\theta),$$

ou encore à

$$\frac{1}{4}[e^{2\rho\sin\theta} + e^{-2\rho\sin\theta} - 2\cos(2\rho\cos\theta)] + \sin x \sin(x + 2\rho\cos\theta).$$

Le second terme a pour maximum l'unité et prend cette valeur pour $x = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Le premier est maximum pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. En effet, pour avoir toutes les valeurs de cette fonction, il suffit de faire varier θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Sa

dérivée par rapport à θ

$$(e^{2\rho\sin\theta} - e^{-2\rho\sin\theta})2\rho\cos\theta - 4\sin(2\rho\cos\theta)\rho\sin\theta$$

peut s'écrire

$$4\rho\cos\theta\left(\frac{2\rho\sin\theta}{1} + \frac{8\rho^3\sin^3\theta}{1.2.3} + \frac{32\rho^5\sin^5\theta}{1.2.3.4.5}\cdots\right) - 4\rho\sin\theta\sin(2\rho\cos\theta)$$

ou

$$4\rho^2\sin 2\theta\left[1 + \frac{4\rho^2\sin^2\theta}{1.2.3} + \frac{16\rho^4\sin^4\theta}{1.2.3.4.5}\cdots - \frac{\sin(2\rho\cos\theta)}{2\rho\cos\theta}\right],$$

forme qui montre que cette dérivée est toujours positive.

La fonction $\sin(x+z)$ a donc pour module maximum la racine carrée de

$$\frac{1}{4}(e^{2\rho} + e^{-2\rho} - 2) + 1$$

ou

$$\frac{1}{2}(e^{\rho} + e^{-\rho}).$$

89. Développements en série du sinus et du cosinus de l'anomalie excentrique et de ses multiples. — Le sinus et le cosinus de u en sont des fonctions bien déterminées, finies et continues. On peut donc leur appliquer la formule (18) et l'on obtient les formules suivantes dont la troisième résulte immédiatement de la seconde

$$(21)\quad \begin{cases} \sin u = \sin x + \dfrac{\alpha}{1}\cos x \sin x \\ \quad + \dfrac{\alpha^2}{1.2}\dfrac{d}{dx}(\cos x\sin^2 x) + \dfrac{\alpha^3}{1.2.3}\dfrac{d^2}{dx^2}(\cos x \sin^3 x) + \ldots, \\ \cos u = \cos x - \dfrac{\alpha}{1}\sin^2 x - \dfrac{\alpha^2}{1.2}\dfrac{d}{dx}\sin^3 x - \dfrac{\alpha^3}{1.2.3}\dfrac{d^2}{dx^2}\sin^4 x - \ldots. \\ \dfrac{r}{a} = 1 - \alpha\cos x + \dfrac{\alpha^2}{1}\sin^2 x + \dfrac{\alpha^3}{1.2}\dfrac{d\sin^3 x}{dx} + \dfrac{\alpha^4}{1.2.3}\dfrac{d^2\sin^4 x}{dx^2} + \ldots. \end{cases}$$

On obtiendrait d'une façon toute semblable les développements de $\sin mu$ et $\cos mu$ en séries procédant suivant les puissances de l'excentricité. Les coefficients dépendent des dérivées d'expressions de la forme $\sin mx \sin^p x$ ou $\cos mx \sin^p x$. Le calcul de ces dérivées se fait de la façon la plus simple en développant ces produits en fonctions linéaires de sinus ou cosinus de multiples de x.

90. Développement de l'anomalie vraie. — L'application de la

formule de Lagrange ne donne pas immédiatement le développement de l'anomalie vraie en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité. Laplace a démontré dans le Supplément au Tome V de la *Mécanique céleste* qu'un tel développement est convergent pour les mêmes valeurs de l'excentricité que celui de l'anomalie excentrique.

Pour effectuer aisément ce développement, on peut développer d'abord $v - u$ suivant les sinus des multiples de u. On a, à cet effet,

$$\tang\frac{v-u}{2} = \frac{(\sqrt{1+e}-\sqrt{1-e})\tang\frac{u}{2}}{\sqrt{1-e}+\sqrt{1+e}\tang^2\frac{u}{2}} = \frac{\lambda\sin u}{1-\lambda\cos u},$$

en posant

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+e}-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}+\sqrt{1-e}} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}.$$

On en déduit, par les formules données au Chapitre IX de la première Partie de cet Ouvrage,

$$(22)\qquad v - u = 2\lambda\sin u + 2\frac{\lambda^2}{2}\sin 2u + 2\frac{\lambda^3}{3}\sin 3u + \ldots.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer u, $\sin u$, $\sin 2u$, ... par leurs développements en séries de sinus de multiples de M.

En allant jusqu'aux termes du septième ordre par rapport à une excentricité, on trouve les expressions suivantes du rayon vecteur et de l'anomalie vraie, où l'on a posé

$$\frac{e}{2} = e',$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 + 2e'^2 &- \left(2e' - 3e'^3 + \frac{5}{6}e'^5 - \frac{7}{72}e'^7\right)\cos M \\ &- \left(2e'^2 - \frac{16}{3}e'^4 + 4e'^6\right)\cos 2M \\ &- \left(3e'^3 - \frac{45}{4}e'^5 + \frac{567}{40}e'^7\right)\cos 3M \\ &- \left(\frac{16}{3}e'^4 - \frac{128}{5}e'^6\right)\cos 4M \\ &- \left(\frac{125}{12}e'^5 - \frac{4375}{72}e'^7\right)\cos 5M \\ &- \frac{168}{5}e'^6\cos 6M - \frac{16807}{360}e'^7\cos 7M \end{aligned}\right.$$

et

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} v = \mathrm{M} &+ \left(4e' - 2e'^3 + \frac{5}{3}e'^5 + \frac{107}{36}e'^7\right)\sin\mathrm{M} \\ &+ \left(5e'^2 - \frac{22}{3}e'^4 + \frac{17}{3}e'^6\right)\sin 2\mathrm{M} \\ &+ \left(\frac{26}{3}e'^3 - \frac{43}{2}e'^5 + \frac{95}{4}e'^7\right)\sin 3\mathrm{M} \\ &+ \left(\frac{103}{6}e'^4 - \frac{902}{15}e'^6\right)\sin 4\mathrm{M} + \left(\frac{1097}{30}e'^5 - \frac{5957}{36}e'^7\right)\sin 5\mathrm{M} \\ &+ \frac{1223}{15}e'^6 \sin 6\mathrm{M} + \frac{47273}{252}e'^7 \sin 7\mathrm{M}. \end{aligned}\right.$$

Il est aisé de se rendre compte de la forme générale de chacun de ces développements. En effet, v est une fonction impaire de u et, par suite, de M, et r une fonction paire; pour ces motifs, le développement de r ne renferme que des cosinus et celui de v que des sinus.

Si l'on change e en $-e$ et que l'on augmente M de π, u augmente de π et r ne change pas. Pour ce motif, les coefficients de cosinus ou sinus de multiples impairs de M sont des fonctions impaires de e et les coefficients de cosinus ou sinus de multiples pairs de M sont des fonctions paires. On voit de suite, en se reportant à la formule (19), à celles du § 88 et à la formule (22), pourquoi les coefficients de $\cos i\mathrm{M}$ et de $\sin i\mathrm{M}$ sont d'ordre i par rapport à e.

91. Autre développement de l'anomalie excentrique. — Si, dans l'équation de Képler

$$u - e\sin u = \mathrm{M},$$

nous posons

$$u - \mathrm{M} = x,$$

$$\frac{e\sin\mathrm{M}}{1 - e\cos\mathrm{M}} = \varepsilon,$$

$$\cot\mathrm{M} = \mu,$$

elle devient

$$x = \varepsilon + \varepsilon[\cos x - 1 + \mu(\sin x - x)].$$

Pour appliquer à cette équation la formule de Lagrange, remplaçons le premier terme du second membre par une autre lettre α de sorte que, posant

$$f(x) = -[1 - \cos x + \mu(x - \sin x)],$$

l'équation deviendra

$$x = \alpha + \varepsilon f(x).$$

Nous aurons

$$x = \alpha + \varepsilon f(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{d}{d\alpha}[f(\alpha)^2] + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\frac{d^2}{d\alpha^2}[f(\alpha)^3] + \ldots.$$

Si nous remettons ε à la place de α, nous aurons

$$(25)\qquad x = \varepsilon + \varepsilon f(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{d}{d\varepsilon}[f(\varepsilon)^2] + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\frac{d^2}{d\varepsilon^2}[f(\varepsilon)^3] + \ldots.$$

On observera que $f(\varepsilon)$ est du second ordre par rapport à ε, que dans cette expression le terme $\mu(\varepsilon - \sin\varepsilon)$ paraît pouvoir grandir si μ est grand, ou si M est voisin de o ou de π; mais il n'en est rien, car on a

$$\mu\varepsilon = \frac{e\cos M}{1 - e\cos M},$$

de sorte que $\mu\varepsilon$ est, dans le cas dont il s'agit, du même ordre que e, et, par suite, $f(\varepsilon)$ est du second ordre.

D'après cela, l'ordre de chaque terme de la série (25), surpasse de deux unités l'ordre du terme précédent.

Si l'on ordonne les termes suivant les puissances de μ, on voit sans peine que les termes en μ^k sont au moins de l'ordre $3k + 1$, de sorte que l'on a

$$x = A_1 + A_4\mu + A_7\mu^2 + A_{10}\mu^3 + \ldots,$$

A_1, A_4, ... étant successivement du premier ordre, du quatrième, du septième, etc.

Dans le cas du Soleil, on a

$$e = 0{,}01677046,$$
$$\log e = \bar{2}{,}2245,$$

d'où

$$\log e^4 = \bar{8}{,}8980,$$

d'où

$$\log(e^4)'' = \bar{2}{,}20,$$

de sorte que les termes en e^4 sont négligeables, et l'on a, avec une approximation suffisante

$$x = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2} = \frac{e\sin M}{1 - e\cos M} - \frac{1}{2}\left(\frac{e\sin M}{1 - e\cos M}\right)^3.$$

Il est juste de remarquer que l'application de la méthode de Gauss pour la résolution de l'équation de Képler n'est pas beaucoup plus longue que l'application de cette formule.

Pour les calculs à cinq décimales, l'Observatoire de Berlin vient de publier des tables à double entrée, donnant les valeurs de l'anomalie vraie connaissant celle de l'anomalie moyenne M et de l'angle d'excentricité $\varphi = \arcsin e$. Les valeurs de M vont de degré en degré; celles de φ de $20'$ en $20'$. La table est accompagnée de tables auxiliaires permettant l'interpolation.

92. Équation du centre. — On appelle *équation du centre* le résultat obtenu en retranchant l'anomalie moyenne de l'anomalie vraie. Il importe d'en étudier la variation.

On a

$$\frac{d(v - \mathrm{M})}{dt} = \frac{dv}{dt} - n.$$

On a aussi

$$r^2 \frac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1 - e^2},$$

d'où

$$\frac{d(v - \mathrm{M})}{dt} = n\left(\frac{a^2\sqrt{1 - e^2}}{r^2} - 1\right).$$

L'équation du centre est nulle au périhélie. Immédiatement après sa dérivée est positive, le rayon vecteur étant égal en ce point à $a(1 - e)$. Le rayon vecteur r augmente jusqu'à l'aphélie, où il est égal à $a(1 + e)$; en ce point la dérivée de l'équation du centre est négative. Donc l'équation du centre nulle au périhélie croît, est maximum pour

$$r = a(1 - e^2)^{\frac{1}{4}},$$

et décroît ensuite jusqu'à l'aphélie où elle est nulle de nouveau.

De l'aphélie au périhélie elle repasse en sens inverse par les mêmes valeurs.

On constate aisément qu'au point où l'équation du centre est maximum on a

$$\cos v = \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{4}} - 1}{e},$$

$$\cos u = \frac{1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{4}}}{e},$$

de sorte qu'en ce point l'angle u est aigu, l'angle v obtus. Ce point est donc situé entre les perpendiculaires à l'axe focal de l'ellipse menées par le centre et par le foyer.

On trouve aisément les premiers termes des développements en série des valeurs de v, u, $\sin u$, $u - e \sin u$ qui correspondent au maximum de l'équation du centre. On trouve ainsi pour le développement de ce maximum en série

$$E = 2e + \frac{11}{48} e^3 + \ldots.$$

93. Soleil fictif. — La variation de longitude du Soleil n'est pas proportionnelle au temps. Si l'on imagine un *Soleil fictif* décrivant l'écliptique d'un mouvement uniforme, passant en même temps que le Soleil vrai au périhélie et à l'aphélie, la longitude de ce Soleil fictif sera égale à celle du Soleil vrai diminuée de l'équation du centre. Elle sera égale à la longitude du périhélie augmentée de l'anomalie moyenne du Soleil vrai. Nous substituerons dans les paragraphes suivants ce Soleil fictif au Soleil vrai.

94. Définition du jour sidéral. — On appelle *jour sidéral,* en un lieu donné, l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages supérieurs consécutifs de l'équinoxe vrai du printemps au méridien de ce lieu.

Le jour sidéral ainsi défini n'est pas rigoureusement constant. En effet, l'équinoxe vrai n'est pas fixe et n'a pas sur l'équateur un mouvement uniforme.

Pour se rendre un compte exact des inégalités qui peuvent se produire, il suffit de remarquer qu'une variation de une seconde dans la durée du jour sidéral résulterait d'une inégalité de $15''$ d'arc dans le mouvement du point vernal.

La nutation déplace ce point de $18''$ en neuf ans et le ramène à sa position moyenne neuf ans après. La somme des différences entre le jour équinoxial vrai et le jour équinoxial moyen n'est donc que d'environ une seconde de temps en neuf ans, et cette somme se retrouve nulle neuf ans après. Pour ce motif, on définit le jour sidéral au moyen de l'équinoxe vrai, aucune pendule ne permettant d'apprécier directement l'erreur commise.

La précession annuelle n'est pas constante. Elle augmente

chaque année de $0'',0002$. Il est clair que cette variation a encore moins d'influence sur la durée du jour sidéral.

Il y a lieu de remarquer que le jour sidéral n'est pas rigoureusement égal à l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages supérieurs consécutifs d'une étoile équatoriale au méridien, à cause de la précession des équinoxes. Le mouvement de l'équinoxe en un jour étant $0'',126$, le jour équinoxial est plus court que le jour stellaire d'environ $\frac{1}{120}$ de seconde de temps.

Il faut remarquer aussi que l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs d'une étoile au méridien dépend de la déclinaison de cette étoile, puisque la précession annuelle en ascension droite pour une étoile d'ascension droite α et de déclinaison δ est

$$m + n \sin\alpha \operatorname{tang}\delta,$$

où n est environ $20''$. Il s'ensuit que l'écart entre les durées des jours stellaires définis par les passages des étoiles au méridien augmente avec le produit $\sin\alpha \operatorname{tang}\delta$. Comme la précision des observations de passage est en raison inverse de $\cos\delta$, il s'ensuit que l'écart dont il s'agit ne peut être mis en évidence par les observations.

Il faut remarquer enfin, pour tout dire, que la position de la sphère étoilée par rapport au méridien changeant constamment, le jour stellaire dont nous venons de parler ne donne pas en toute rigueur la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

95. **Année tropique. Année fictive.** — On appelle *année tropique* l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du Soleil fictif à l'équinoxe vrai du printemps.

Cette durée varie avec le temps en raison de la nutation. Le Soleil, décrivant environ un degré par jour sur son orbite, met environ sept minutes de temps à parcourir les $18''$ dont la nutation modifie l'équinoxe en neuf ans. Pour avoir des années tropiques égales, on prend l'année tropique moyenne qui pourrait être définie par le retour du Soleil fictif à l'équinoxe moyen. L'observation a donné pour la valeur de cette année tropique moyenne

$$366^{j},242\,216\,6.$$

La durée de l'année tropique moyenne n'est pas constante à cause du terme en t^2 de la précession générale. Cette précession

augmentant chaque année de 0",00023, l'année tropique diminue de 0^s,005. En 2000 ans elle a diminué de 10^s.

Il y a une certaine confusion sur le commencement de l'année tropique qui commence au midi du premier janvier d'une certaine année de tel ou tel observatoire. Les astronomes ont aujourd'hui universellement adopté la proposition faite par Bessel de fixer une origine indépendante de toute position géographique. Bessel a nommé *année fictive* une année qui commence au moment où la longitude du Soleil, comptée de l'équinoxe moyen et diminuée de 20",45, partie constante de l'aberration, est égale à 280°. La diminution de 20",45 revient à prendre la longitude moyenne de la direction apparente dans laquelle se trouve le Soleil, et non pas de sa direction vraie.

96. Année sidérale. — L'*année sidérale* est l'intervalle de temps au bout duquel le Soleil revient au même point de l'écliptique. Elle est égale à l'année tropique augmentée du temps que met le Soleil à parcourir l'arc de la précession générale annuelle dans l'écliptique. La durée de l'année sidérale est ainsi

$$366,242217 = \frac{1296000}{1296000 - 50,236} = 365,256374.$$

L'année sidérale est constante; du moins, on démontre en Mécanique céleste qu'elle n'a que des variations périodiques.

97. Jour solaire vrai. Jour solaire moyen. — L'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages supérieurs consécutifs du Soleil au méridien d'un lieu s'appelle *jour solaire vrai*. En raison du mouvement direct du Soleil, un jour solaire est toujours plus long que le jour sidéral.

Le mouvement du Soleil dans le plan de l'écliptique n'est pas uniforme, à cause de l'équation du centre. Même si l'on remplaçait le Soleil vrai par le Soleil fictif, on n'aurait pas encore un jour solaire constant, à cause de l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur. On a imaginé un second Soleil fictif, qui a reçu le nom de *Soleil moyen*, qui se meut dans l'équateur de telle façon que son ascension droite comptée de l'équinoxe moyen mobile soit toujours égale à la longitude du premier Soleil fictif comptée aussi de l'équinoxe moyen mobile. Le jour défini par ce Soleil

moyen est évidemment constant, si du moins on néglige, comme cela est permis, l'inégalité provenant du terme en t^2 de la précession.

98. Rapport du jour solaire moyen au jour sidéral. — Quand une année tropique s'est achevée, l'équinoxe moyen a tourné en vertu du mouvement diurne de

$$366,242217 . 2\pi.$$

Le Soleil moyen a fait une révolution de moins. Il a donc tourné de

$$365,242217 . 2\pi.$$

Comme la période pendant laquelle le Soleil moyen tourne de 2π en vertu du mouvement diurne est le jour solaire moyen, il s'ensuit que l'année tropique est 365,242217 jours solaires moyens. Si donc on désigne par J_m la durée du jour solaire moyen, par J_s celle du jour sidéral, on a

$$\frac{J_m}{J_s} = \frac{366,242217}{365,242217}.$$

Le jour sidéral se divise en vingt-quatre heures 1440 minutes 86400 secondes sidérales; le jour solaire moyen en vingt-quatre heures 1440 minutes 86400 secondes de temps moyen.

D'après ce qui précède

$$j_s = j_m - 236^{sm},453,$$
$$j_m = j_s + 236^{ss},555.$$

Les éphémérides astronomiques, en particulier la *Connaissance des Temps,* publient des Tables commodes pour exprimer en temps sidéral un intervalle de temps exprimé en temps moyen et inversement.

99. Définition du temps sidéral, du temps vrai, du temps moyen. — On appelle, en général, *temps* l'angle horaire d'un certain point. Ainsi *le temps sidéral est l'angle horaire de l'équinoxe vrai du printemps; le temps solaire vrai est l'angle horaire du Soleil vrai; le temps solaire moyen est l'angle horaire du Soleil moyen.* Ces temps s'expriment en heures, minutes et secondes. Le temps moyen et le temps sidéral sont proportionnels

aux durées écoulées depuis le passage du Soleil moyen ou du point vernal au méridien. Le temps vrai n'est pas proportionnel à la durée écoulée depuis le passage du Soleil vrai au méridien.

100. Temps sidéral à midi moyen. — Les astronomes emploient constamment le temps sidéral à midi moyen, notamment pour exprimer en temps moyen une date donnée en temps sidéral ou inversement.

Soit ε la longitude du Soleil fictif à l'origine du temps. Cette longitude au temps t, comptée du même équinoxe, est $nt + \varepsilon$; comptée de l'équinoxe moyen du temps t, elle est

$$l = nt + \varepsilon + 50'',236 \frac{t}{365,25} + 0'',000113 \left(\frac{t}{365,25}\right)^2,$$

t désignant le nombre des jours moyens écoulés depuis l'origine du temps. Si l'on prend pour origine du temps le 1er janvier 1850, à midi moyen de Paris, on a

$$l = 280°46'36'',1 + 3548'',33023\,t + 1'',13\,K^2,$$

en désignant par K le nombre de siècles juliens écoulés depuis l'origine du temps. Cette longitude est l'ascension droite du Soleil moyen comptée de l'équinoxe moyen. Cette ascension droite comptée de l'équinoxe vrai est

$$A_m = 280°46'36'',1 + 3548'',33023\,t + 1'',13\,K^2 + \Psi \cos\omega.$$

Si l'on y donne à t une valeur entière, ce sera le temps sidéral à midi moyen de Paris à la date t.

Si, par exemple, on veut le temps sidéral à midi moyen de Paris, le 4 mai 1850, on fera $t = 123$. On a alors

$$\Psi = -12'',66, \qquad \Psi \cos\omega = -11'',61,$$

d'où

$$A_m = 42°0'29'',10 = 2^h 48^m 1^s,94.$$

C'est le temps sidéral demandé.

Si l'on veut le temps sidéral à midi moyen d'un autre lieu, dont la longitude géographique occidentale en temps (fraction de jour) soit λ, en la prenant négative si elle est orientale, on remarquera que cela revient à trouver l'ascension droite du Soleil moyen à une époque postérieure au midi moyen de Paris d'un temps marqué

par la différence de longitude. La modification qui en résulte pour le terme en t^2 et le terme en Ψ est négligeable. Le terme en t est augmenté de $3548'',33\,\lambda$, nombre constant pour un même lieu. Ainsi, pour Greenwich, $\lambda = 9^m\,20^s,63 = 0^j,006489$. L'accroissement est donc $23'',02 = 1^s,53$. Le temps sidéral à midi moyen de Greenwich est donc $2^h\,48^m\,3^s,47$.

101. Conversion du temps sidéral en temps moyen et inversement. — Une fois que l'on connaît le temps sidéral à midi moyen chaque jour, on peut convertir toute heure sidérale en temps moyen et inversement. Il suffit de convertir par les Tables dont on a parlé antérieurement le temps écoulé depuis midi moyen.

Ainsi soit à la même date une observation faite à Greenwich à $3^h\,49^m\,12^s,06$ en temps sidéral. Il s'est écoulé depuis midi moyen $3^h\,49^m\,12^s,06 - 2^h\,48^m\,3^s,47 = 1^h\,1^m\,8^s,59$ de temps sidéral, ce qui équivaut à $1^h\,1^m\,8^s,59 - 10^s,02 = 1^h\,0^m\,58^s,57$ de temps moyen. C'est l'heure de l'observation en temps moyen de Greenwich. En temps moyen de Paris, c'est $1^h\,0^m\,58^s,57 + 9^m\,20^s,63 = 1^h\,10^m\,19^s,20$.

102. Comparaison des pendules sidérales aux pendules de temps moyen. — Dans tous les observatoires on a une pendule de temps sidéral qui sert aux observations et une pendule de temps moyen qui sert à donner l'heure aux horlogers. On détermine l'état de la première pendule par les observations des étoiles dites *fondamentales* dont l'ascension droite est bien connue, on détermine l'état de la pendule de temps moyen en la comparant à la première. La comparaison se fait le plus commodément en attendant l'instant où les deux pendules battent ensemble des secondes rondes, ce qui arrive à peu près toutes les six minutes, puisque la pendule sidérale bat 236 secondes de plus en 86400 secondes que la pendule de temps moyen. Convertissant ensuite en temps moyen le temps sidéral écoulé depuis midi moyen, on aura l'état de la pendule de temps moyen.

103. Équation du temps. — On nomme *équation du temps l'heure de temps moyen à midi vrai.*

On a vu comment on calcule l'heure sidérale s à midi moyen. Soit A_v l'ascension droite du Soleil vrai à midi vrai. $A_v - s$ est en temps sidéral l'intervalle dont le midi vrai suit le midi moyen.

En appelant T la durée de l'année tropique en jours moyens ($T = 365,242\,217$),

$$\varepsilon = \frac{(A_v - s)T}{T+1}$$

est l'équation du temps.

s est connu. Soit A l'ascension droite du Soleil à midi moyen, ΔA, $\Delta^2 A$ ses différences en un jour; en posant

$$\theta = \frac{\varepsilon}{86\,400},$$

nous aurons

$$A_v = A + \Delta A + \frac{\theta(\theta-1)}{1.2}\Delta^2 A + \ldots .$$

Comme θ est moindre que 0,01 et $\Delta^2 A$ moindre que 1^s, on a avec une précision suffisante

$$A_v = A + \theta \Delta A.$$

Donc

$$\varepsilon = \frac{\left(A - s + \frac{\varepsilon}{86\,400}\Delta A\right)T}{T+1}.$$

La valeur moyenne de ΔA est

$$\frac{86\,400^s}{T} = 236^s,56.$$

Posons

$$\Delta A = \frac{86\,400}{T} + \mu,$$

nous aurons

$$\varepsilon(T+1) = T\left(A - s + \frac{\varepsilon}{T} + \frac{\varepsilon\mu}{86\,400}\right),$$

ou

$$\varepsilon = \frac{A - s}{1 - \frac{\mu}{86\,400}}.$$

Ainsi, au 1er janvier 1858 à Paris, la *Connaissance des Temps* donne les valeurs suivantes :

$$s = 18^h 43^m 21^s,33,$$
$$A = 18^h 47^m 12^s,54,$$
$$\Delta A = 4^m 24^s,67,$$

Retranchant de ΔA la constante

$$3^m 56^s,56,$$

on trouve

$$\mu = +28^s,11,$$

d'où

$$\frac{\mu}{86400} = 0,00033,$$

et

$$\varepsilon = \frac{3^m 51^s,21}{1 - 0,00033} = 3^m 51^s,29.$$

104. Variation de l'équation du temps. — En déterminant, comme on vient de l'indiquer, pour tous les jours de l'année, l'équation du temps, on reconnaît que sa variation est assez compliquée. Le Tableau ci-dessous donne ses maxima et minima et ses zéros :

Maxima et Minima.		Zéros.
	m s	
11 février.......	14.34	15 avril.
14 mai.........	— 3.54	15 juin.
26 juillet.......	+ 6.10	31 août.
2 novembre....	—16.18	25 décembre.

Il est aisé de se rendre compte de ces circonstances sur les formules.

105. Détermination des zéros de l'équation du temps. — Nous avons nommé A l'ascension droite du Soleil vrai à midi moyen. Soit A_m l'ascension droite du Soleil moyen à midi moyen. En négligeant la différence des variations d'ascension droite du Soleil vrai et du Soleil moyen entre midi vrai et midi moyen, $A - A_m$ est égal à l'équation du temps.

La longitude du Soleil moyen comptée de l'équinoxe moyen mobile est

$$l = (n + \alpha)t + \varepsilon,$$

où α égal à $0'',13754$ représente le mouvement diurne de l'équinoxe moyen. En négligeant la nutation, c'est aussi A_m.

On a aussi, en négligeant la nutation,

$$\tang A = \tang[(n + \alpha)t + \varepsilon + E] \cos\omega,$$

E désignant l'équation du centre,

L'équation du temps est donc nulle quand

$$\mathrm{tang}[(n+\alpha)t+\varepsilon] = \cos\omega\,\mathrm{tang}[(n+\alpha)t+\varepsilon+\mathrm{E}],$$

équation de la forme $\mathrm{tang}\,y = m\,\mathrm{tang}\,x$.

Développant $y - x$ en série comme il a été expliqué au Chapitre IX de la première Partie de cet Ouvrage, on trouve

$$y = x - \mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}\sin 2x + \mathrm{tang}^4\frac{\omega}{2}\,\frac{\sin 4x}{2} - \ldots;$$

comme

$$\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2} = \frac{1}{23,2},$$

on ne commettra, en négligeant $\mathrm{tang}^4\frac{\omega}{2}$, qu'une erreur de quelques minutes d'arc. On obtient ainsi

$$\mathrm{E} = \mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}\sin 2[(n+\alpha)t+\varepsilon+\mathrm{E}].$$

D'autre part, l'équation du centre, si l'on néglige e^2, a pour valeur

$$\mathrm{E} = 2e\sin(nt+\varepsilon-\varpi),$$

ϖ désignant la longitude du périhélie.

Nous égalerons les deux valeurs de E, et écrirons dans la seconde $n+\alpha$ au lieu de n. Désignant par l la longitude moyenne du Soleil comptée de l'équinoxe moyen mobile, nous aurons l'équation

$$2e\sin(l-\varpi) = \mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}\sin 2l,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{e\cos\varpi}{\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}}\mathrm{tang}\,l - \frac{e\sin\varpi}{\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}} = \sin l.$$

Posant $\mathrm{tang}\,l = x$, d'où

$$\sin l = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

on voit que les zéros de l'équation du temps correspondent aux points de rencontre de la courbe

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

avec la droite

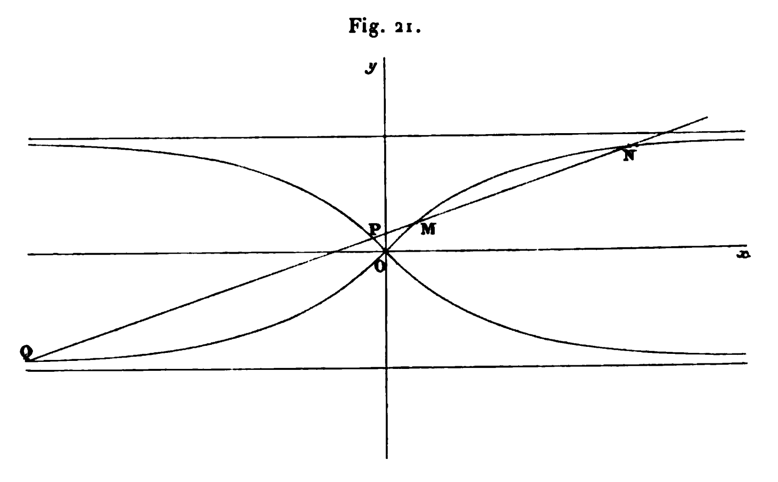
$$y = \frac{e \cos \varpi}{\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}} x - \frac{e \sin \varpi}{\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}}.$$

La courbe étant du quatrième ordre, il peut y avoir quatre solutions. Si l'on introduit les valeurs actuelles de ω et ϖ, on trouve pour équation de la droite

$$y = 0,07x + 0,38.$$

Cette droite coupe visiblement la courbe en quatre points placés comme les points M, N, P, Q (*fig.* 21). Pour M et N, x et y sont positifs; l est dans le premier quadrant. Ces valeurs correspondent

Fig. 21.



aux 15 avril et 15 juin. Pour le point P, x est négatif, y positif; l est entre 180° et 270°; ce point correspond au 31 août. Au point Q, x est négatif et très grand, y négatif; l est entre 270° et 360° et voisin de 270°; ce zéro a lieu le 25 décembre.

La droite a pour enveloppe l'hyperbole définie par l'équation

$$y^2 = \left(\frac{e}{\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}}\right)^2 x^2 + \left(\frac{e}{\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}}\right)^2.$$

L'axe imaginaire de cette hyperbole est dirigé suivant l'axe des x et son axe réel est égal à 0,39.

Soit m^2 le coefficient de x^2 dans l'équation précédente. L'hy-

perbole coupe la courbe aux points pour lesquels

$$m^2x^4 + (2m^2 - 1)x^2 + m^2 = 0.$$

Si l'on avait

$$m > \frac{1}{2},$$

les points de rencontre seraient imaginaires. Dans ce cas, il y aurait des tangentes à l'hyperbole qui ne couperaient la courbe qu'en deux points. Cela a eu lieu il y a 100 000 ans.

106. Maxima et minima de l'équation du temps. — On peut aussi bien étudier les maxima de l'équation du temps. Prenant toujours $A - A_m$ comme valeur suffisamment approchée de cette équation du temps, nous aurons, pour un maximum ou un minimum,

$$\frac{dA}{dt} - \frac{dA_m}{dt} = \frac{dA}{dt} - (n + \alpha) = 0.$$

Si v' est la longitude du Soleil vrai comptée de l'équinoxe moyen mobile,

$$\tang A = \cos\omega \tang v',$$

$$\frac{dA}{dt} = \cos^2 A \cos\omega \frac{\frac{dv'}{dt}}{\cos^2 v'}.$$

Si v est la longitude du Soleil comptée d'un équinoxe fixe,

$$v' = v + \alpha t,$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} + \alpha.$$

Donc

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cos\omega}{\cos^2 v' + \cos^2\omega \sin^2 v'}\left(\frac{dv}{dt} + \alpha\right).$$

Comme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r^2},$$

on a l'équation

$$\frac{\cos\omega}{\cos^2 v' + \cos^2\omega \sin^2 v'}\left(\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} + \alpha\right) = n + \alpha.$$

Si l'on néglige α et que l'on désigne par x et y les coordonnées du Soleil par rapport à deux axes rectangulaires dont l'un passe par l'équinoxe, le second par le point dont la longitude est $+90°$,

l'équation précédente devient

$$x^2 + y^2 \cos^2\omega = a^2 \sqrt{1-e^2} \cos\omega.$$

Les maxima et minima de l'équation du temps correspondent aux points de rencontre de cette ellipse avec celle que décrit le Soleil.

En introduisant les données numériques relatives à l'époque actuelle, on trouve quatre points communs qui correspondent aux 11 février, 14 mai, 26 juillet et 2 novembre.

107. Variation du jour solaire vrai. — A ses maxima ou minima, l'équation du temps est sensiblement constante; le jour solaire vrai est alors égal au jour solaire moyen. C'est aux époques où l'équation du temps varie le plus rapidement que le jour solaire vrai diffère le plus du jour solaire moyen. Le Tableau des valeurs de l'équation du temps montre que le jour vrai est minimum le 26 mars et inférieur de dix-huit secondes au jour moyen. Il croît du 26 mars au 20 juin et surpasse alors de treize secondes le jour moyen. Le jour vrai décroît ensuite jusqu'à devenir, le 15 septembre, inférieur de vingt et une secondes au jour moyen, puis croît jusqu'au 22 décembre où il surpasse le jour moyen de trente secondes. Il décroît ensuite jusqu'au 26 mars suivant.

108. Calendrier. — Le calendrier grégorien, adopté aujourd'hui par la presque universalité des peuples d'origine européenne, est fondé sur la connaissance de l'année tropique

$$365^{j},242217.$$

Les années, qui ne peuvent, pratiquement, avoir que des nombres entiers de jours, ont été réglées de manière à laisser toujours l'équinoxe sensiblement à la même date.

On voit de suite qu'une année doit avoir ordinairement 365 jours et que tous les quatre ans on devra introduire un jour de plus. Telle était la règle introduite par Jules César. Au bout de 400 ans, le nombre des jours serait ainsi

$$365 \times 400 + 100,$$

au lieu de

$$365 \times 400 + 96,8868.$$

Il est donc nécessaire de supprimer tous les 400 ans trois des jours supplémentaires.

Chacun sait qu'il a été décidé à cet égard que, les années ayant ordinairement 365 jours, celle dont le millésime serait divisible par 4 en aurait 366; qu'il y aurait cependant exception pour les années séculaires, qui n'auraient 366 jours que tous les 400 ans, quand leur millésime serait divisible par 400.

Il faut remarquer que ces conventions ne sont pas rigoureusement suffisantes. Elles introduisent en trop, au bout de 400 ans,

$$0^{j},1132,$$

ce qui donnera un jour au bout de 4000 ans. On pourra convenir que l'année 4000 ne sera pas bissextile.

CHAPITRE VII.

MOUVEMENTS APPARENTS DES PLANÈTES. — ÉLONGATIONS; STATIONS; RÉTROGRADATIONS. — RÉVOLUTIONS SIDÉRALES, SYNODIQUES. — LOIS DE KÉPLER; CONSTANTE DE GAUSS. — ÉLÉMENTS DE L'ORBITE. — DÉTERMINATION DE LA POSITION DE L'ASTRE A UN INSTANT DONNÉ DANS UNE ORBITE ELLIPTIQUE, DANS UNE ORBITE PARABOLIQUE; CAS DES ORBITES TRÈS ALLONGÉES. — CALCUL DES COORDONNÉES GÉOCENTRIQUES. — VARIATIONS DES COORDONNÉES CORRESPONDANT A DES VARIATIONS DÉTERMINÉES DES ÉLÉMENTS.

---

109. Apparences qu'offrent les mouvements des planètes. — De nombreux astres, la Lune, les planètes, les comètes ont, comme le Soleil sur la sphère céleste, des mouvements propres. Nous nous occuperons de la Lune et des comètes dans des Chapitres spéciaux. Le groupe des planètes comprend d'abord Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, dont les mouvements ont été reconnus dès l'antiquité; Uranus découverte par Herschel à Bath le 13 mars 1781 et Neptune à Berlin par Galle le 23 septembre 1846 sur l'indication de Le Verrier. En outre, depuis le 1er janvier 1801, date de la découverte de Cérès à Palerme par Piazzi, il a été trouvé tout un essaim de planètes télescopiques dont une seule est visible à l'œil nu et dont le nombre s'accroît chaque année par de nouvelles découvertes. Nous expliquerons d'abord quelles apparences offrent au premier aspect les mouvements de ces astres et nous indiquerons sommairement comment Képler est parvenu à en trouver les lois.

Les sept planètes principales et un grand nombre de planètes télescopiques se meuvent en restant sensiblement dans le voisinage de l'écliptique. Pour ce motif nous supposerons que l'on déduise d'abord, de leurs ascensions droites et déclinaisons observées, leurs longitudes et latitudes. On reconnaîtra alors que les latitudes restent petites et que les longitudes sont ordinai-

rement croissantes. Cependant il y a pour chaque planète des périodes où la longitude, au lieu d'augmenter, diminue. Pour l'exposé de la façon dont les choses se passent, il est nécessaire de diviser les planètes en deux groupes : les planètes inférieures, Mercure et Vénus, et les planètes supérieures dont le groupe contient toutes les autres.

110. **Planètes inférieures.** — Aux données numériques près, le mouvement de Vénus ressemble à celui de Mercure. La *fig.* 22 donne une représentation graphique du mouvement apparent de Mercure, du 5 mars 1893 au 31 août de la même année. On a représenté par une droite horizontale l'écliptique, et l'on a porté, sur cette droite choisie pour axe des abscisses, la longitude de Mercure. Perpendiculairement on a porté des ordonnées représentant, à la même échelle, les latitudes. On a inscrit, en outre, sur l'axe des abscisses, à un demi-jour près, les dates auxquelles le Soleil se trouve aux divers points de l'écliptique, de dix en dix degrés, et sur la trajectoire de Mercure les points où se trouve la planète de cinq en cinq jours. Les dates auxquelles la planète occupe ces points n'ont été inscrites que de dix en dix jours.

L'examen des résultats montre que, du 5 mars au 22, le mouvement de Mercure est *direct* comme celui du Soleil. Cependant, pendant cette période, ce mouvement étant moindre que celui du Soleil, Mercure qui est à l'*est* du Soleil s'en rapproche. Du 22 au 31 mars, le mouvement de Mercure est *rétrograde* et Mercure se rapproche toujours du Soleil avec lequel il est en *conjonction inférieure* le 31, les longitudes de Mercure et du Soleil étant égales. Du 31 mars au 14 avril, le mouvement de Mercure est encore *rétrograde* et Mercure s'éloigne du Soleil vers l'*ouest*. Ensuite le mouvement redevient *direct* comme celui du Soleil. Mais ce mouvement étant jusqu'au 26 avril plus lent que celui du Soleil, Mercure continue à s'éloigner de cet astre : le 28 avril il est à sa *plus grande élongation ouest*. Après cette date, le mouvement toujours *direct* est plus rapide que le mouvement du Soleil, et Mercure se rapproche du Soleil. Le 4 juin il est à sa *conjonction supérieure,* ayant de nouveau même longitude que le Soleil. Le 11 juillet, il est à sa *plus grande élongation est*. Puis le mouvement étant toujours *direct,* mais plus lent que le mouvement du

Soleil, Mercure se rapproche de cet astre et les phénomènes décrits

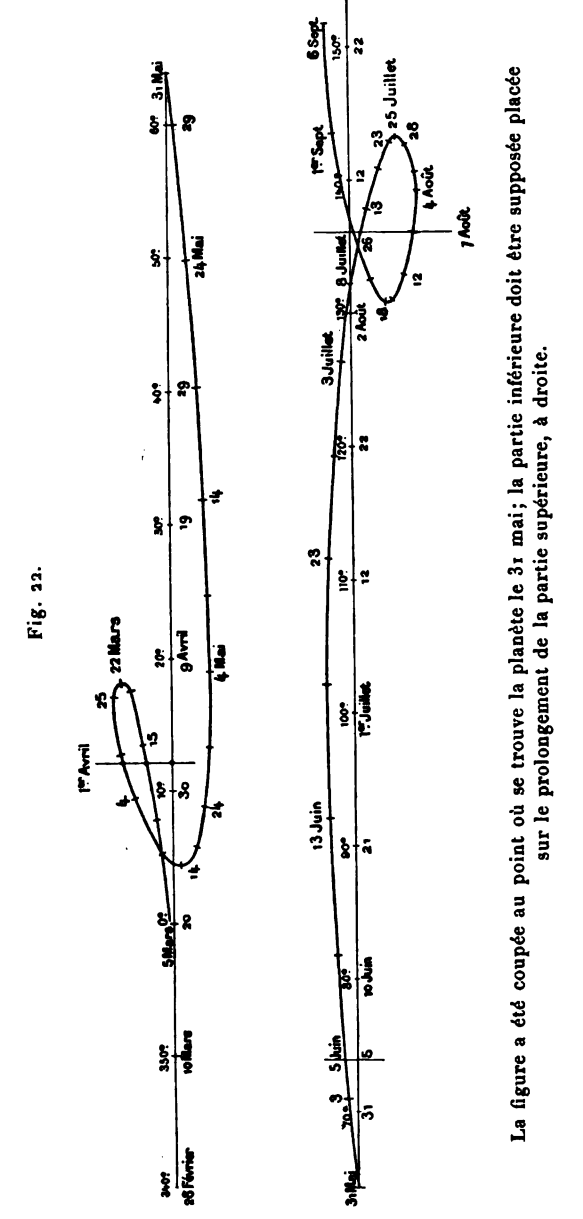


Fig. 22.

La figure a été coupée au point où se trouve la planète le 31 mai; la partie inférieure doit être supposée placée sur le prolongement de la partie supérieure, à droite.

ci-dessus se reproduisent de nouveau dans le même ordre. Les

latitudes sont alternativement croissantes et décroissantes, suivant une loi qui n'est pas en rapport immédiat avec les phénomènes que nous venons d'indiquer.

C'est dans le voisinage des *conjonctions inférieures* que le mouvement est rétrograde, pendant une période de vingt-quatre jours. Pour Vénus cette période est de quarante et un jours environ. Mercure ne s'éloigne pas à plus de 23° du Soleil et Vénus à plus de 48°.

111. **Planètes supérieures.** — Les planètes supérieures se comportent d'une façon notablement différentes. Nous prendrons Mars comme exemple : le 29 juillet 1891 Mars et le Soleil ont même longitude, ces deux astres sont en *conjonction,* Mars a un mouvement *direct* plus lent que celui du Soleil, 38′, 5 par jour. Il paraît donc s'éloigner du Soleil vers l'*ouest;* il se lève le matin avant le Soleil. Les choses continuent ainsi pendant longtemps, la vitesse de Mars diminue lentement. Le 29 mars 1892, la distance des deux astres est de 90°, ils sont en *quadrature.* La vitesse de Mars est de 34′,6, elle diminue jusqu'au 4 juillet; à cette date, Mars qui s'est éloigné du Soleil de plus en plus rapidement est *stationnaire* dans le ciel. Après le 4 juillet le mouvement de Mars est *rétrograde,* de sorte que la planète s'éloigne encore plus vite du Soleil. Le 3 août, Mars est à 180° du Soleil et son mouvement rétrograde atteint 16′ par jour : Mars est en *opposition,* il est au méridien vers minuit. Le mouvement rétrograde se ralentit, Mars est de nouveau *stationnaire* le 3 septembre; dans cet intervalle, le Soleil se rapproche de Mars du côté de l'ouest, le 3 septembre ils sont à 146° l'un de l'autre, ensuite Mars reprend un mouvement *direct* de plus en plus rapide, mais toujours plus lent que celui du Soleil. Le 9 décembre les deux astres sont de nouveau à 90° l'un de l'autre, *en quadrature,* mais Mars est à l'*est* du Soleil : il est près du méridien vers le coucher du Soleil. Le mouvement de Mars continue à être *direct,* d'environ 40′, toujours plus lent par conséquent que celui du Soleil, de sorte que les deux astres se retrouvent en *conjonction* le 3 septembre 1893, et les phénomènes se produisent de nouveau dans le même ordre avec de légères variations dans les durées des divers intervalles de temps.

Les autres planètes extérieures offrent des apparences analogues.

112. Système de Copernic. — C'est seulement au XVI[e] siècle que Copernic fonda le véritable système du monde et affirma le double mouvement de la Terre : mouvement de *rotation,* direct, d'occident en orient, produisant l'apparence du mouvement diurne de la sphère céleste ; mouvement annuel de *translation* de la Terre autour du Soleil. Nous ne nous arrêterons pas à l'indication des raisons qui fixèrent les idées de Copernic et nous nous bornerons à dire que les considérations tirées de la Mécanique ne pouvaient venir à son aide, la Mécanique, à cette époque, n'étant pas encore fondée. Au reste, Copernic a donné lui-même peu de renseignements sur l'origine et le développement de ses idées.

Toujours est-il que cette conception rend immédiatement compte des apparences sommaires qu'offrent les mouvements des planètes.

Considérons tous ces astres comme décrivant dans un même plan des orbites circulaires ayant pour centre le Soleil. Désignons par a le rayon de l'orbite de la Terre, par a' le rayon de l'orbite d'une autre planète. Prenons pour origine du temps l'instant où ces astres sont en ligne droite, le Soleil étant entre les deux planètes ; prenons pour axe des x la droite qui joint le Soleil à la Terre à cet instant, et pour axe des y une droite située dans le plan des orbites, dirigée vers le point dont la longitude, comptée à partir de Ox dans le sens du mouvement de la Terre, est $+90°$. Désignons par n le mouvement angulaire de la Terre, par n' celui de la planète, en un jour. Les coordonnées rectangulaires de la Terre à la date t sont

$$a \cos nt, \qquad a \sin nt.$$

Celles de la planète à la même date sont

$$-a' \cos n't, \qquad -a' \sin n't.$$

Les coordonnées de la planète vue de la Terre sont donc

$$-a \cos nt - a' \cos n't, \qquad -a \sin nt - a' \sin n't,$$

de sorte que, si Δ désigne la distance de la planète à la Terre et λ sa longitude comptée à partir de la direction Ox, on a

$$\Delta\cos\lambda = -a\cos nt - a'\cos n't,$$
$$\Delta\sin\lambda = -a\sin nt - a'\sin n't,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{a\sin nt + a'\sin n't}{a\cos nt + a'\cos n't}.$$

On en conclut

$$d\lambda = \frac{na^2 + n'a'^2 + (n+n')aa'\cos(n-n')t}{a^2 + a'^2 + 2aa'\cos(n-n')t},$$

formule dont le dénominateur est toujours positif.

Si l'on élimine a' au moyen de la relation de Képler qui sera donnée plus loin

$$n^2a^3 = n'^2a'^3,$$

on reconnaît que la longitude λ, ordinairement croissante, décroît quand la valeur absolue de $(n-n')t$ est comprise entre $(2k+1)\pi + \omega$ et $(2k+1)\pi - \omega$, k étant un nombre positif, et ω l'angle aigu dont le cosinus est

$$\frac{n^{\frac{1}{3}}n'^{\frac{1}{3}}\left(n^{\frac{1}{3}} + n'^{\frac{1}{3}}\right)}{(n+n')} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{aa'}}{a - \sqrt{aa'} + a'},$$

nombre toujours moindre que 1.

De sorte que, pour chaque planète inférieure, le mouvement est rétrograde dans le voisinage de la conjonction inférieure, pour chaque planète supérieure dans le voisinage de l'opposition.

D'autre part, si l'on désigne par z l'angle sous lequel de la Terre on voit le Soleil et la planète, on trouve, en appliquant au triangle formé par les trois astres la relation entre les côtés et les sinus des angles opposés,

$$\operatorname{tang}z = -\frac{a'\sin(n'-n)t}{a + a'\cos(n'-n)t},$$

qui montre que, pour les planètes inférieures, l'angle z n'atteint jamais 90°, ce qui est au reste évident, puisque c'est l'angle sous lequel d'un point extérieur à un cercle on voit un rayon de ce

cercle. De cette formule on déduit

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(n-n')a'[a'+a\cos(n'-n)t]}{a^2+a'^2+2aa'\cos(n'-n)t},$$

qui montre que pour une planète supérieure l'angle z croît constamment, ainsi que cela a été constaté par l'observation, tandis qu'une planète inférieure cesse de s'éloigner du Soleil pour s'en rapprocher ou inversement quand on a

$$\cos(n'-n)t = -\frac{a'}{a},$$

c'est-à-dire quand $(n'-n)t$ est comprise entre $(2k+1)\pi+\omega'$ et $(2k+1)\pi-\omega'$, ω' étant l'angle aigu défini par

$$\cos\omega' = \frac{a'}{a} = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n'^{\frac{2}{3}}}.$$

On voit sans peine que, n' étant plus grand que n, ω' est plus grand que ω.

En fait, les formules précédentes ne donnent qu'une approximation sommaire, les orbites n'étant ni circulaires, ni situées dans un même plan, et les divers angles varient comme il suit :

L'étendue des plus grandes digressions de Mercure, ou de ses plus grands écarts de chaque côté du Soleil, varie de 18° à 32°. L'intervalle entre deux retours à la même position par rapport au Soleil varie de 106 à 130 jours. L'arc moyen de sa rétrogradation est d'environ 15° et sa durée de 23 jours; elle commence à 20° du Soleil. Sa latitude varie de — 5° à + 5°.

Les plus grandes digressions de Vénus varient de 50° à 53°, et l'intervalle entre deux retours à la même position par rapport au Soleil est de 584 jours. L'arc de la rétrogradation qui commence à 32° du Soleil est de 18° environ et sa durée de 42 jours. La latitude peut atteindre plusieurs degrés.

Pour les planètes extérieures, l'amplitude et la durée de la rétrogradation et la révolution synodique, ou l'intervalle entre deux retours à la même position par rapport au Soleil, ont les valeurs suivantes :

	Arc de rétrogradation.	Durée de la rétrogradation.	Distance du Soleil au commencement de la rétrogradation.	Révolution synodique.
Mars....	18°	73j	152°	795j
Jupiter..	11	121	128	399
Saturne..	7	139	121	378
Uranus..	4	151	115	369
Neptune.	3	158	102	368

113. Durées des révolutions sidérales. — En regardant comme circulaires et uniformes les mouvements de la Terre et des planètes autour du Soleil, il est aisé de déduire de leurs révolutions synodiques les durées de leurs révolutions sidérales. Soient en effet n le mouvement héliocentrique de la Terre dans l'unité de temps, n' celui d'une planète inférieure. Dans le temps T de la révolution synodique, la différence de longitude des deux astres s'accroît de 360°. On en conclut

$$n' - n = \frac{360°}{T}.$$

Si n' se rapporte à une planète supérieure

$$n - n' = \frac{360°}{T}.$$

Le mouvement de la Terre, égal au mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, est donné directement par les observations. La connaissance de n' entraîne celle de la durée τ de la révolution sidérale

$$\tau = \frac{1\,296\,000}{n'}.$$

On trouvera au Chapitre XI les valeurs de n et τ pour les principales planètes.

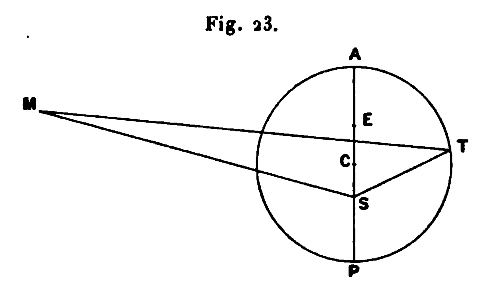
114. Lois de Képler. — La connaissance des durées des révolutions synodiques et sidérales et celle de la précession des équinoxes étaient les seules données que l'Astronomie ancienne pût fournir à Képler pour la recherche précise des orbites des planètes. Ses travaux ont eu pour base essentielle les observations

faites à Uranibourg par Tycho Brahé de 1582 à 1597, observations dont la précision correspondait sensiblement à la minute d'arc; la comparaison de ces observations avait révélé à leur auteur la réfraction atmosphérique, et Képler, ayant réussi à calculer des Tables de réfraction exactes à quelques secondes près, put, grâce à leur emploi, regarder comme impossible une erreur de plusieurs minutes.

C'est par la discussion des observations de la planète Mars que Képler parvint à la découverte des lois qui ont immortalisé son nom. Adoptant le système de Copernic, il entreprit de déterminer, d'après les observations de Tycho Brahé, l'orbite de Mars et celle de la Terre, en appliquant à ces deux astres l'hypothèse de l'excentrique de Ptolémée, hypothèse qui, avant Képler, n'avait pas été étendue complètement à la Terre elle-même.

Soit (*fig.* 23) S le centre du Soleil. Képler admet que la Terre décrit un cercle PTA ayant un centre C différent de S et que le mouvement se fait de telle manière que le rayon ET tourne uniformément, E étant le symétrique de C par rapport à S.

Fig. 23.



En réalité Ptolémée supposait le point S occupé par la Terre, le cercle PTA, nommé *déférent,* décrit soit par le Soleil, soit par le centre d'un cercle mobile, dit *épicycle*, parcouru lui-même uniformément par une planète, et n'introduisait le point E que dans ce dernier cas, regardant comme uniforme le mouvement du rayon CT dans le cas du Soleil. Kepler supprime donc l'épicycle qui est remplacé par la considération du mouvement de la Terre autour du Soleil et introduit le *point d'égalité* E même dans le cas de ce dernier mouvement.

Képler procéda à une détermination exacte de l'orbite de la Terre ou plus exactement des distances de la Terre au Soleil. Il y

parvint au moyen de quatre observations de Mars faites les 4 mars 1590, 23 janvier 1592, 7 décembre 1593 et 25 octobre 1595, à des intervalles de temps très voisins de la révolution sidérale de Mars. Il commença, en tenant compte du mouvement connu de Mars, par ramener les observations aux 4 mars 1590 à $7^h 10^m$, 20 janvier 1592 à $6^h 45^m$, 7 décembre 1593 à $6^h 15^m$, 25 octobre 1595, à $5^h 45^m$, dates séparées exactement l'une de l'autre par une révolution sidérale, de sorte qu'à ces quatre dates le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète occupait la même position dans l'espace. De plus, la latitude de la planète était négligeable, de sorte que l'on pouvait sans erreur sensible admettre que la planète était dans l'écliptique même. Soient T la première position de la Terre (*fig.* 23), M celle de Mars. On connaît les longitudes de ST, de SM et de TM. On a donc les angles T et M et par suite le rapport $\frac{ST}{SM}$. Il s'ensuit que l'emploi des quatre observations donne les rapports des quatre rayons ST. C'est la comparaison des résultats qui conduisit Képler à modifier les idées admises sur l'excentricité de l'orbite de la Terre et à prendre à l'égard de cette orbite, comme à l'égard des autres planètes, pour point d'égalité le symétrique de S par rapport à C.

Quant à la direction SM, elle était déduite par Képler d'une recherche antérieure dans laquelle il avait étudié le mouvement de Mars (Chap. XVI et suivants de son Ouvrage) d'après douze observations d'oppositions de Mars faites de 1580 à 1604, observations qui donneraient directement la position exacte de Mars vu du Soleil si l'on faisait abstraction des latitudes.

Une fois en possession des vraies distances de la Terre, et par suite de celles de Mars au Soleil, Képler put procéder à la recherche de l'orbite exacte. Il n'y parvint que par de longs tâtonnements, au cours desquels il entrevit que la cause qui déplace les planètes réside dans la masse du Soleil. Il reconnut d'abord que l'orbite de Mars n'était pas circulaire, supposa ensuite que c'était une courbe oviforme, et ne parvint qu'après de longs essais, à la fin de la IVe Partie de son Ouvrage, à reconnaître que *l'aire décrite par le rayon vecteur* mené *du Soleil à la planète est proportionnelle au temps* et que *la courbe est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer.* Képler avait travaillé sept ans environ à l'étude

du mouvement de Mars. C'est en 1605 qu'il parvint aux deux lois qui, avec la suivante, ont immortalisé son nom.

Ce n'est que le 18 mars 1618 qu'il trouva la relation entre les durées de révolution des diverses planètes et les grands axes de leurs orbites :

Les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes.

Képler avait cherché cette loi pendant vingt-deux ans. Ce n'est qu'après beaucoup d'autres essais qu'il eut l'idée de comparer les durées des révolutions aux grands axes des orbites. Il n'avait pas encore, à cette époque, pour cette comparaison, la ressource des logarithmes qui aujourd'hui donneraient la loi en quelques minutes et dut comparer diverses puissances les unes aux autres. C'est au Chapitre III du Livre V d'un Ouvrage intitulé : *Harmonia mundi,* etc., publié en 1619, que Képler fit connaître cette troisième loi non moins importante assurément que les deux premières.

115. Énoncé exact des lois de Képler. — Nous verrons au Chapitre X comment Newton s'éleva de la connaissance des lois de Képler à celle de la loi générale qui régit les mouvements célestes et comment, en regardant cette loi comme vraie, on en déduit inversement les lois de Képler. Il est nécessaire d'indiquer dès à présent que cette marche a modifié quelque peu l'énoncé donné par Képler de ses lois qui prennent les formes suivantes :

Chaque planète (ou comète) se meut dans un plan passant par le centre du Soleil.

La trajectoire est une section conique dont le centre du Soleil est un foyer.

Le mouvement sur la trajectoire se fait de telle façon que les aires décrites par le rayon vecteur mené de la planète au Soleil sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.

Pour les divers corps célestes considérés (planètes ou comètes) les carrés des aires décrites par les rayons vecteurs dans l'unité de temps sont proportionnels aux produits des paramètres des orbites par la somme des masses de l'astre et du Soleil.

Ces énoncés diffèrent de ceux de Képler en trois points. Les lois s'étendent aux comètes aussi bien qu'aux planètes et l'orbite peut être une section conique quelconque, ellipse, parabole, hyperbole. Pour ces deux dernières sortes de trajectoires, il ne peut être question de durée de révolution, et la nouvelle forme adoptée pour la dernière loi a l'avantage de s'appliquer à une section conique quelconque. Enfin le dernier alinéa fait intervenir la somme des masses du corps céleste et du Soleil : les masses des planètes sont trop petites vis-à-vis de celle du Soleil pour qu'il fût possible à Képler de reconnaître la présence de ce facteur.

Si l'on prend pour unité de masse la masse du Soleil, que l'on désigne par μ celle de l'astre considéré, par $2p$ le paramètre de son orbite, par g le double de l'aire décrite dans le temps t par le rayon vecteur mené du Soleil à l'astre, et par k un nombre entièrement déterminé, l'ensemble des deux dernières lois est compris dans la relation

$$(a) \qquad \frac{g}{t\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}} = k.$$

Dans le cas où l'orbite est une ellipse, la valeur de g pour une révolution entière de durée T est

$$2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p},$$

a désignant le demi grand axe. La relation (a) devient

$$\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T\sqrt{1+\mu}} = k,$$

de sorte que l'on a, en négligeant μ,

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const.},$$

ce qui est l'énoncé donné par Képler pour sa dernière loi.

116. Valeur de la constante de Gauss. — On a adopté pour la constante k la valeur déterminée par Gauss en partant de la révolution de la Terre. Gauss a pris pour unité de temps le jour solaire moyen, pour unité de longueur le demi grand axe de l'orbite

terrestre et a adopté les valeurs suivantes

$$T = 365,256\,383\,5,$$

$$\mu = \frac{1}{354\,710}.$$

Il en a conclu

$$k = 0,017\,202\,098\,95,$$

qui donne

$$\log k = \bar{2},235\,581\,441\,4,$$
$$\log k'' = 3,550\,006\,574\,6,$$

k'' désignant le produit de k par le nombre de secondes que renferme un arc de cercle de longueur égale à celle du rayon.

Depuis la publication de l'Ouvrage de Gauss (*Theoria motus corporum cœlestium*) Le Verrier a montré que les valeurs numériques adoptées par Gauss ne peuvent être conservées. Notamment la masse de la Terre a dû être augmentée d'environ un dixième de sa valeur. Néanmoins on est convenu de ne pas modifier la valeur de la constante k et de se borner à changer la signification astronomique de l'unité de longueur, qui est un peu inférieure à la moyenne distance de la Terre au Soleil.

117. Remarques sur les orbites. — Nous ajouterons à ce qui précède quelques explications relatives aux orbites elles-mêmes.

Si l'on prend pour pôle le centre du Soleil et pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires quelconques situées dans le plan de l'orbite, l'équation de cette orbite est

$$(1) \qquad r = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

En Astronomie on suppose toujours les rayons vecteurs positifs. Dans cette hypothèse, γ est essentiellement positif. Ce fait résultera de la valeur que nous obtiendrons en déduisant les lois de Képler de la loi de Newton. Nous trouverons

$$\gamma = \frac{h^2}{f(1+\mu)},$$

f étant l'attraction exercée par l'unité de masse sur l'unité de masse à une distance égale à 1 et h une constante réelle.

D'autre part, on peut, en faisant tourner les axes de coordonnées autour de Ox, ramener l'équation (1) à la forme

$$(2) \qquad r + ex = \gamma,$$

e désignant un nombre positif et γ ayant la même valeur que dans l'équation (1)

Si e est moindre que 1, l'orbite est une ellipse; c'est une parabole si $e = 1$, une hyperbole si e est plus grand que 1.

Si l'on remplace les coordonnées rectangulaires par des coordonnées polaires r, θ ayant pour pôle l'origine et pour axe polaire l'axe des x, l'équation (2) devient

$$r = \frac{\gamma}{1 + e \cos\theta}. \tag{3}$$

Elle montre que dans les orbites elliptiques ou paraboliques γ est positif.

Dans les orbites hyperboliques les valeurs positives de r correspondent à l'une des deux branches de l'hyperbole, les valeurs négatives à l'autre. Si γ est positif, la première branche est celle qui tourne sa concavité vers le pôle; si γ était négatif, ce serait l'autre branche. Le changement de signe de γ reviendrait à remplacer f par $-f$, ou l'attraction exercée par le Soleil sur la planète par une répulsion. Il s'ensuit que la seule branche d'hyperbole qu'un astre puisse décrire autour du Soleil est celle qui tourne sa concavité vers le Soleil.

Nous ne nous occuperons dans cet Ouvrage que des orbites elliptiques et paraboliques, qui se rencontrent le plus ordinairement.

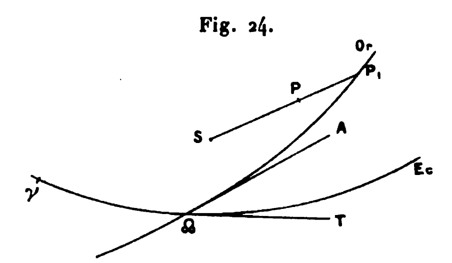
118. Éléments de l'orbite. — Pour représenter l'orbite d'une planète ou d'une comète on donne à l'ordinaire les *éléments* dont la définition suit.

On détermine d'abord la position du plan de l'orbite au moyen de la droite d'intersection de ce plan et de l'écliptique relative à une date donnée et de l'angle de ces deux plans. Il importe de préciser et l'on y parvient commodément en représentant les traces de ces plans sur la sphère céleste.

Soient Ec la trace de l'écliptique, Or celle du plan de l'orbite, γ le point vernal. Les deux grands cercles se coupent en deux points diamétralement opposés. Celui ☊ de ces deux points où l'astre, dans son mouvement, passe de l'hémisphère sud dans l'hémisphère nord, s'appelle *nœud ascendant* de l'orbite, l'autre *nœud descen-*

dant. On donne la *longitude* ♈☊ *du nœud ascendant* et l'angle que fait au point ☊ la tangente ☊A au grand cercle O*r*, tracée dans la direction du mouvement de la planète avec la tangente ☊T à l'écliptique menée dans le sens du mouvement du Soleil, ou du mouvement de la Terre. Le premier de ces angles se compte comme toute longitude, le second est compris entre 0° et 180°. Quand il est *aigu,* on dit que l'astre a un *mouvement direct;* s'il est *obtus,* un *mouvement rétrograde.* Nous représenterons par ☊ l'arc ♈☊ et par *i* l'angle A☊T, *l'inclinaison de l'orbite.*

Fig. 24.



Le plan de l'orbite une fois défini, on détermine la direction du rayon vecteur SP mené du Soleil S à l'astre P par *l'argument u de la latitude.* On désigne ainsi l'arc ☊P_1 compté du nœud ascendant jusqu'au point P_1 extrémité du rayon SP sur la sphère, cet arc ☊P_1 étant compté de 0° à 360° dans le sens du mouvement de l'astre. On remplace souvent aussi l'argument de la latitude par la longitude de l'astre dans son orbite : on appelle ainsi la somme ☊ $+ u$.

En particulier on considère comme troisième élément de l'orbite *l'argument* ω *de la latitude du périhélie,* c'est-à-dire du point de l'orbite le plus voisin du Soleil, ou la *longitude* ϖ de ce *périhélie,* égale à ☊ $+ \varpi$.

On donne ensuite les dimensions de l'orbite. Si elle est elliptique, on fait connaître son demi-axe focal a et son excentricité e, c'est-à-dire le rapport de la distance des foyers à l'axe focal. On a coutume de poser

$$e = \sin\varphi,$$

et de donner l'angle φ, dit *angle d'excentricité,* que l'on suppose aigu. Le paramètre est lié à a et φ par la formule

$$p = a\cos^2\varphi.$$

Si l'orbite est parabolique on donne le paramètre p, et plus souvent sa moitié que l'on désigne par q, c'est-à-dire la *distance périhélie*.

119. Époque. — Il reste à faire connaître la position de l'astre à une date donnée. Cette date s'appelle l'époque. Dans les orbites elliptiques elle est généralement arbitraire. Dans les orbites paraboliques c'est d'ordinaire la date du passage au périhélie.

Nous avons montré au n° 82, à propos du mouvement du Soleil, comment on détermine la position de l'astre dans le mouvement elliptique et avons indiqué l'emploi de l'anomalie vraie v, de l'anomalie excentrique E, de l'anomalie moyenne M. A ces anomalies correspondent la longitude vraie $\varpi + v$, et la longitude moyenne $\varpi + M$. On a coutume de donner la longitude moyenne, ou, ce qui revient au même, l'anomalie moyenne de l'époque. Cette anomalie moyenne n'est pas mesurée directement par une observation; mais les autres éléments de l'orbite ne le sont pas davantage, et ces éléments une fois connus on a de suite l'anomalie moyenne qui correspond à une anomalie vraie donnée par les formules

$$\tang \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tang \frac{v}{2},$$
$$M = E - e \sin M.$$

120. Moyen mouvement. — La relation entre l'anomalie excentrique et le temps s'obtient par le calcul fait au n° 83, où il suffit de faire

$$2h = k\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}.$$

Il s'ensuit que l'anomalie moyenne est

$$\frac{k\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}(t-t_0),$$

t_0 étant l'instant du passage au périhélie.

Le coefficient de t dans cette expression s'appelle moyen mouvement; nous le désignerons par n. On voit qu'il est lié à a par la formule

$$n^2 a^3 = k^2(1+\mu).$$

Si l'on veut obtenir n en secondes d'arc, il suffit d'employer pour k

la valeur k'' donnée au n° **116**. Il ne faut pas oublier que l'unité de temps est le jour solaire moyen.

121. Mouvement parabolique. — La détermination de la position d'une comète à une date donnée quand l'orbite est parabolique se fait sans difficulté comme il suit.

Des équations

$$g = \int r^2 dv$$

et

$$g = k\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}(t-t_0),$$

on tire

$$\int_{v_0}^{v} r^2 dv = k\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}(t-t_0),$$

v_0 désignant la valeur de l'anomalie vraie v à la date arbitraire t_0.

L'équation de la parabole est

$$r = \frac{p}{1+\cos v} = \frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}} = q\left(1+\operatorname{tang}^2\frac{v}{2}\right).$$

D'où l'on conclut

$$r^2 dv = 2q^2\left(1+\operatorname{tang}^2\frac{v}{2}\right) d\operatorname{tang}\frac{v}{2},$$

et par intégration

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{v}{2} = \frac{k\sqrt{1+\mu}}{\sqrt{2q^3}}(t-\mathrm{T}),$$

T étant la valeur de t_0 pour laquelle v_0 est nulle, c'est-à-dire l'instant du passage au périhélie.

Cette équation, où v varie de $-\pi$ à $+\pi$ en passant par zéro et par suite $\frac{v}{2}$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, n'a qu'une racine réelle, le premier membre croissant toujours quand $\operatorname{tang}\frac{v}{2}$ croît de $-\infty$ à $+\infty$. Elle en a toujours une, et, comme elle ne renferme qu'un paramètre, son second membre, on a pu construire une Table, dite *Table de Barker*, donnant la valeur de v pour chaque valeur du second membre ou inversement.

La Table de Barker, reproduite par Gauss dans le *Theoria motus*, donne les valeurs de v qui correspondent à des valeurs

données de

$$\frac{75k\sqrt{1+\mu}(t-T)}{\sqrt{2q^3}}.$$

Cette Table a été reproduite dans divers Ouvrages. Dans le Traité de la *Détermination des orbites* de M. Oppolzer, traduit en français par M. Pasquier, on a posé

$$M = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\tang\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\tang^3\frac{v}{2}\right),$$

et la Table donne M pour chaque valeur de v de 10″ en 10″.

122. Cas des orbites très allongées. — Nous avons montré au Chapitre VIII du I[er] Volume de cet Ouvrage que le calcul de l'anomalie vraie à une date donnée ne se fait pas avec une précision suffisante par la méthode ordinaire quand l'excentricité s'approche de l'unité. Gauss a ramené dans ce cas l'équation de Képler à une forme analogue à celle des orbites paraboliques.

Introduisons, au lieu de l'anomalie excentrique E et de son sinus, deux combinaisons linéaires u et v de ces quantités, en posant

$$\alpha E + \beta \sin E = u,$$
$$\alpha' E + \beta' \sin E = v,$$

et faisons

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = D.$$

L'équation de Képler deviendra

$$(5) \qquad \frac{\beta' + \alpha' e}{D} u - \frac{\beta + \alpha e}{D} v = \frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

équation qui, en faisant

$$\frac{u}{v} = A_1,$$

devient

$$\frac{\beta' + \alpha' e}{D} v A_1 - \frac{\beta + \alpha e}{D} v = \frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

Posons encore

$$v = B\sqrt{A_1};$$

l'équation de Képler aura la forme

$$\text{(6)}\qquad \frac{B}{D}\left[(\beta'+\alpha' e)A^{\frac{3}{2}}-(\beta+\alpha e)A^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

A et B sont des fonctions de E. Dans la pratique, E, dans les cas dont il s'agit, demeure aigu et ne grandit pas beaucoup. Si d'ailleurs la valeur de E était grande, la méthode ordinaire s'appliquerait sans inconvénients. Développons B en série suivant les puissances de E. Nous avons

$$B^2=\frac{(\alpha' E+\beta'\sin E)^3}{\alpha E+\beta\sin E}.$$

On peut déterminer les constantes α, β, α', β' de telle façon que B^2 soit sensiblement constant.

D'abord le dénominateur devra être du troisième ordre comme le numérateur, ce qui exige que $\beta=-\alpha$. Nous ferons $\alpha=1$ et $\beta=-1$. Nous aurons alors

$$B^2=\frac{6(\alpha'+\beta')^3-3\beta'(\alpha'+\beta')^2E^2+\frac{1}{2}\beta'^2(\alpha'+\beta')E^4+\frac{3}{20}\beta'(\alpha'+\beta')^2E^4\ldots}{1-\frac{1}{20}E^2+\frac{1}{840}E^4\ldots}.$$

Dans le quotient le terme en E^2 disparaîtra si l'on fait

$$\beta'=\frac{1}{10}(\alpha'+\beta')$$

ou

$$\alpha'=9\beta'.$$

Si en même temps nous faisons

$$\alpha'+\beta'=\frac{1}{\sqrt[3]{6}},$$

d'où

$$\beta'=\frac{1}{10\sqrt[3]{6}},\qquad \alpha'=\frac{9}{10\sqrt[3]{6}},$$

nous aurons

$$B^2=1+\frac{3}{1400}E^4\ldots,$$

d'où

$$B=1+\frac{3}{2800}E^4\ldots.$$

B est donc extrêmement voisin de 1, et comme cette fonction ne dépend pas de e, il est possible d'en construire une Table.

La valeur de A_1 est

$$A_1 = \sqrt[3]{6}\,\frac{E - \sin E}{\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E},$$

celle de B

$$B = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}\,\frac{\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E}{\sqrt{A_1}}.$$

Pour nous conformer aux notations de Gauss et nous débarrasser du facteur $\sqrt[3]{6}$, nous ferons

$$\frac{A_1}{\sqrt[3]{6}} = \frac{4A}{6};$$

nous aurons

$$(7)\qquad \begin{cases} 4A = 6\,\dfrac{E - \sin E}{\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E}, \\ B = \dfrac{\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E}{2\sqrt{A}}. \end{cases}$$

L'équation de Képler devient ainsi

$$(8)\qquad B\left[2(1-e)A^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{15}(1+9e)A^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour rendre possible l'emploi de la Table de Barker, posons

$$(9)\qquad A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5-5e}{1+9e}}\,\operatorname{tang}\frac{w}{2},$$

et, pour abréger, désignons par q la distance périhélie $a(1-e)$, qui au reste est mieux déterminée que chacun des facteurs a et $1-e$. L'équation (8) deviendra

$$(10)\qquad 75\operatorname{tang}\frac{w}{2} + 25\operatorname{tang}^3\frac{w}{2} = \frac{\alpha t}{B},$$

en posant, pour abréger,

$$(11)\qquad \alpha = \frac{75k\sqrt{1+9e}}{2\sqrt{5}\,q^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\mu}.$$

La résolution de cette équation est des plus simples : on fait d'abord $B = 1$, puis on détermine w par la Table de Barker, A par l'équation (9), d'où $\log B$ par une Table auxiliaire (Table I du *Theoria motus*). Généralement il suffira de recommencer le calcul au moyen de cette valeur de $\log B$.

Pour déduire de A l'anomalie vraie on procède comme il suit. Posant

$$\operatorname{tang}^2\frac{E}{2} = T,$$

on trouve

$$\frac{A}{T} = 1 - \frac{4}{5}A + \frac{8}{175}A^2 + \frac{8}{525}A^3 + \frac{1896}{336875}A^4 + \ldots,$$

de sorte que, A étant du second ordre par rapport à E,

$$\frac{A}{T} - 1 + \frac{4}{5}A$$

est du quatrième. Posant

$$\frac{A}{T} - 1 + \frac{4}{5}A = C,$$

on trouve

$$(12)\quad \operatorname{tang}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sqrt{\frac{A}{1-\frac{4}{5}A+C}} = \sqrt{\frac{5+5e}{1+9e}}\,\frac{\operatorname{tang}\frac{w}{2}}{\sqrt{1-\frac{4}{5}A+C}}$$

et aussi

$$(13)\quad r = q\,\frac{\cos^2\frac{E}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{q}{(1+T)\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{1-\frac{4}{5}A+C}{1+\frac{1}{5}A+C}\,\frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}}.$$

La Table (I) de l'Ouvrage de Gauss donne de $A = 0$ à $A = 0,3$, de millième en millième, les valeurs de $\log B$, de C et de T.

La valeur de T sert à déterminer le temps correspondant à une anomalie vraie v donnée. A cet effet, on calcule T par la formule ordinaire

$$T = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tang}^2\frac{v}{2};$$

on en conclut, par la Table, C et $\log B$, puis A par la relation

$$A = \frac{(1+C)T}{1+\frac{4}{5}T},$$

qui donne plus d'exactitude que la Table elle-même, puis on calcule t par l'équation (10). Si pour ce dernier calcul on veut employer la Table de Barker, on ne calcule pas A, mais directement w

par la relation

$$\tang \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+5e}{5+5e}} \sqrt{\frac{1+C}{1+\frac{4}{5}T}} \tang \frac{v}{2}.$$

123. Construction d'une éphéméride donnant les coordonnées équatoriales géocentriques. — Nous ne nous occuperons ici que de la partie du travail qui correspond à l'application des lois de Képler, réservant pour le Chapitre IX ce qui concerne l'application des corrections de parallaxe, de précession, d'aberration.

Ayant l'anomalie vraie v de l'astre, le rayon vecteur r mené du Soleil à l'astre, la longitude ☊ du nœud ascendant et l'inclinaison i du plan de l'orbite, la longitude ϖ du périhélie, on détermine d'abord les coordonnées rectangulaires écliptiques héliocentriques x_0, y_0, z_0 de la planète par les formules

$$\begin{aligned} x_0 &= r \cos u, \\ y_0 &= r \sin u \cos i, \\ z_0 &= r \sin u \sin i, \end{aligned}$$

où u est l'argument de la latitude donné par la formule

$$u = \varpi + v - \Omega,$$

en supposant que l'axe des x_0 passe par le nœud de l'orbite.

Faisons tourner ce système d'axes de façon à faire passer l'axe des x par l'équinoxe du printemps. Les nouvelles coordonnées x, y, z résulteront des premières par les relations

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \Omega - y_0 \sin \Omega, \\ y &= x_0 \sin \Omega + y_0 \cos \Omega, \\ z &= z_0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned}$$

Enfin, si x', y', z' sont les coordonnées équatoriales héliocentriques de l'astre, en supposant que l'axe des x' passe par le point vernal, on a, en désignant par ε l'obliquité de l'écliptique,

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon, \\ z &= y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon, \end{aligned}$$

ou

$$x' = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$
$$y' = r(\cos u \sin \Omega \cos \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin u \sin i \sin \varepsilon),$$
$$z' = r(\cos u \sin \Omega \sin \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin u \sin i \cos \varepsilon).$$

Si l'on introduit des quantités auxiliaires a, A, b, B, c, C définies par les équations

$$(14)\quad \begin{cases} \cos \Omega = a \sin A, \\ -\cos i \sin \Omega = a \cos A, \\ \sin \Omega \cos \varepsilon = b \sin B, \\ \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon = b \cos B, \\ \sin \Omega \sin \varepsilon = c \sin C, \\ \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin \Omega \cos \varepsilon = c \cos C. \end{cases}$$

Ces formules deviennent

$$(15)\quad \begin{cases} x' = ar \sin(A + u), \\ y' = br \sin(B + u), \\ z' = cr \sin(C + u). \end{cases}$$

Les coefficients a, b, c sont moindres que un en valeur absolue; on peut les prendre positifs; A, B, C sont alors déterminés. Pour calculer ces six quantités qui ont reçu le nom de *constantes de Gauss,* on peut soit utiliser immédiatement les formules (14) en employant les logarithmes d'addition, soit les rendre calculables par logarithmes, en posant

$$(16)\quad \begin{cases} \cos \Omega \cos i = n \cos N, \\ \sin i = n \sin N. \end{cases}$$

Elles deviennent

$$(17)\quad \begin{cases} a \sin A = \cos \Omega, \\ a \cos A = -\cos i \sin \Omega, \\ b \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon, \\ b \cos B = n \cos(N + \varepsilon), \\ c \sin C = \sin \Omega \sin \varepsilon, \\ c \cos C = n \sin(N + \varepsilon). \end{cases}$$

124. Cas des orbites elliptiques. — Les coordonnées x', y', z' peuvent encore s'exprimer, dans le cas d'une orbite elliptique, en fonction de l'anomalie excentrique E.

On y remplace d'abord u par $\omega + v$ et l'on pose

$$(18) \qquad A' = A + \omega, \qquad B' = B + \omega, \qquad C' = C + \omega,$$

$$(19) \qquad \begin{cases} x' = ar\sin(A' + v), \\ y' = br\sin(B' + v), \\ z' = cr\sin(C' + v). \end{cases}$$

On a trouvé

$$r\sin v = a_1 \cos\varphi \sin E,$$
$$r\cos v = a_1 \cos E - a_1 \sin\varphi,$$

a_1 désignant le demi grand axe de l'orbite, d'où

$$x' = a_1 a \sin A'(\cos E - \sin\varphi) + a_1 a \cos A' \cos\varphi \sin E,$$
$$y' = a_1 b \sin B'(\cos E - \sin\varphi) + a_1 b \cos B' \cos\varphi \sin E,$$
$$z' = a_1 c \sin C'(\cos E - \sin\varphi) + a_1 c \cos C' \cos\varphi \sin E.$$

Si l'on pose encore

$$(20) \qquad \begin{cases} a_1 a \sin A' = l \sin L, \\ a_1 a \cos A' \cos\varphi = l \cos L, \\ a_1 b \sin B' = m \sin M, \\ a_1 b \cos B' \cos\varphi = m \cos M, \\ a_1 c \sin C' = n \cos N, \\ a_1 c \cos C' \cos\varphi = n \cos N, \end{cases}$$

et en outre

$$(21) \qquad \begin{cases} -\ l \sin L \sin\varphi = \lambda, \\ -\ m \sin M \sin\varphi = \mu, \\ -\ n \sin N \sin\varphi = \nu, \end{cases}$$

on aura

$$(22) \qquad \begin{cases} x' = l\sin(L + E) + \lambda, \\ y' = m\sin(M + E) + \mu, \\ z' = n\sin(N + E) + \nu. \end{cases}$$

On n'emploiera ces dernières équations que dans le cas de la construction d'une éphéméride relative à un grand nombre de dates, et si l'on n'a pas besoin des valeurs de v pour d'autres motifs.

125. Coordonnées géocentriques. — Ayant les coordonnées équatoriales héliocentriques de la planète, on en conclura les coordonnées rectangulaires géocentriques comme il suit :

On trouvera dans les éphémérides astronomiques les coor-

données équatoriales X, Y, Z du Soleil : on aura, en désignant par ξ, η, ζ les coordonnées géocentriques cherchées,

$$(23) \qquad \begin{cases} \xi = x + X, \\ \eta = y + Y, \\ \zeta = z + Z; \end{cases}$$

puis, désignant par Δ la distance de l'astre à la Terre, par α et δ l'ascension droite et la déclinaison géocentrique, on aura

$$(24) \qquad \begin{cases} \xi = \Delta \cos\delta \cos\alpha, \\ \eta = \Delta \cos\delta \sin\alpha, \\ \zeta = \Delta \sin\delta, \end{cases}$$

d'où l'on tirera α, δ, Δ.

126. Autres formules pour le calcul des constantes de Gauss. — On peut arriver aux équations (15) par une marche qui conduit à des calculs numériques entièrement différents de telle façon que l'application de deux procédés donne une précieuse vérification.

A cet effet, on commence par déduire des éléments de l'orbite des quantités analogues déterminant la position de cette orbite par rapport à l'équateur et non plus par rapport à l'écliptique.

Soient (*fig.* 25)

γEq l'équateur,
γEc l'écliptique,
Ω_0 et Ω les nœuds ascendants de l'orbite sur ces deux plans et aussi les longitudes de ces nœuds,
i_0 et i les inclinaisons de cette orbite $\Omega_0\Omega$O sur ces mêmes plans,
ε l'obliquité de l'écliptique.

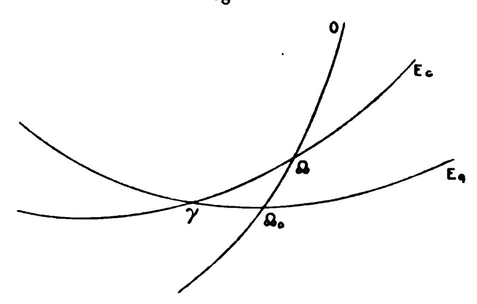
Désignons par Δ_0 l'arc $\Omega_0\Omega$. Les arcs Ω_0, Δ_0 et i_0 sont définis en fonction de Ω, i, ε par les formules de Delambre

$$(25) \qquad \begin{cases} \cos\dfrac{\Delta_0 - \Omega_0}{2} \sin\dfrac{i_0}{2} = \sin\dfrac{\varepsilon + i}{2} \cos\dfrac{\Omega}{2}, \\ \sin\dfrac{\Delta_0 - \Omega_0}{2} \sin\dfrac{i_0}{2} = \sin\dfrac{\varepsilon - i}{2} \sin\dfrac{\Omega}{2}, \\ \cos\dfrac{\Delta_0 + \Omega_0}{2} \cos\dfrac{i_0}{2} = \cos\dfrac{\varepsilon + i}{2} \cos\dfrac{\Omega}{2}, \\ \sin\dfrac{\Delta_0 + \Omega_0}{2} \cos\dfrac{i_0}{2} = \cos\dfrac{\varepsilon - i}{2} \sin\dfrac{\Omega}{2}. \end{cases}$$

Ces angles une fois connus, on a par rapport à des axes de coordonnées héliocentriques équatoriales dont Ox_0 passe par le nœud Ω_0

$$x_0 = r\cos(u + \Delta_0),$$
$$y_0 = r\sin(u + \Delta_0)\cos i_0,$$
$$z_0 = r\sin(u + \Delta_0)\sin i_0.$$

Fig. 25.



Si l'on fait tourner les axes Ox_0, y_0, z_0 autour de Oz_0 de façon à amener Ox_0 sur la ligne $O\gamma$ de l'équinoxe du printemps, les nouvelles coordonnées x', y', z' ont la valeur

$$x' = x_0\cos\Omega_0 - y_0\sin\Omega_0,$$
$$y' = x_0\sin\Omega_0 + y_0\cos\Omega_0,$$
$$z' = z_0,$$

ou

$$x' = r[\cos\Omega_0\cos(u + \Delta_0) - \sin\Omega_0\cos i_0\sin(u + \Delta_0)],$$
$$y' = r[\sin\Omega_0\cos(u + \Delta_0) + \cos\Omega_0\cos i_0\sin(u + \Delta_0)],$$
$$z' = r\sin i_0\sin(u + \Delta_0).$$

Posant

$$-\sin\Omega_0\cos i_0 = a'\cos A',$$
$$\cos\Omega_0 = a'\sin A',$$
$$\cos\Omega_0\cos i_0 = b'\cos B',$$
$$\sin\Omega_0 = b'\sin B',$$

les valeurs précédentes deviennent

$$(26)\qquad \begin{cases} x' = a'r\sin(u + \Delta_0 + A'), \\ y' = b'r\sin(u + \Delta_0 + B'), \\ z' = r\sin i_0\sin(u + \Delta_0). \end{cases}$$

La comparaison de ces formules aux formules (15) montre que l'on a les vérifications suivantes :

$$(27)\qquad \begin{cases} a' = a, & b' = b, & \sin i_0 = c, \\ \Delta_0 + A' = A, & \Delta_0 + B' = B, & \Delta_0 = C. \end{cases}$$

127. Relations différentielles entre les éléments et les coordonnées géocentriques. — Soient, comme ci-dessus :

λ et β les coordonnées géocentriques de l'astre,
Ω et i la longitude du nœud et l'inclinaison de son orbite,
r et ω le rayon vecteur mené du Soleil à l'astre et l'argument de la latitude héliocentrique. (Pour plus de commodité nous employons les mots *longitude* et *latitude;* mais le plan fondamental est supposé quelconque; il est entendu seulement que les éléments Ω, i, ω, ϖ sont rapportés à ce plan.)

Toute variation des éléments de l'ellipse même, a, e et de l'anomalie moyenne M_0 à l'origine du temps produit des variations dr et $d\omega$ de r et ω. Regardons d'abord ces quantités dr et $d\omega$ comme connues ainsi que les variations $d\Omega$ et di de Ω et i; cherchons les variations qui en résultent pour λ et β.

Soient ρ la projection sur l'écliptique de la distance Δ de l'astre à la Terre, R et L le rayon vecteur et la longitude du Soleil. Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées rectangulaires géocentriques écliptiques de l'astre, l'axe des ξ passant par le nœud. On a, en négligeant la latitude du Soleil, les formules suivantes :

$$(28)\qquad \begin{cases} \xi = \rho\cos(\lambda - \Omega) = r\cos\omega + R\cos(L - \Omega), \\ \eta = \rho\sin(\lambda - \Omega) = r\sin\omega\cos i + R\sin(L - \Omega), \\ \zeta = \rho\,\mathrm{tang}\,\beta = r\sin\omega\sin i. \end{cases}$$

On en conclut

$$(29)\qquad \begin{cases} d(\lambda - \Omega) = \dfrac{-\sin(\lambda - \Omega)\,d\xi + \cos(\lambda - \Omega)\,d\eta}{\rho}, \\ d\beta = \dfrac{-\sin\beta\cos(\lambda - \Omega)\,d\xi - \sin\beta\sin(\lambda - \Omega)\,d\eta + \cos\beta\,d\zeta}{\Delta} \end{cases}$$

D'autre part, les formules (28) donnent

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi}{\partial r} = \cos\omega, &&\frac{\partial\xi}{\partial\omega} = -r\sin\omega, &&\frac{\partial\xi}{\partial i} = 0, &&\frac{\partial\xi}{\partial\Omega} = +R\sin(L-\Omega),\\
&\frac{\partial\eta}{\partial r} = \sin\omega\cos i, &&\frac{\partial\eta}{\partial\omega} = r\cos\omega\cos i, &&\frac{\partial\eta}{\partial i} = -r\sin\omega\sin i, &&\frac{\partial\eta}{\partial\Omega} = -R\cos(L-\Omega),\\
&\frac{\partial\zeta}{\partial r} = \sin\omega\sin i, &&\frac{\partial\zeta}{\partial\omega} = r\cos\omega\sin i, &&\frac{\partial\zeta}{\partial i} = r\sin\omega\cos i, &&\frac{\partial\zeta}{\partial\Omega} = 0.
\end{aligned}\right.$$

On en conclut immédiatement

$$(31)\quad \rho\frac{\partial\lambda}{\partial r} = -\cos\omega\sin(\lambda-\Omega)+\sin\omega\cos(\lambda-\Omega)\cos i = \frac{R}{r}\sin(\lambda-L),$$

$$(32)\quad \rho\frac{\partial\lambda}{\partial\omega} = r[\sin\omega\sin(\lambda-\Omega)+\cos\omega\cos(\lambda-\Omega)\cos i],$$

$$(33)\quad \frac{\partial\lambda}{\partial i} = -\frac{r}{\rho}\sin\omega\sin i\cos(\lambda-\Omega) = -\operatorname{tang}\beta\cos(\lambda-\Omega),$$

$$(34)\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\Omega} = 1-\frac{R}{\rho}\cos(\lambda-L),$$

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial r} &= \frac{1}{\Delta}[-\sin\beta\cos\omega\cos(\lambda-\Omega)\\
&\qquad -\sin\beta\sin\omega\sin(\lambda-\Omega)\cos i+\cos\beta\sin\omega\sin i],\\
&= \frac{R}{\Delta r}\cos(\lambda-L)\sin\beta = \frac{R}{r\rho}\cos(\lambda-L)\sin\beta\cos\beta,
\end{aligned}\right.$$

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial\omega} &= \frac{r}{\Delta}[\sin\beta\cos(\lambda-\Omega)\sin\omega\\
&\qquad -\sin\beta\sin(\lambda-\Omega)\cos\omega\cos i+\cos\beta\cos\omega\sin i],
\end{aligned}\right.$$

$$(37)\quad \frac{\partial\beta}{\partial i} = \frac{r}{\Delta}[\sin\beta\sin(\lambda-\Omega)\sin\omega\sin i+\cos\beta\sin\omega\cos i],$$

$$(38)\quad \frac{\partial\beta}{\partial\Omega} = \frac{R}{\Delta}\sin\beta\sin(\lambda-L).$$

Les formules (32), (36), (37) se transforment comme il suit.

Soient (*fig.* 26) :

$\gamma\Omega A$ l'écliptique sur une sphère ayant pour centre S le centre du Soleil;

ΩC l'orbite de l'astre;

Ω et i la longitude $\gamma\Omega$ de son nœud ascendant et son inclinaison;

P la position de la planète dans l'espace;

T celle de la Terre.

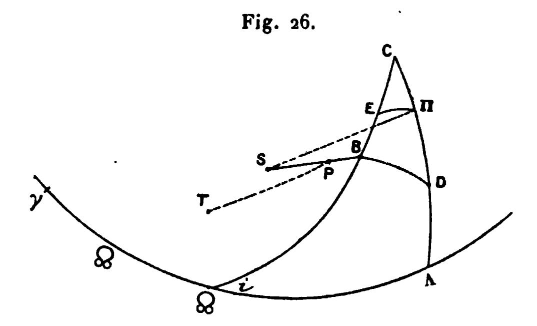
La sphère est coupée par une droite SΠ parallèle à TP en un point Π, et si l'arc CΠΛ est perpendiculaire à l'écliptique, γΛ est la longitude λ, ΠΛ la latitude β. Soient M et N les arcs ☊C et ΛC.

On a immédiatement les relations

$$\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{tang}(\lambda - \Omega)}{\cos i}, \qquad \operatorname{tang} N = \sin(\lambda - \Omega)\operatorname{tang} i,$$

$$\cos M = \cos(\lambda - \Omega)\cos N, \qquad \sin N = \sin M \sin i.$$

Fig. 26.



Au moyen de ces relations les formules (32) et (37) deviennent de suite

$$(32^*) \qquad \rho\frac{\partial\lambda}{\partial\omega} = \frac{r\sin(\lambda - \Omega)\cos(M - \omega)}{\sin M},$$

$$(37^*) \qquad \frac{\partial\beta}{\partial i} = \frac{r}{\Delta}\,\frac{\sin\omega\cos i\cos(N - \beta)}{\cos N}.$$

Pour simplifier la formule (36), il suffit d'y remplacer ω par M — (M — ω). Elle devient

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\omega} = {} & \cos(M - \omega)[\ \sin M \sin\beta\cos(\lambda - \Omega) \\ & \qquad - \cos M\sin\beta\sin(\lambda - \Omega)\cos i + \cos M\cos\beta\sin i] \\ & + \sin(M - \omega)[-\cos M\sin\beta\cos(\lambda - \Omega) \\ & \qquad - \sin M\sin\beta\sin(\lambda - \Omega)\cos i + \sin M\cos\beta\sin i].\end{aligned}$$

La considération du triangle ☊CΛ réduit successivement le multiplicateur de cos(M — ω) à

$$\sin\beta\sin N\cos C + \cos\beta\cos M\sin i,$$

à

$$\sin i[\sin\beta\sin N\cos(\lambda - \Omega) + \cos M\cos\beta],$$

enfin à

$$\sin i \cos(\lambda - \Omega) \cos(N - \beta),$$

et le multiplicateur de $\sin(M - \omega)$ à

$$-\sin\beta \cos N + \sin M \cos\beta \sin i$$

et à

$$\sin(N - \beta),$$

de sorte que la formule (36) devient

$$(36^*) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \frac{r}{\Delta}[&\sin i \cos(M - \omega)\cos(\lambda - \Omega)\cos(N - \beta) \\ &+ \sin(M - \omega)\sin(N - \beta)]. \end{aligned} \right.$$

Si l'on mène en B l'arc BD perpendiculaire à ☊C et en Π l'arc ΠE perpendiculaire à CA et que l'on désigne par P et Q les arcs CD et CE, on a

$$\tang P = \frac{\tang(M - \omega)}{\sin i \cos(\lambda - \Omega)}, \qquad \tang Q = \frac{\tang(N - \beta)}{\sin i \cos(\lambda - \Omega)},$$

et la formule (36*) devient

$$(36^{**}) \quad \frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \frac{r}{\Delta}\,\frac{\sin(M - \omega)\cos(N - \beta - P)}{\sin P} = \frac{r}{\Delta}\,\frac{\sin(N - \beta)\cos(M - \omega - Q)}{\sin Q}.$$

L'introduction de M dans la formule (31) donne

$$\rho\frac{\partial\lambda}{\partial r} = -\frac{\sin(\lambda - \Omega)\sin(M - \omega)}{\sin M},$$

et la comparaison avec la même formule (31)

$$R\sin(\lambda - L)\sin M = r\sin(\lambda - \Omega)\sin(M - \omega).$$

Si l'on tient compte de cette valeur dans la formule (32*), elle se simplifie un peu et devient

$$(32^{**}) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\omega} = \frac{R}{\rho}\sin(\lambda - L)\cot(M - \omega).$$

Le calcul de ces huit dérivées partielles, dont nous désignerons les valeurs par A, B, C, D, A′, B′, C′, D′, fait connaître les coefficients des relations

$$\begin{aligned} d\lambda &= A\,dr + B\,d\omega + C\,di + D\,d\Omega, \\ d\beta &= A'\,dr + B'\,d\omega + C'\,di + D'\,d\Omega. \end{aligned}$$

D'autre part, on a, en désignant par ϖ la longitude du périhélie, par v l'anomalie vraie

$$\omega = \varpi - \Omega + v,$$

d'où

$$d\omega = d\varpi - d\Omega + dv,$$

de sorte que

$$(37)\quad \begin{cases} d\lambda = \mathrm{A}\,dr + \mathrm{B}\,dv + \mathrm{B}\,d\varpi + \mathrm{C}\,di + (\mathrm{D} - \mathrm{B})\,d\Omega, \\ d\beta = \mathrm{A}'\,dr + \mathrm{B}'\,dv + \mathrm{B}'\,d\varpi + \mathrm{C}'\,di + (\mathrm{D} - \mathrm{B}')\,d\Omega. \end{cases}$$

Enfin r et v dépendent dans une orbite elliptique du demi-axe a, de l'excentricité e et de l'anomalie moyenne M_0 à l'origine du temps. Il est commode de représenter e par $\sin\varphi$, d'introduire, au lieu de a, le moyen mouvement n donné par la relation

$$n^2 a^3 = k^2(1 + \mu),$$

d'où

$$(38)\quad \frac{2\,dn}{n} + \frac{3\,da}{a} = 0.$$

En désignant par E l'anomalie excentrique, la différentiation donne sans peine

$$(39)\quad \begin{cases} dv = \dfrac{a^2 \cos\varphi}{r^2}\,d\mathrm{M} + \dfrac{a^2}{r^2}(2 - e\cos\mathrm{E} - e^2)\sin\mathrm{E}\,d\varphi, \\ dr = \dfrac{r}{a}\,da + a\,\mathrm{tang}\,\varphi \sin v\,d\mathrm{M} - a\cos\varphi\cos v\,d\varphi. \end{cases}$$

Enfin

$$(40)\quad d\mathrm{M} = d\mathrm{M}_0 + t\,dn.$$

La substitution de ces valeurs donne les relations cherchées sous la forme

$$(41)\quad \begin{cases} d\lambda = \mathcal{A}\,d\mathrm{M}_0 + \mathcal{B}\,dn + \mathcal{C}\,d\varphi + \mathcal{D}\,d\varpi + \mathcal{E}\,di + \mathcal{F}\,d\Omega, \\ d\beta = \mathcal{A}'\,d\mathrm{M}_0 + \mathcal{B}'\,dn + \mathcal{C}'\,d\varphi + \mathcal{D}'\,d\varpi + \mathcal{E}'\,di + \mathcal{F}'\,d\Omega. \end{cases}$$

Toutes les différentielles représentant des arcs, ces relations sont les mêmes, qu'on les exprime en secondes ou en parties du rayon.

Ces formules, comme les formules ordinaires du mouvement elliptique, sont d'une application peu précise dans les orbites presque paraboliques.

CHAPITRE VIII.

DÉTERMINATION D'UNE ELLIPSE PAR DEUX RAYONS VECTEURS ET L'INTERVALLE DE TEMPS MIS PAR L'ASTRE A PASSER DE L'UN A L'AUTRE. — MÊME PROBLÈME POUR LA PARABOLE. — THÉORÈME D'EULER. — THÉORÈME DE LAMBERT. — RAPPORT DES AIRES DES TRIANGLES COMPRIS ENTRE TROIS RAYONS VECTEURS. — EXPRESSIONS DES DISTANCES D'UNE PLANÈTE A LA TERRE A TROIS ÉPOQUES, EN FONCTION DES AIRES DES TRIANGLES COMPRIS ENTRE LES RAYONS VECTEURS MENÉS DU SOLEIL A LA PLANÈTE A CES TROIS ÉPOQUES.

---

128. Problème fondamental pour les déterminations d'orbites. — Gauss a résolu dans le *Theoria motus corporum cœlestium* plusieurs problèmes relatifs à la détermination d'une section conique décrite par un astre autour du Soleil, en supposant donnés des éléments, en nombre suffisant, dans le plan de l'orbite. Nous nous occuperons du suivant qui a la plus grande importance pour la détermination des éléments d'une orbite elliptique entièrement inconnue, problème qui fera l'objet du Chapitre IX de cet Ouvrage.

129. Déterminer l'ellipse décrite par une planète, connaissant, en grandeur et en position, deux rayons vecteurs menés de cette planète au Soleil et le temps que la planète a mis à aller d'une des positions à l'autre. — Réduction du problème a deux équations a deux inconnues. — Soit θ le produit de l'intervalle de temps par la constante k de Gauss; soient pour la première position r', v', u' le rayon vecteur, l'anomalie vraie, l'anomalie excentrique; soient r'', v'', u'' les quantités analogues pour la deuxième position.

Nous désignerons par s le rapport du secteur elliptique compris entre les rayons vecteurs r', r'' au triangle rectiligne compris entre les mêmes rayons. Les quantités r', r'', θ, $v''-v'$ sont données.

Nous prendrons pour inconnues

$$v''+v', \quad u''+u', \quad u''-u', \quad a, \quad e, \quad s.$$

D'après la loi des aires, le double de l'aire du secteur elliptique est $\theta\sqrt{a(1-e^2)}$; d'autre part, la différence des anomalies moyennes est $\theta a^{-\frac{3}{2}}$. Il s'ensuit que les six équations du problème sont

$$(1) \qquad s.r'r''\sin(v''-v') = \theta\sqrt{a(1-e^2)},$$

$$(2) \qquad u''-u'-2e\sin\frac{u''-u'}{2}\cos\frac{u''+u'}{2} = \theta a^{-\frac{3}{2}},$$

et les suivantes [§ 82 (6)]

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{\frac{r'}{a}}\sin\frac{v'}{2} = \sqrt{1+e}\sin\frac{u'}{2}, & \sqrt{\frac{r''}{a}}\sin\frac{v''}{2} = \sqrt{1+e}\sin\frac{u''}{2}, \\ \sqrt{\frac{r'}{a}}\cos\frac{v'}{2} = \sqrt{1-e}\cos\frac{u'}{2}, & \sqrt{\frac{r''}{a}}\cos\frac{v''}{2} = \sqrt{1-e}\cos\frac{u''}{2}; \end{array} \right.$$

d'où l'on tire aisément

$$(3) \qquad \sqrt{r'r''}\sin\frac{v''-v'}{2} = a\sqrt{1-e^2}\sin\frac{u''-u'}{2},$$

$$(4) \qquad \sqrt{r'r''}\cos\frac{v''-v'}{2} = a\cos\frac{u''-u'}{2} - ae\cos\frac{u''+u'}{2},$$

$$(5) \qquad r'+r'' = 2a - 2ae\cos\frac{u''+u'}{2}\cos\frac{u''-u'}{2}.$$

Les équations (1) à (5) ne contenant pas $v''+v'$ suffisent à résoudre le problème.

On peut aisément éliminer entre ces équations les quantités

$$ae\cos\frac{u''+u'}{2}, \quad a, \quad a\sqrt{1-e^2}.$$

A cet effet, on tire la première de ces quantités de l'équation (4), la dernière de l'équation (1) et l'on substitue dans les trois autres. On trouve

$$(2') \qquad u''-u'-\sin(u''-u')+\frac{2}{a}\sqrt{r'r''}\sin\frac{u''-u'}{2}\cos\frac{v''-v'}{2} = \frac{\theta}{a^{\frac{3}{2}}},$$

$$(3') \qquad 1 = 2\frac{\sqrt{a}}{\theta}s\sqrt{r'r''}\cos\frac{v''-v'}{2}\sin\frac{u''-u'}{2},$$

$$(5') \qquad r'+r'' = 2a\sin^2\frac{u''-u'}{2} + 2\sqrt{r'r''}\cos\frac{u''-u'}{2}\cos\frac{v''-v'}{2}.$$

En tenant compte de l'équation (3′), l'équation (2′) devient d'abord

$$u'' - u' - \sin(u'' - u') = \frac{\theta}{a^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{1}{s}\right),$$

puis

$$(2'') \qquad 1 - \frac{1}{s} = \frac{\theta^2}{s^3\left(2\sqrt{r'r''}\cos\frac{v''-v'}{2}\right)^3}\,\frac{u''-u'-\sin(u''-u')}{\sin^3(u''-u')},$$

et l'équation (5′) devient de même

$$(5'') \qquad r' + r'' - 2\sqrt{r'r''}\cos\frac{v''-v'}{2}\cos\frac{u''-u'}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\theta^2}{2s^2r'r''\cos^2\frac{v''-v'}{2}}.$$

Ces équations ne renferment plus que les inconnues s et $u'' - u'$.

On en abrège un peu l'écriture par le procédé suivant, dû à Encke. Soit $\varkappa$ la corde du secteur elliptique; posons

$$(6) \qquad \sin\gamma = \frac{\varkappa}{r' + r''},$$

d'où, en observant que $\varkappa^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos(v'' - v')$

$$(7) \qquad \cos\gamma = \frac{2\sqrt{r'r''}\cos\frac{v''-v'}{2}}{r' + r''}.$$

L'équation (2″) s'écrit, par l'introduction de γ, que la formule (7) permet de calculer,

$$(\text{A}) \qquad 1 - \frac{1}{s} = \frac{\theta^2}{(r'+r'')^3\cos^3\gamma}\,\frac{u''-u'-\sin(u''-u')}{\sin^3\frac{u''-u'}{2}}\,\frac{1}{s^3},$$

et l'équation (5′), où l'on remplace au premier membre $\cos\frac{u''-u}{2}$ par $1 - 2\sin^2\frac{u''-u'}{4}$ donne d'abord

$$\frac{\theta^2}{s^2} = 2r'r''\cos^2\frac{v''-v'}{2}\left[2(r'+r'')\sin^2\frac{\gamma}{2} + 4\sqrt{r'r''}\sin^2\frac{u''-u'}{4}\cos\frac{v''-v'}{2}\right],$$

ou, en tenant compte de nouveau de la valeur de $\cos\gamma$,

$$(\text{B}) \qquad \sin^2\frac{u''-u'}{4} = \frac{\theta^2}{s^2}\,\frac{1}{(r'+r'')^3\cos^3\gamma} - \frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}.$$

130. Résolution des deux équations A et B quand l'angle des rayons vecteurs est petit. — Pour résoudre ces équations, posons

$$x = \sin^2 \frac{u'' - u'}{4}, \qquad X = \frac{u'' - u' - \sin(u'' - u')}{\sin^3 \frac{u'' - u'}{2}}$$

et, d'autre part,

$$(8) \qquad m^2 = \frac{\theta^2}{(r' + r'')^3 \cos^3 \gamma}, \qquad j = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma}.$$

Les équations (A) et (B) deviennent

$$(\text{A}') \qquad 1 = \frac{1}{s} + m^2 \frac{X}{s^3},$$

$$(\text{B}') \qquad x = \frac{m^2}{s^2} - j.$$

Or X est une fonction de x que l'on peut réduire en table. Pour des raisons que nous verrons au paragraphe suivant, Gauss pose

$$(9) \qquad \frac{10}{9} \frac{1}{X} = \frac{5}{6} - x + \xi,$$

et ξ est une très petite quantité, sensiblement égale à $\frac{2}{35} x^2$.

L'équation B′ donne ainsi

$$\frac{5}{6} + \xi + j - \frac{m^2}{s^2} = \frac{10}{9} \frac{1}{X}.$$

ξ, étant un très petit nombre, pourra être supposé nul en première approximation et servir de base à un calcul d'approximations successives. Posant

$$(10) \qquad \eta = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + \xi + j},$$

cette équation s'écrit

$$\frac{m^2}{\eta} - \frac{m^2}{s^2} = \frac{10}{9} \frac{1}{X},$$

et l'élimination de X entre cette équation et l'équation A′ donne

$$(11) \qquad \eta = \frac{s^2(s - 1)}{s + \frac{1}{9}}.$$

La marche du calcul apparaît d'elle-même. Faisant d'abord $\xi = 0$

l'équation (10) donne η, puis l'équation (11) qui n'a qu'une racine positive donne s; l'équation B' donne x d'où l'on déduit une nouvelle valeur approchée de ξ. En raison de la petitesse de s, deux ou trois approximations suffisent à en trouver la valeur définitive, d'où celle de x et, par suite, celle de $u''-u'$.

Gauss a donné, dans le *Theoria motus*, une Table qui, pour chaque valeur de η de 0 à 0,6, donne $\log s^2$. L'étendue de cette Table est plus que suffisante pour le calcul de l'orbite des planètes. En effet, dans une première détermination d'orbite, $v'-v$ étant petit, γ l'est aussi, ainsi que j : de sorte que η diffère peu de $\frac{6}{5}m^2$ ou de $\frac{6}{5}\frac{k^2(t''-t')^2}{(r'+r'')^3}$; or k est moindre que 0,02; $t''-t'$ n'atteindra pas 100 jours; de sorte que $k(t''-t')$ est moindre que 2. Comme r' et r'' valent au moins 2 pour les planètes comprises entre Mars et Jupiter, les seules en cause ici, on voit que η est très petit. Gauss, dans une autre Table, donne les valeurs de ξ qui correspondent aux valeurs de x de 0 à 0,3.

131. Développement de X en série suivant les puissances de x. — Pour abréger, posons

$$\frac{u''-u'}{2}=g.$$

Nous aurons

$$(12)\qquad x=\sin^2\frac{g}{2},\qquad X=\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}.$$

On obtient aisément un développement de X en série. On a en effet

$$X\sin^3 g=2g-\sin 2g,$$

d'où

$$\sin g\frac{dX}{dg}+3X\cos g=4,$$

et comme

$$\frac{dx}{dg}=\frac{1}{2}\sin g,$$

on en conclut

$$\frac{1}{2}\sin^2 g\frac{dX}{dx}+3X\cos g=4$$

ou

$$(13)\qquad (2x-2x^2)\frac{dX}{dx}+(3-6x)X-4=0,$$

et, si l'on pose

$$X=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots,$$

on obtient, par substitution,

$$\alpha_0 = \frac{4}{3}, \qquad \alpha_n = \frac{2n+4}{2n+3}\alpha_{n-1},$$

de sorte que

$$(14) \qquad \frac{3}{4}X = 1 + \frac{6}{5}x + \frac{6.8}{5.7}x^2 + \frac{6.8.10}{5.7.9}x^3 + \ldots.$$

Si l'on néglige les termes en x^2, on a

$$\frac{3}{4}X = \frac{1}{1-\frac{6}{5}x},$$

d'où

$$\frac{4}{3}\frac{1}{X} = 1 - \frac{6}{5}x$$

et

$$\frac{10}{9}\frac{1}{X} = \frac{5}{6} - x,$$

ce qui montre que ξ est de l'ordre de x^2. D'autre part, si l'on néglige les termes du troisième ordre, la relation

$$\frac{4}{3}\frac{1}{X} = 1 - \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}\xi$$

donne

$$\frac{3}{4}X = 1 + \frac{6}{5}x - \frac{6}{5}\xi + \frac{36}{25}x^2,$$

formule qui, par comparaison avec la formule (14), donne

$$\xi = \frac{2}{35}x^2.$$

132. Développement de X en fraction continue. — Gauss a, d'ailleurs, été conduit à l'introduction de ξ d'une façon bien plus naturelle par le développement de X en fraction continue.

Si l'on désigne par $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

on a

$$\frac{3}{4}X = F\left(3, 1, \frac{5}{2}, x\right).$$

Rappelons que α, β, γ, x s'appellent les premier, deuxième, etc. éléments de la série.

Si l'on pose

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, y+1, x)}{F(\alpha, \beta, y, x)} = G(\alpha, \beta, y, x),$$

on a, en remarquant que dans la fonction F on peut intervertir les deux premiers éléments,

$$\frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{F(\beta, \alpha+1, \gamma+1, x)}{F(\beta, \alpha, \gamma, x)} = G(\beta, \alpha, \gamma, x).$$

Or on vérifie immédiatement la relation

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x),$$

qui, divisée par son premier terme, donne

$$1 - \frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x\, G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)$$

ou encore

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x\, G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}.$$

L'application réitérée de cette formule donne

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \ddots}}},$$

où

$$a = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \qquad b = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$c = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \qquad d = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},$$

$$e = \frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+4)(\gamma+5)}, \qquad f = \frac{(\beta+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)}.$$

Faisant dans ces formules $\beta = 0$, remplaçant γ par $\gamma - 1$, et observant que $F(\alpha, 0, \gamma, x) = 1$, on obtient

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = G(\alpha, 0, \gamma-1, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a'x}{1 - \cfrac{b'x}{\ddots}}},$$

où

$$a' = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad b' = \frac{(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)},$$

$$c' = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, \qquad d' = \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, par suite, en faisant $\alpha = 3$, $\gamma = \frac{5}{2}$,

$$\frac{3}{4}X = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{6}{5}x}{1 + \cfrac{\frac{2}{5.7}x}{1 - \cfrac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \ldots}}}},$$

ce qui conduit naturellement à poser

$$\frac{3}{4}X = \frac{1}{1 - \frac{6}{5}(x-\xi)}$$

et montre assez que le premier terme du développement de ξ en série est $\frac{2}{5.7}x^2$.

Gauss a donné de remarquables développements de ξ en fraction continue, dont on trouvera la démonstration dans son célèbre Mémoire sur la *série hypergéométrique* (Gauss, *Werke*, t. III, p. 137).

133. Détermination des éléments de l'ellipse d'après la valeur de x. — Posons, pour abréger,

$$\frac{v''-v'}{2} = f, \qquad \frac{v''+v'}{2} = F, \qquad \frac{u''-u'}{2} = g, \qquad \frac{u''+u'}{2} = G;$$

observons que f est donné, que la connaissance de x entraîne celle de g, tandis que, au contraire, F et G sont encore inconnus, ainsi que a et e.

Les équations initiales (E) (n° 129), si l'on pose $e = \sin\varphi$, deviennent

$$(15)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{r'}{a}}\sin\left(\dfrac{F}{2}-\dfrac{f}{2}\right) = \left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{G}{2}-\dfrac{g}{2}\right), \\ \sqrt{\dfrac{r'}{a}}\cos\left(\dfrac{F}{2}-\dfrac{f}{2}\right) = \left(\cos\dfrac{\varphi}{2}-\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{G}{2}-\dfrac{g}{2}\right), \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{r''}{a}}\sin\left(\dfrac{F}{2}+\dfrac{f}{2}\right) = \left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{G}{2}+\dfrac{g}{2}\right), \\ \sqrt{\dfrac{r''}{a}}\cos\left(\dfrac{F}{2}+\dfrac{f}{2}\right) = \left(\cos\dfrac{\varphi}{2}-\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{G}{2}+\dfrac{g}{2}\right), \end{cases}$$

En combinant par addition soit les équations (15), soit les équations (16), après les avoir multipliées, ou bien par $\sin\left(\frac{F}{2}+\frac{g}{2}\right)$ et $+\cos\left(\frac{F}{2}+\frac{g}{2}\right)$, ou bien par $-\cos\left(\frac{F}{2}+\frac{g}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{F}{2}+\frac{g}{2}\right)$, ou bien par $\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{g}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{g}{2}\right)$, ou bien par $-\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{g}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{g}{2}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{r'}{a}}\cos\frac{f+g}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{G}{2}+g\right)-\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{F}{2}+\frac{G}{2}\right),\\
\sqrt{\frac{r''}{a}}\cos\frac{f+g}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{G}{2}-g\right)-\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{F}{2}+\frac{G}{2}\right),\\
\sqrt{\frac{r'}{a}}\sin\frac{f+g}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{G}{2}+g\right)-\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{F}{2}+\frac{G}{2}\right),\\
\sqrt{\frac{r''}{a}}\sin\frac{f+g}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{G}{2}-\frac{F}{2}+g\right)+\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{F}{2}+\frac{G}{2}\right),\\
\sqrt{\frac{r'}{a}}\cos\frac{f-g}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{G}{2}\right)\qquad-\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{F}{2}+\frac{G}{2}-g\right),\\
\sqrt{\frac{r''}{a}}\cos\frac{f-g}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{G}{2}\right)\qquad-\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{F}{2}+\frac{G}{2}+g\right),\\
\sqrt{\frac{r'}{a}}\sin\frac{f-g}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{G}{2}\right)\qquad-\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{F}{2}+\frac{G}{2}-g\right),\\
\sqrt{\frac{r''}{a}}\sin\frac{f-g}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{G}{2}-\frac{F}{2}\right)\qquad+\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{F}{2}+\frac{G}{2}+g\right).
\end{aligned}$$

Combinant ensuite chaque équation de rang impair avec la suivante, on trouve

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}
\left(\sqrt{\frac{r''}{a}}-\sqrt{\frac{r'}{a}}\right)\cos\frac{f+g}{2} &= 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin g\sin\frac{F-G}{2},\\
\left(\sqrt{\frac{r''}{a}}+\sqrt{\frac{r'}{a}}\right)\sin\frac{f+g}{2} &= 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin g\cos\frac{F-G}{2},\\
\left(\sqrt{\frac{r''}{a}}-\sqrt{\frac{r'}{a}}\right)\cos\frac{f-g}{2} &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin g\sin\frac{F+G}{2},\\
\left(\sqrt{\frac{r''}{a}}+\sqrt{\frac{r'}{a}}\right)\sin\frac{f-g}{2} &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin g\cos\frac{F+G}{2}.
\end{aligned}\right.$$

Le calcul numérique est facilité en faisant

$$\sqrt[4]{\frac{r''}{r'}} = \tang(45^\circ + \omega),$$

d'où

$$\sqrt{r''} - \sqrt{r'} = \sqrt[4]{r'r''}\left(\sqrt[4]{\frac{r''}{r'}} - \sqrt[4]{\frac{r'}{r''}}\right) = \sqrt[4]{r'r''}\,\frac{\sin 2\omega}{\frac{1}{2}\cos 2\omega},$$

$$\sqrt{r''} + \sqrt{r'} = \sqrt[4]{r'r''}\left(\sqrt[4]{\frac{r''}{r'}} + \sqrt[4]{\frac{r'}{r''}}\right) = \sqrt[4]{r'r''}\,\frac{1}{\frac{1}{2}\cos 2\omega},$$

ce qui donne aux équations (17) la forme

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos\frac{f+g}{2}\tang 2\omega &= \sqrt[4]{\frac{a^2}{r'r''}}\cos\frac{\varphi}{2}\sin g\sin\frac{F-G}{2},\\
\frac{\sin\frac{f+g}{2}}{\cos 2\omega} &= \sqrt[4]{\frac{a^2}{r'r''}}\cos\frac{\varphi}{2}\sin g\cos\frac{F-G}{2},\\
\cos\frac{f-g}{2}\tang 2\omega &= \sqrt[4]{\frac{a^2}{r'r''}}\sin\frac{\varphi}{2}\sin g\sin\frac{F+G}{2},\\
\frac{\sin\frac{f-g}{2}}{\cos 2\omega} &= \sqrt[4]{\frac{a^2}{r'r''}}\sin\frac{\varphi}{2}\sin g\cos\frac{F+G}{2},
\end{aligned}\right.$$

où les premiers membres sont connus. On en conclura

$$\sqrt[4]{\frac{a^2}{r'r''}}\cos\frac{\varphi}{2}\sin g,\quad \sqrt[4]{\frac{a^2}{r'r''}}\sin\frac{\varphi}{2}\sin g,\quad \tang\frac{F-G}{2},\quad \tang\frac{F+G}{2},$$

et, par suite, a, φ, F, f. On observera que $\cos\frac{\varphi}{2}$ et $\sin\frac{\varphi}{2}$ sont positifs; on connaît le signe de g. Les signes des sin et cos de $\frac{F \pm G}{2}$ sont donc déterminés sans ambiguïté.

La valeur de $a\sin^2 g$ doit être égale à

$$2\left(l + \sin^2\frac{g}{2}\right)\cos f\sqrt{r'r''},$$

identique à la suivante, que donne immédiatement la formule (5')

$$a\sin^2 g = 2\sqrt{r'r''}\cos f\left(j + \sin^2\frac{g}{2}\right),$$

et cette formule peut servir à vérifier tout le calcul.

134. Cas de la parabole. — Le problème se simplifie beaucoup si la trajectoire est une parabole. Ayant

$$r' = \frac{p}{2\cos^2\frac{v'}{2}}, \qquad r'' = \frac{p}{2\cos^2\frac{v''}{2}},$$

on en conclut

$$\sqrt{\frac{p}{2r'}} = \cos\left(\frac{F}{2} - \frac{f}{2}\right), \qquad \sqrt{\frac{p}{2r''}} = \cos\left(\frac{F}{2} + \frac{f}{2}\right),$$

de sorte que p et F sont déterminés si l'on donne r', r'' et f.

En multipliant ces deux équations membre à membre, on a

$$\frac{p}{\sqrt{r'r''}} = \cos F + \cos f.$$

En les élevant au carré et additionnant, on trouve

$$\frac{p(r''+r')}{2r'r''} = \cos^2\frac{F-f}{2} + \cos^2\frac{F+f}{2} = 1 + \cos F \cos f.$$

L'élimination de F donne

$$(19) \qquad p = \frac{2r'r''\sin^2 f}{r' + r'' - 2\sqrt{r'r''}\cos f}.$$

On a aussi

$$\sqrt{\frac{r''}{r'}} = \frac{\cos\left(\frac{F}{2} - \frac{f}{2}\right)}{\cos\left(\frac{F}{2} + \frac{f}{2}\right)} = \frac{1 + \tang\frac{F}{2}\tang\frac{f}{2}}{1 - \tang\frac{F}{2}\tang\frac{f}{2}},$$

d'où

$$(20) \qquad \tang\frac{F}{2} = \frac{\sqrt{r''} - \sqrt{r'}}{\sqrt{r''} + \sqrt{r'}}\cot\frac{f}{2} = \sin 2\omega \cot\frac{f}{2}.$$

D'autre part, les équations (1) et (2) sont remplacées par

$$(21) \qquad \begin{gathered} sr'r''\sin 2f = \theta\sqrt{p}, \\ \tang\frac{v''}{2} - \tang\frac{v'}{2} + \frac{1}{3}\left(\tang^3\frac{v''}{2} - \tang^3\frac{v'}{2}\right) = \frac{2\theta}{p^{\frac{3}{2}}}. \end{gathered}$$

Cette dernière s'écrit

$$\left(\tang\frac{v''}{2} - \tang\frac{v'}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{3}\left(\tang^2\frac{v''}{2} + \tang\frac{v''}{2}\tang\frac{v'}{2} + \tang^2\frac{v'}{2}\right)\right] = \frac{2\theta}{p^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\frac{\sin\frac{v''-v'}{2}}{\cos\frac{v''}{2}\cos\frac{v'}{2}}\left(\frac{1}{3\cos^2\frac{v''}{2}}+\frac{1}{3\cos^2\frac{v'}{2}}+\frac{1}{3}\,\frac{\cos\frac{v''-v'}{2}}{\cos\frac{v''}{2}\cos\frac{v'}{2}}\right)=\frac{2\theta}{p^{\frac{3}{2}}},$$

ou encore

$$\frac{2\sqrt{r'r''}\sin f}{p}\left(\frac{2r''}{3p}+\frac{2r'}{3p}+\frac{2\cos f\sqrt{r'r''}}{3p}\right)=\frac{2\theta}{p^{\frac{3}{2}}},$$

ou enfin, en tirant $r'+r''$ de l'équation (19),

$$\theta=\frac{2r'r''\sin f\cos f}{\sqrt{p}}+\frac{4(r'r'')^{\frac{3}{2}}\sin^3 f}{3p^{\frac{3}{2}}}. \tag{22}$$

D'autre part, la valeur ci-dessus de p par l'introduction de l'angle γ, au moyen de

$$r'+r''=2\sqrt{r'r''}\cos f\,\frac{1}{\cos\gamma},$$

devient

$$p=\frac{\sqrt{r'r''}\sin^2 f}{\cos f\left(\frac{1}{\cos\gamma}-1\right)}=\frac{\sqrt{r'r''}\sin^2 f}{2j\cos f}.$$

L'équation (22) devient donc

$$\theta=2\sqrt{2j}\,(r'r'')^{\frac{3}{4}}\cos^{\frac{3}{2}}f+\tfrac{8}{3}\sqrt{2}\,(r'r'')^{\frac{3}{4}}\cos^{\frac{3}{2}}f.j^{\frac{3}{2}}. \tag{23}$$

Posant

$$m^2=\frac{\theta^2}{(r'+r'')^3\cos^3\gamma}=\frac{\theta^2}{8(r'r'')^{\frac{3}{2}}\cos^3 f},\qquad m=\frac{\theta}{2\sqrt{2}(r'r'')^{\frac{3}{4}}\cos^{\frac{3}{2}}f},$$

on a

$$m=j^{\frac{1}{2}}+\tfrac{4}{3}j^{\frac{3}{2}}. \tag{24}$$

D'autre part, si dans les équations (A', B'), n° 130, on fait $x=0$, ce qui donne

$$X=\frac{4}{3},$$

on a

$$s=\frac{m}{\sqrt{j}},\qquad 1=\frac{\sqrt{j}}{m}+\frac{\sqrt{j^3}}{m}X,$$

de sorte que l'équation (24), relative à une orbite parabolique, se déduit des équations relatives à l'orbite elliptique, en faisant $x = 0$.

L'équation (24) permet aussi d'exprimer s en fonction de m ou de j; elle donne

$$s = 1 + \frac{4}{3}j = \frac{1 + 2\,\text{séc}\,\gamma}{3} = \frac{1}{3} + \frac{r' + r''}{3\sqrt{r'r''}\cos f},$$

$$1 = \frac{1}{s} + \frac{4}{3}\frac{m^2}{s^3},$$

qui, combinée avec la précédente, redonne

$$s = \frac{m}{\sqrt{j}}.$$

On voit que s s'exprime simplement en fonction de r', r'', f; il n'est pas nécessaire d'introduire θ. Si l'on veut une valeur de s où entre θ, on pourra prendre l'équation (5''), qui devient

$$(25) \qquad s^2 = \frac{\theta^2}{2r'r''\cos^2 f\left(r' + r'' - 2\sqrt{r'r''}\cos f\right)}.$$

Enfin, si dans l'équation (22) on remplace p par la valeur (19), on trouve

$$(26) \qquad \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(r' + r'' + \sqrt{r'r''}\cos f\right)\left(r' + r'' - 2\sqrt{r'r''}\cos f\right)^{\frac{1}{2}}.$$

135. Théorème d'Euler. — Euler a montré que, dans une orbite parabolique, il existe une relation entre la somme de deux rayons vecteurs, la corde qui joint leurs extrémités et le temps employé à aller de l'une à l'autre, et cette relation est indépendante de tout autre élément. L'équation (24) donne immédiatement cette relation, puisque

$$m = \frac{\theta}{(r' + r'')^{\frac{3}{2}}\cos^{\frac{3}{2}}\gamma},$$

de sorte que cette équation (24) peut encore s'écrire

$$(27) \qquad \frac{\theta}{(r' + r'')^{\frac{3}{2}}\cos^{\frac{3}{2}}\gamma} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos^{\frac{1}{2}}\gamma} + \frac{4}{3}\,\frac{\sin^3\frac{\gamma}{2}}{\cos^{\frac{3}{2}}\gamma}$$

ou

$$\theta = (r'+r'')^{\frac{3}{2}} \sin\frac{\gamma}{2}\cos\gamma + \frac{4}{3}(r'+r'')^{\frac{3}{2}}\sin^3\frac{\gamma}{2} = \frac{(r'+r'')^{\frac{3}{2}}}{3}\sin\frac{\gamma}{2}(2+\cos\gamma).$$

Posant

$$\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} = u,$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2} = v,$$

on a

$$\theta = \frac{1}{6}(r'+r'')^{\frac{3}{2}}(u-v)(u^2+v^2+uv) = \frac{1}{6}(r'+r'')^{\frac{3}{2}}(u^3-v^3),$$

et comme

$$u = \sqrt{1+\sin\gamma} = \frac{(r'+r''+x)^{\frac{1}{2}}}{(r'+r'')^{\frac{1}{2}}},$$

$$v = \sqrt{1-\sin\gamma} = \frac{(r'+r''-x)^{\frac{1}{2}}}{(r'+r'')^{\frac{1}{2}}},$$

il s'ensuit que

(28) $$6\theta = (r'+r''+x)^{\frac{3}{2}} - (r'+r''-x)^{\frac{3}{2}}.$$

136. Détermination de la corde, dans une orbite parabolique, d'après la somme des rayons vecteurs et l'intervalle de temps. — L'équation d'Euler sert à trouver x quand on connaît $r'+r''$ et θ; mais le plus commode est de la reprendre sous la forme (27), qui s'écrit aussi

$$\frac{6\theta}{(r'+r'')^{\frac{3}{2}}} = 6\sin\frac{\gamma}{2} - 4\sin^3\frac{\gamma}{2}.$$

Divisons les deux membres par $2^{\frac{3}{2}}$ et posons

(29) $$\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{2}} = \sin z,$$

nous aurons

(30) $$\frac{6\theta}{2^{\frac{3}{2}}(r'+r'')^{\frac{3}{2}}} = \sin 3z.$$

L'angle γ étant aigu, $\frac{\gamma}{2}$ est moindre que $\frac{\pi}{4}$; donc $\sin z$ est moindre

que $\frac{1}{2}$; il s'ensuit que $3z$ est moindre que $\frac{\pi}{2}$. Il n'y a donc qu'une valeur admissible de $3z$ et, par suite, de z et de γ.

Pour calculer la corde x, il faudrait de z déduire γ, après quoi on aurait

$$x = (r' + r'')\sin\gamma,$$

ou

$$x = (r' + r'')2\sqrt{2}\sin z\sqrt{1 - 2\sin^2 z} = (r' + r'')2^{\frac{3}{2}}\sin z\sqrt{\cos 2z},$$

et comme

$$r' + r'' = \frac{6\theta}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{r' + r''}}\operatorname{coséc} 3z,$$

on conclut

$$(31)\qquad x = \frac{2\theta}{\sqrt{r' + r''}}\,\frac{3\sin z}{\sin 3z}\sqrt{\cos 2z}.$$

Le facteur $\frac{3\sin z}{\sin 3z}\sqrt{\cos 2z}$, très voisin de un quand θ est petit, a été réduit en Table ayant pour argument $\frac{2\theta}{(r' + r'')^{\frac{3}{2}}}$. (Oppolzer, *Traité des orbites,* Table VII). Si μ désigne ce facteur, on a

$$(32)\qquad x = \frac{2\theta}{\sqrt{r' + r''}}\mu.$$

137. Théorème de Lambert. — Le théorème d'Euler a été étendu par Lambert à l'ellipse et à l'hyperbole. C'est, dans ces deux derniers cas, une relation entre la somme $r' + r''$ de deux rayons vecteurs, la corde x qui joint leurs extrémités, le temps que l'astre a mis à aller de l'une à l'autre et le demi-grand axe; cette relation est indépendante de l'excentricité. Nous nous bornerons au cas de l'ellipse. On a

$$x^2 = (r''\cos v'' - r'\cos v')^2 + (r''\sin v'' - r'\sin v')^2,$$

et comme

$$r\cos v = a\cos u - ae, \qquad r\sin v = b\sin u = a\cos\varphi\sin u,$$

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2(\cos u'' - \cos u')^2 + a^2\cos^2\varphi(\sin u'' - \sin u')^2 \\ &= 4a^2\sin^2 g\sin^2 G + 4a^2\cos^2\varphi\sin^2 g\cos^2 G = 4a^2\sin^2 g(1 - e^2\cos^2 G). \end{aligned}$$

Posons $\cos h = e\cos G$, et prenons h entre $0°$ et $180°$, nous aurons

$$\begin{aligned} x &= 2a\sin g\sin h, \\ r' + r'' &= 2a(1 - e\cos g\cos G) = 2a(1 - \cos h\cos g), \end{aligned}$$

d'où

$$r' + r'' - x = 2a[1 - \cos(h-g)] = 4a\sin^2\frac{h-g}{2},$$

$$r' + r'' + x = 2a[1 - \cos(h+g)] = 4a\sin^2\frac{h+g}{2}.$$

Enfin

$$kt = a^{\frac{3}{2}}(2g - 2e\sin g\cos G) = a^{\frac{3}{2}}(2g - 2\sin g\cos h)$$
$$= a^{\frac{3}{2}}[(h+g) - (h-g) - \sin(h+g) + \sin(h-g)],$$

et finalement

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = {} & \arc\cos\frac{2a-(r'+r'')-x}{2a} - \sin\arc\cos\frac{2a-(r'+r'')-x}{2a} \\ & - \arc\cos\frac{2a-(r'+r'')+x}{2a} + \sin\arc\cos\frac{2a-(r'+r'')+x}{2a}. \end{aligned}\right.$$

La différence $h - g$ est tout à fait déterminée, car on a

$$\sqrt{r'r''}\cos f = a(\cos g - \cos h) = 2a\sin\frac{h-g}{2}\sin\frac{h+g}{2};$$

or h et g sont $< 180°$ ainsi que $\frac{h+g}{2}$; donc $\sin\frac{h-g}{2}$ a le signe de $\cos f$. Mais $h+g$ a deux valeurs. Cela tient au fond à ce que par deux points donnés on peut mener deux ellipses qui aient un foyer donné et même grand axe; car l'autre foyer est l'un des deux points communs à deux cercles ayant les deux points donnés pour centre et pour rayons respectifs les différences entre le grand axe et les distances des deux points au premier foyer.

138. Expressions approchées des rapports des aires de deux triangles compris entre trois rayons vecteurs consécutifs. — Nous supposons que ces angles ont le centre du Soleil et une position d'une planète pour sommets communs, et pour troisièmes sommets deux autres positions de cette planète.

Soient, par rapport à deux axes rectangulaires ayant pour centre le centre du Soleil et situés dans le plan de l'orbite, x, y, x', y', x'', y'' les coordonnées de trois positions successives de la planète, r, r', r'' leurs rayons vecteurs, t, t', t'' les dates des observations exprimées en jours moyens, k la constante de Gauss.

Posons

$$k(t''-t')=\theta,\qquad k(t''-t)=\theta',\qquad k(t'-t)=\theta''.$$

Les coordonnées x, y, x', y', x'', y'' satisfont aux équations du mouvement elliptique (Chap. XI)

$$(34)\qquad \frac{d^2X}{d\theta^2}+\frac{X}{R^3}=0,\qquad \frac{d^2Y}{d\theta^2}+\frac{Y}{R^3}=0.$$

Si l'on considère que x, y sont les valeurs de X, Y pour une époque précédant de θ'' celle qui correspond aux valeurs x', y', on a, par la formule de Taylor,

$$x=x'-\theta''\frac{dx'}{d\theta'}+\frac{\theta''^2}{1.2}\frac{d^2x'}{d\theta'^2}-\frac{\theta''^3}{6}\frac{d^3x'}{d\theta'^3}+\frac{\theta''^4}{24}\frac{d^4x'}{d\theta'^4}+\ldots,$$
$$y=y'-\theta''\frac{dy'}{d\theta'}+\frac{\theta''^2}{1.2}\frac{d^2y'}{d\theta'^2}-\frac{\theta''^3}{6}\frac{d^3y'}{d\theta'^3}+\frac{\theta''^4}{24}\frac{d^4y'}{d\theta'^4}+\ldots$$

et de même

$$x''=x'+\theta\frac{dx'}{d\theta'}+\frac{\theta^2}{1.2}\frac{d^2x'}{d\theta'^2}+\frac{\theta^3}{6}\frac{d^3x'}{d\theta'^3}+\frac{\theta^4}{24}\frac{d^4x'}{d\theta'^4}+\ldots,$$
$$y''=y'+\theta\frac{dy'}{d\theta'}+\frac{\theta^2}{1.2}\frac{d^2y'}{d\theta'^2}+\frac{\theta^3}{6}\frac{d^3y'}{d\theta'^3}+\frac{\theta^4}{24}\frac{d^4y'}{d\theta'^4}+\ldots.$$

Or on a par les formules (34)

$$\frac{d^2x'}{d\theta'^2}=-\frac{x'}{r'^3},\quad \frac{d^3x'}{d\theta'^3}=-\frac{1}{r'^3}\frac{dx'}{d\theta'}+3\frac{x'}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'},\quad \frac{d^4x'}{d\theta'^4}=\frac{6}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'}\frac{dx'}{d\theta'}+\ldots,$$
$$\frac{d^2y'}{d\theta'^2}=-\frac{y'}{r'^3},\quad \frac{d^3y'}{d\theta'^3}=-\frac{1}{r'^3}\frac{dy'}{d\theta'}+3\frac{y'}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'},\quad \frac{d^4y'}{d\theta'^4}=\frac{6}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'}\frac{dy'}{d\theta'}+\ldots;$$

d'où

$$(35)\qquad \begin{cases} x=ax'-b\dfrac{dx'}{d\theta'}, & y=ay'-b\dfrac{dy'}{d\theta'},\\ x''=a''x'+b''\dfrac{dx'}{d\theta'}, & y''=a''y'+b''\dfrac{dy'}{d\theta'}, \end{cases}$$

en posant

$$(36)\qquad \begin{cases} a=1-\dfrac{\theta''^2}{2}\dfrac{1}{r'^3}-\dfrac{\theta''^3}{2}\dfrac{1}{r'^4}\dfrac{dr'}{d\theta'}+\ldots,\\ b=\theta''-\dfrac{\theta''^3}{6}\dfrac{1}{r'^3}-\dfrac{\theta''^4}{4}\dfrac{1}{r'^4}\dfrac{dr'}{d\theta'}+\ldots,\\ a''=1-\dfrac{\theta^2}{2}\dfrac{1}{r'^3}+\dfrac{\theta^3}{2}\dfrac{1}{r'^4}\dfrac{dr'}{d\theta'}+\ldots,\\ b''=\theta-\dfrac{\theta^3}{6}\dfrac{1}{r'^3}+\dfrac{\theta^4}{4}\dfrac{1}{r'^4}\dfrac{dr'}{d\theta'}+\ldots. \end{cases}$$

Désignant par $[r'r'']$, $[rr'']$, $[rr']$ les doubles des aires des triangles compris entre r' et r'', r et r'', r et r', on a

$$[r'r''] = x'y'' - y'x'', \qquad [rr''] = xy'' - yx'', \qquad [rr'] = xy' - yx',$$

d'où, en tenant compte des formules (35)

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} [r'r''] &= b''\left(x'\frac{dy'}{d\theta'} - y'\frac{dx'}{d\theta'}\right), \\ [rr'] &= b\left(x'\frac{dy'}{d\theta'} - y'\frac{dx'}{d\theta'}\right), \\ [rr''] &= (ab'' + ba'')\left(x'\frac{dy'}{d\theta'} - y'\frac{dx'}{d\theta'}\right). \end{aligned} \right.$$

La loi des aires donne, en négligeant la masse de la planète et désignant par p le paramètre de son orbite,

$$x'\frac{dy'}{d\theta'} - y'\frac{dx'}{d\theta'} = \sqrt{p}.$$

Donc

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} [r'r''] &= \theta\sqrt{p}\left[1 - \frac{\theta^2}{6}\frac{1}{r'^3} + \frac{\theta^3}{4}\frac{1}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'}\cdots\right], \\ [rr'] &= \theta''\sqrt{p}\left[1 - \frac{\theta''^2}{6}\frac{1}{r'^3} - \frac{\theta''^3}{4}\frac{1}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'}\cdots\right], \\ [rr''] &= \theta'\sqrt{p}\left[1 - \frac{\theta'^2}{6}\frac{1}{r'^3} + \frac{\theta'^2(\theta - \theta'')}{4}\frac{1}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'}\cdots\right], \end{aligned} \right.$$

formules dans lesquelles on n'a négligé que les termes du quatrième ordre au moins par rapport à θ, θ', θ''.

On en conclut immédiatement les développements des rapports des aires de deux quelconques des trois triangles, savoir

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{[r'r'']}{[rr'']} &= \frac{\theta}{\theta'}\left[1 - \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6}\frac{1}{r'^3} + \frac{\theta''(\theta'\theta'' - \theta^2)}{4}\frac{1}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'}\cdots\right], \\ \frac{[rr']}{[rr'']} &= \frac{\theta''}{\theta'}\left[1 - \frac{\theta''^2 - \theta'^2}{6}\frac{1}{r'^3} - \frac{\theta(\theta\theta' - \theta''^2)}{4}\frac{1}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'}\cdots\right], \\ \frac{[rr']}{[r'r'']} &= \frac{\theta''}{\theta}\left[1 - \frac{\theta''^2 - \theta^2}{6}\frac{1}{r'^3} - \frac{\theta^3 + \theta''^3}{4}\frac{1}{r'^4}\frac{dr'}{d\theta'}\cdots\right]. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions prennent une autre forme, non moins utile,

quand on y exprime r' et $\frac{dr'}{d\theta'}$ au moyen de r et r''. On a, à cet effet,

$$r = r' - \theta'' \frac{dr'}{d\theta'} + \ldots,$$

$$r'' = r' + \theta \frac{dr'}{d\theta'} + \ldots,$$

d'où, aux termes près du second ordre,

$$r' = \frac{\theta r + \theta'' r''}{\theta'} = \frac{r + r''}{2} + \frac{1}{2} \frac{\theta - \theta''}{\theta'} (r - r''), \qquad \frac{dr'}{d\theta'} = \frac{r'' - r}{\theta'}.$$

En observant que $r - r''$ est une petite quantité du premier ordre on a, toujours aux termes près du second ordre,

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{8}{(r + r'')^3}\left[1 - 3 \frac{\theta - \theta''}{\theta'} \frac{r - r''}{r + r''}\right],$$

et, aux termes près du premier ordre, successivement

$$\frac{1}{r'^4} = \frac{16}{(r + r'')^4}, \qquad \frac{1}{r'^4} \frac{dr'}{d\theta'} = \frac{16}{\theta'} \frac{r'' - r}{(r'' + r)^4}.$$

L'introduction de ces valeurs transforme, toujours aux termes près du quatrième ordre, les formules (39) dans les suivantes

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{[r'r'']}{[rr'']} &= \frac{\theta}{\theta'}\left[1 - \frac{4}{3} \frac{\theta^2 - \theta'^2}{(r + r'')^3} + 4 \frac{\theta^2 \theta''}{\theta'} \frac{r'' - r}{(r'' + r)^4}\right], \\ \frac{[rr']}{[rr'']} &= \frac{\theta''}{\theta'}\left[1 + \frac{4}{3} \frac{\theta'^2 - \theta''^2}{(r + r'')^3} - 4 \frac{\theta''^2 \theta}{\theta'} \frac{r'' - r)}{(r'' + r)^4}\right], \\ \frac{[rr']}{[r'r'']} &= \frac{\theta''}{\theta}\left[1 + \frac{4}{3} \frac{\theta^2 - \theta''^2}{(r + r'')^3} - 4\theta\theta'' \frac{r'' - r}{(r'' + r)^4}\right]. \end{aligned} \right.$$

Les formules (39) ont l'avantage d'exprimer le rapport des aires des triangles en fonction du seul rayon vecteur r', si l'on consent à négliger les termes du troisième ordre; les formules (40) ont l'inconvénient de dépendre des deux rayons vecteurs r et r'', mais elles sont exactes aux termes près du quatrième ordre. Ces formules seront de la plus grande importance dans la détermination de l'orbite d'une planète.

139. Problème relatif à la détermination des distances d'une planète ou d'une comète à la Terre. — On suppose que trois observations d'une planète ou d'une comète déterminent les direc-

tions des droites qui joignent les positions de l'astre à celles de la Terre aux instants de ces observations. On suppose, en outre, connus les rapports des aires des triangles compris entre les rayons vecteurs menés du Soleil à l'astre. On demande les distances de l'astre à la Terre aux trois instants considérés.

Prenons des axes de coordonnées rectangulaires ayant pour origine le Soleil, l'axe des x passant par le point vernal, l'axe des y par le point de l'écliptique dont la longitude est $+90°$, l'axe des z par le pôle nord de l'écliptique.

Si $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ sont les coordonnées rectangulaires de l'astre dans ces trois positions, ces trois points étant dans un plan passant par l'origine, leurs coordonnées satisfont à l'équation

$$(41) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

que nous écrirons sous les trois formes suivantes

$$(42) \qquad \begin{cases} x[y'z'' - z'y''] - x'[yz'' - zy''] + x''[yz' - zy'] = 0, \\ y[x'z'' - z'x''] - y'[xz'' - zx''] + y''[xz' - zx'] = 0, \\ z[x'y'' - y'x''] - z'[xy'' - yx''] + z''[xy' - yx'] = 0. \end{cases}$$

Les neuf crochets sont les projections sur les plans de coordonnées des doubles des aires des triangles qui ont pour sommets l'origine et deux des trois positions de l'astre. Soient $[rr']$, $[rr'']$, $[r'r'']$ les doubles des aires de ces trois triangles : les équations (42) deviendront

$$(43) \qquad \begin{cases} x[r'r''] - x'[rr''] + x''[rr'] = 0, \\ y[r'r''] - y'[rr''] + y''[rr'] = 0, \\ z[r'r''] - z'[rr''] + z''[rr'] = 0. \end{cases}$$

Désignons par n et n'' les rapports supposés connus des aires $[r'r'']$, $[rr']$ à $[rr'']$

$$(44) \qquad \frac{[r'r'']}{[rr'']} = n, \qquad \frac{[rr']}{[rr'']} = n''.$$

Enfin introduisons à la place des coordonnées rectilignes les coordonnées polaires. Les observations donnent les ascensions droites et des déclinaisons. Nous supposerons qu'on en ait d'abord

déduit, au moyen de l'obliquité de l'écliptique, les longitudes et latitudes géocentriques λ, λ', λ''; β, β', β''.

On a pour la première observation

$$(45)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos\lambda - \mathrm{R}\cos\mathrm{L}, \\ y = \rho\sin\lambda - \mathrm{R}\sin\mathrm{L}. \\ z = \rho\,\mathrm{tang}\,\beta, \end{cases}$$

ρ désignant la projection sur l'écliptique de la distance de la planète à la Terre, R la distance du Soleil à la Terre, L sa longitude. Nous avons supposé nulle la latitude de la Terre au moment de la première observation; au reste, nous verrons au Chapitre IX qu'on peut toujours s'arranger pour que cette hypothèse n'ait pas d'inconvénients. On a aussi des formules analogues à (45) pour les deux autres observations.

Les équations (43) deviennent

$$(46)\qquad \begin{cases} n\rho\cos\lambda - \rho'\cos\lambda' + n''\rho''\cos\lambda'' = n\mathrm{R}\cos\mathrm{L} - \mathrm{R}'\cos\mathrm{L}' + n''\mathrm{R}''\cos\mathrm{L}'', \\ n\rho\sin\lambda - \rho'\sin\lambda' + n''\rho''\sin\lambda'' = n\mathrm{R}\sin\mathrm{L} - \mathrm{R}'\sin\mathrm{L}' + n''\mathrm{R}''\sin\mathrm{L}'', \\ n\rho\,\mathrm{tang}\,\beta - \rho'\,\mathrm{tang}\,\beta' + n''\rho''\,\mathrm{tang}\,\beta'' = 0. \end{cases}$$

L'élimination de ρ et ρ'' donne, pour déterminer ρ', l'équation

$$(47)\qquad \begin{cases} \rho'[\mathrm{tang}\,\beta\sin(\lambda''-\lambda') - \mathrm{tang}\,\beta'\sin(\lambda''-\lambda) + \mathrm{tang}\,\beta''\sin(\lambda'-\lambda)] \\ \quad = n\mathrm{R}[-\mathrm{tang}\,\beta\sin(\lambda''-\mathrm{L}) + \mathrm{tang}\,\beta''\sin(\lambda-\mathrm{L})] \\ \quad - \mathrm{R}'[-\mathrm{tang}\,\beta\sin(\lambda''-\mathrm{L}') + \mathrm{tang}\,\beta''\sin(\lambda-\mathrm{L}')] \\ \quad + n''\mathrm{R}''[-\mathrm{tang}\,\beta\sin(\lambda''-\mathrm{L}'') + \mathrm{tang}\,\beta''\sin(\lambda-\mathrm{L}'')]. \end{cases}$$

Ayant ρ', on déduit des deux premières équations (46)

$$(48)\qquad \begin{cases} n\rho\sin(\lambda''-\lambda) = \rho'\sin(\lambda''-\lambda') + n\mathrm{R}\sin(\lambda''-\mathrm{L}) \\ \qquad - \mathrm{R}'\sin(\lambda''-\mathrm{L}') + n''\mathrm{R}''\sin(\lambda''-\mathrm{L}''), \\ n''\rho''\sin(\lambda''-\lambda) = \rho'\sin(\lambda'-\lambda) - n\mathrm{R}\sin(\lambda-\mathrm{L}) \\ \qquad + \mathrm{R}'\sin(\lambda-\mathrm{L}') - n''\mathrm{R}''\sin(\lambda-\mathrm{L}''). \end{cases}$$

Les équations (47) et (48) fournissent une solution de notre problème.

Il y a lieu de les préparer pour le calcul numérique. Ayant à apprécier l'ordre de grandeur de certaines quantités, nous regarderons comme quantités petites du premier ordre les intervalles de temps compris entre les observations.

140. Détermination de ρ', d'où ρ et ρ''. — Considérons le grand

cercle qui passe par les deux positions géocentriques extrêmes de l'astre, et représentons par K la longitude de son nœud, par I son inclinaison et par β_0 la latitude du point de ce cercle dont la longitude est λ'. K, I sont donnés par les formules

$$(49)\qquad \operatorname{tang}\beta = \sin(\lambda - K)\operatorname{tang} I, \qquad \operatorname{tang}\beta'' = \sin(\lambda'' - K)\operatorname{tang} I,$$

d'où l'on déduit, par addition et soustraction,

$$(50)\quad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\lambda+\lambda''}{2} - K\right)\operatorname{tang} I = \dfrac{\operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\beta''}{2\cos\dfrac{\lambda''-\lambda}{2}} = \dfrac{\sin(\beta''+\beta)}{2\cos\dfrac{\lambda''-\lambda}{2}\cos\beta\cos\beta''}, \\[2ex] \cos\left(\dfrac{\lambda+\lambda''}{2} - K\right)\operatorname{tang} I = \dfrac{\operatorname{tang}\beta'' - \operatorname{tang}\beta}{2\sin\dfrac{\lambda''-\lambda}{2}} = \dfrac{\sin(\beta''-\beta)}{2\sin\dfrac{\lambda''-\lambda}{2}\cos\beta\cos\beta''}, \end{cases}$$

formules commodes pour les calculs numériques.

On a ensuite

$$(51)\qquad \operatorname{tang}\beta_0 = \sin(\lambda' - K)\operatorname{tang} I.$$

Si au second membre de la formule (47) on remplace $\operatorname{tang}\beta$ et $\operatorname{tang}\beta''$ par les valeurs (49), l'expression entre crochets dépendant de L_q devient

$$\operatorname{tang} I[\sin(\lambda''-K)\sin(\lambda-L_q) - \sin(\lambda-K)\sin(\lambda''-L_q)]$$

ou

$$\operatorname{tang} I\left[\frac{1}{2}\cos(\lambda''-\lambda-K+L_q) - \frac{1}{2}\cos(\lambda''-\lambda+K-L_q)\right]$$

ou enfin

$$\operatorname{tang} I\sin(\lambda''-\lambda)\sin(K-L_q).$$

Les termes extrêmes du facteur de ρ' ont pour somme

$$\begin{aligned} &-\operatorname{tang} I[\sin(\lambda''-K)\sin(\lambda-\lambda') - \sin(\lambda-K)\sin(\lambda''-\lambda')] \\ &= +\operatorname{tang} I\sin(\lambda''-\lambda)\sin(\lambda'-K) = \operatorname{tang}\beta_0\sin(\lambda''-\lambda). \end{aligned}$$

En ajoutant cette somme au terme du milieu, on trouve le coefficient de ρ' égal à

$$\frac{\sin(\lambda''-\lambda)\sin(\beta_0-\beta')}{\cos\beta_0\cos\beta'}.$$

En divisant les deux membres de l'équation (47) par

$$\sin(\lambda''-\lambda)\operatorname{tang} I,$$

elle devient

$$\frac{\rho'\sin(\beta_0-\beta')}{\operatorname{tang} I\cos\beta_0\cos\beta'} = nR\sin(K-L) - R'\sin(K-L') + n''R''\sin(K-L'').$$

Nous poserons

$$(52)\qquad \begin{cases} a'_0 = \dfrac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\tang I \cos\beta_0 \cos\beta'}, & b' = \dfrac{R\sin(K - L)}{-a'_0}, \\ c' = \dfrac{R'\sin(K - L')}{-a'_0}, & d' = \dfrac{R''\sin(K - L'')}{-a'_0}, \end{cases}$$

et nous aurons pour ρ' la valeur

$$(53)\qquad \rho' = +b'n - c' + d'n''.$$

Les valeurs (48) de ρ et ρ'' se transforment comme il suit : Soient A et B l'ensemble des trois derniers termes du second membre de chacune d'elles.

Combinons la relation

$$-a'_0\rho' = nR\sin(K - L) - R'\sin(K - L') + n''R''\sin(K - L''),$$

avec la première des identités

$$\begin{aligned} A &= +nR\sin(\lambda'' - L) - R'\sin(\lambda'' - L') + n''R''\sin(\lambda'' - L''), \\ B &= -nR\sin(\lambda - L) + R'\sin(\lambda - L') - n''R''\sin(\lambda'' - L''). \end{aligned}$$

Nous avons par l'élimination de R''

$$\begin{aligned} &A\sin(K - L'') + a'_0\rho'\sin(\lambda'' - L'') \\ &\quad = nR[\sin(\lambda'' - L)\sin(K - L'') - \sin(\lambda'' - L'')\sin(K - L)] \\ &\qquad - R'[\sin(\lambda'' - L')\sin(K - L'') - \sin(\lambda'' - L'')\sin(K - L')] \\ &\quad = nR\sin(\lambda'' - K)\sin(L - L'') - R'\sin(\lambda'' - K)\sin(L' - L''), \end{aligned}$$

d'où

$$A = -a'_0\rho'\frac{\sin(\lambda'' - L'')}{\sin(K - L'')} + \frac{\sin(\lambda'' - K)}{\sin(K - L'')}nR\sin(L - L'')\left[1 - \frac{1}{n}\frac{R'\sin(L' - L'')}{R\sin(L - L'')}\right].$$

On voit de suite que l'on déduit B de A en remplaçant λ'' par $180° + \lambda$. Les équations (48) deviennent ainsi

$$(54)\qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{\rho'}{n}\left[\dfrac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda)} + \dfrac{a'_0}{\sin(\lambda'' - \lambda)}\dfrac{\sin(\lambda'' - L'')}{\sin(L'' - K)}\right] \\ \qquad + R\dfrac{\sin(L'' - L)}{\sin(\lambda'' - \lambda)}\dfrac{\sin(\lambda'' - K)}{\sin(L'' - K)}\left[1 - \dfrac{N}{n}\right], \\ \rho'' = \dfrac{\rho'}{n''}\left[\dfrac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} - \dfrac{a'_0}{\sin(\lambda'' - \lambda)}\dfrac{\sin(\lambda - L)}{\sin(L - K)}\right] \\ \qquad + R''\dfrac{\sin(L'' - L)}{\sin\lambda'' - \lambda)}\dfrac{\sin(\lambda - K)}{\sin(L - K)}\left[1 - \dfrac{N''}{n''}\right], \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(55)\qquad N = \frac{[R'R'']}{[RR'']}, \qquad N'' = \frac{[RR']}{[RR'']},$$

et

$$(56)\qquad \left\{ \begin{aligned} [R'R''] &= R'R'' \sin(L''-L'),\\ [RR'] &= RR' \sin(L'-L),\\ [RR''] &= RR'' \sin(L''-L). \end{aligned} \right.$$

141. Signification des coefficients a'_0 et c'. — Le coefficient M de ρ' dans l'équation (47) était

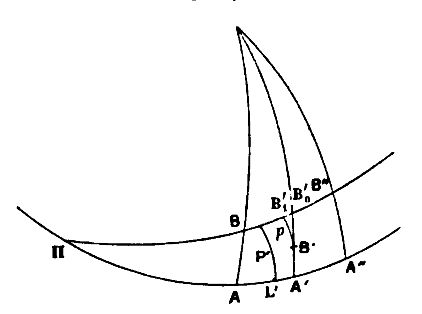
$$(57)\qquad M = \frac{\sin(\lambda''-\lambda)\sin(\beta_0-\beta')}{\cos\beta_0\cos\beta'},$$

et le coefficient c'_1 de $-R'$ au second membre

$$(58)\qquad \sin(K-L')\,\mathrm{tang}\,I\,\sin(\lambda''-\lambda).$$

Soit (*fig.* 27), au moment de la seconde observation, p la distance $B'B'_1$, vue de la Terre, de l'astre B' au grand cercle qui

Fig. 27.



joint les positions extrêmes B, B''; menons les cercles de latitude EBA, EB'A', EB''A''; désignons par Π le nœud de l'orbite et sa longitude. Les triangles ΠBA, ΠB''A'' donnent

$$\begin{aligned} \mathrm{tang}(\lambda-\Pi) &= \mathrm{tang}\,\Pi B\cos I,\\ \mathrm{tang}(\lambda''-\Pi) &= \mathrm{tang}\,\Pi B''\cos I, \end{aligned}$$

d'où, par soustraction,

$$\sin(\lambda''-\lambda) = \frac{\cos(\lambda-\Pi)\cos(\lambda''-\Pi)\cos I\sin BB''}{\cos\Pi B\cos\Pi B''} = \frac{\cos I\sin BB''}{\cos\beta\cos\beta''}.$$

On a aussi, par le triangle $B'B'_1B'_0$

$$\sin(\beta_0-\beta')=\frac{\sin p}{\sin B'_0}=\frac{\sin p\cos\beta_0}{\cos I}.$$

Donc

$$M=\sin p\sin BB''\frac{\cos(\lambda-\Pi)\cos(\lambda''-\Pi)}{\cos\beta_0\cos\beta'\cos\Pi B\cos\Pi B''}=\frac{\sin p\sin BB''}{\cos\beta\cos\beta'\cos\beta''}.$$

Soit de même, au moment de la seconde observation, P' la distance, sur la sphère, du Soleil au cercle qui joint les positions extrêmes de l'astre, on a (58)

$$c'_1=\sin(K-L')\tang I\sin(\lambda''-\lambda)=\frac{\sin(K-L')\sin I\sin BB''}{\cos\beta\cos\beta''}.$$

Or

$$\sin P'=\sin(L'-K)\sin I.$$

Donc

$$c'_1=-\frac{\sin P'\sin BB''}{\cos\beta\cos\beta''}.$$

142. Théorème de Lambert sur la courbure de l'orbite apparente. — On vérifie aisément la relation identique

$$Nb'-c'+N''d'=0.$$

On en conclut, en remplaçant n, n'', N, N″ en fonction de θ, θ'' par des valeurs approchées,

$$\rho'=\left[\frac{\theta(\theta'^2-\theta^2)}{6\theta'}b'+\frac{\theta''(\theta'^2-\theta''^2)}{6\theta'}d'\right]\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{R'^3}\right).$$

Si l'on remarque que b' et d' se déduisent de c' en donnant au temps des accroissements θ'', θ et que l'on néglige les termes en $\frac{dc'}{d\theta'}$, cette relation devient

$$\rho'=-\frac{\theta\theta''}{2}c'\left(\frac{1}{R'^3}-\frac{1}{r'^3}\right).$$

Remplaçant c' par $\frac{c'_1R'}{M}$, on obtient

$$\frac{\rho'\operatorname{séc}\beta'}{R'}=\frac{\theta\theta''}{2}\frac{\sin P'}{\sin p'}\left(\frac{1}{R'^3}-\frac{1}{r'^3}\right).$$

D'où il suit que P' et p' sont de même signe ou de signe contraire suivant que R' est moindre ou plus grand que r', ce qui est le théorème de Lambert.

143. Calcul direct de ρ et de ρ''. — De même que nous avons tiré directement des équations (46) la valeur de ρ', de même on en pourrait aussi tirer ρ ou ρ''. Nous utiliserons au n° **151** les équations obtenues que nous écrirons sous la forme

$$(59)\qquad \begin{cases} n\rho \operatorname{séc}\beta = nb - c + n''d, \\ n''\rho'' \operatorname{séc}\beta'' = nb'' - c'' + n''d''. \end{cases}$$

Nous n'écrirons pas explicitement les valeurs des coefficients b, c, d, b'', c'', d''; il est clair qu'on les obtient comme b', c', d', le dénominateur M étant le même au facteur près, $\cos\beta$ ou $\cos\beta''$.

144. Relation entre ρ'' et ρ. — Dans la méthode d'Olbers pour la détermination d'une orbite parabolique, on utilise une relation entre ρ et ρ'' qui se déduit des équations (46) par l'élimination de ρ' et de R'. On obtient

$$(60)\qquad \rho'' = M'\frac{n}{n''}\rho + RM''\left(\frac{n}{n''} - \frac{N}{N''}\right),$$

en posant

$$M' = \frac{\operatorname{tang}\beta'\sin(\lambda - L') - \operatorname{tang}\beta\sin(\lambda' - L')}{\operatorname{tang}\beta''\sin(\lambda' - L') - \operatorname{tang}\beta'\sin(\lambda'' - L')},$$

$$M'' = \frac{\operatorname{tang}\beta'\sin(L' - L)}{\operatorname{tang}\beta''\sin(\lambda' - L') - \operatorname{tang}\beta'\sin(\lambda'' - L')}.$$

On calcule M' et M'' en introduisant l'angle I' que fait avec l'écliptique le grand cercle qui joint les positions de l'astre et du Soleil au moment de la seconde observation. On a alors

$$\operatorname{tang} I' = \frac{\operatorname{tang}\beta'}{\sin(\lambda' - L')}.$$

Si l'on pose, en outre,

$$\operatorname{tang} I'\sin(\lambda - L') = \operatorname{tang} w,$$

$$\operatorname{tang} I'\sin(\lambda'' - L') = \operatorname{tang} w'',$$

on obtient

$$M' = \frac{\sin(w - \beta)}{\sin(\beta'' - w'')}\,\frac{\cos\beta''\cos w''}{\cos\beta\cos w},$$

$$M'' = \frac{\operatorname{tang} I'\sin(L' - L)}{\sin(\beta'' - w'')}\cos\beta''\cos w''.$$

CHAPITRE IX.

DÉTERMINATION D'UNE ORBITE ELLIPTIQUE. — TROIS OBSERVATIONS COMPLÈTES DONNENT LES SIX ÉQUATIONS NÉCESSAIRES. — RÉDUCTIONS PRÉLIMINAIRES ET CHANGEMENT D'AXES DE COORDONNÉES. — MÉTHODE DE GAUSS. — MÉTHODE D'OPPOLZER. — ORBITES CIRCULAIRES.

---

145. Réduction des résultats des observations. — Nous avons développé, au Chapitre VII, les formules qui expriment l'ascension droite et la déclinaison géocentriques d'une planète à une date quelconque, en fonction des six éléments de l'orbite elliptique de cette planète. Si l'on connaît six coordonnées géocentriques observées à des dates données, on déduira de ces formules six équations dont les six éléments seront les inconnues. La résolution de ces équations, dans le cas où les coordonnées observées sont les ascensions droites et déclinaisons relatives à trois dates, est un problème d'Algèbre qui ne peut être résolu que par approximation. Gauss, à la suite de la découverte de Cérès, a donné de ce problème une solution d'une rare élégance dont l'exposition sera facile, venant après l'étude des problèmes traités au Chapitre VIII de cet Ouvrage.

Mais il faut d'abord remarquer que les coordonnées observées ne sont pas immédiatement comparables, qu'il est nécessaire de les débarrasser de l'aberration et de les ramener à un même équinoxe, et qu'en vérité ce ne sont pas des coordonnées géocentriques, l'astre, au moment d'une observation n'étant pas vu du centre de la Terre, mais d'un point de sa surface.

Les observateurs publient, à l'ordinaire, les positions apparentes des planètes. En vérité, les positions publiées sont indépendantes de l'aberration diurne. Elles en sont effectivement corrigées par l'observateur dans les observations méridiennes, et les observations différentielles faites aux équatoriaux n'en sont pas affectées, l'influence de cette partie de l'aberration étant la même sur la planète que sur l'étoile de comparaison.

On commencera par déduire des coordonnées apparentes α', δ' observées les coordonnées moyennes relatives au commencement de l'année de l'observation par l'application des formules

$$\alpha = \alpha' - [f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tang} \delta + h \sin(H + \alpha) \operatorname{séc} \delta + h' \sin(H' + \alpha) \operatorname{séc} \delta],$$
$$\delta = \delta' - [g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + h' \cos(H' + \alpha) \sin \delta + (i + i') \cos \delta],$$

dans lesquelles, ainsi qu'il a été dit au § 68, on mettra aux seconds membres α' et δ' au lieu de α et δ.

On aura ainsi, par rapport à l'équateur et à l'équinoxe moyens du commencement de l'année, les coordonnées de la droite qui joint la position occupée par l'observateur dans l'espace au moment de l'observation à celle qu'occupait la planète à l'époque $t - \tau$, τ désignant le *temps d'aberration*, c'est-à-dire le temps que la lumière a mis à aller de la planète à l'observateur.

Si les observations ont été faites dans des années différentes, on les ramène à l'équinoxe moyen de la première d'entre elles en appliquant les formules ordinaires de la précession.

Dans certains cas, on est conduit à déterminer une orbite elliptique d'après des observations un peu éloignées, après avoir antérieurement déterminé cette même orbite d'après d'autres observations plus voisines, et, par suite, avec moins de précision. Quand il en est ainsi, on connaît assez bien la distance de la planète à la Terre au moment de chaque observation pour calculer le temps τ d'aberration. La direction observée à l'époque t est alors la même que celle de la droite joignant l'observateur à la planète au temps $t - \tau$ et l'on n'a pas besoin de revenir du lieu apparent au lieu vrai; il suffit de remplacer la date t par la date $t - \tau$. Pour obtenir les coordonnées moyennes relatives à l'équinoxe du commencement de l'année, il suffit de retrancher la précession et la nutation. On a alors

$$\alpha = \alpha' - [f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tang} \delta],$$
$$\delta = \delta' - g \cos(G + \alpha).$$

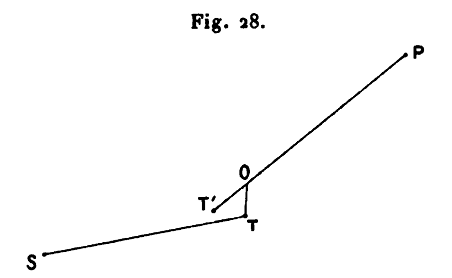
Ces réductions faites, on transforme par les formules du § 15 les ascensions droites et les déclinaisons en longitudes et latitudes.

146. Réduction au lieu fictif. — Si l'on connaît approximative-

ment, par de précédents calculs, les distances de l'astre à la Terre, on corrige les observations de la parallaxe, comme cela a été indiqué (n° 41). Quand il n'en est pas ainsi, on applique le procédé suivant imaginé par Gauss, qui permet de tenir compte, une fois pour toutes, non seulement de la position de l'observateur à la surface de la Terre, mais aussi de la latitude héliocentrique de la Terre. Bien que cette latitude soit toujours très petite, elle n'est cependant pas entièrement négligeable, surtout si la latitude de la planète est elle-même peu considérable.

Les éphémérides astronomiques donnent les coordonnées du centre du Soleil vu de la Terre : celles du centre T de la Terre (*fig.* 28) vu du Soleil S s'en déduisent simplement par le chan-

Fig. 28.



gement des signes; d'autre part, l'observation d'une planète donne la direction OP de la droite qui joint l'observateur O placé à la surface de la Terre à cette planète P; enfin, l'heure sidérale de l'observation et la latitude géocentrique de l'observateur déterminent la direction TO de la droite qui joint le centre de la Terre à cet observateur. Le contour STOP étant déterminé, on peut calculer les coordonnées du point T′ où la droite OP perce le plan de l'écliptique. Ce point T′ a été appelé par Gauss *lieu fictif*. Sa latitude est nulle; on détermine comme il suit son rayon vecteur $R' = ST'$, sa longitude héliocentrique L' et sa distance $\Delta + \delta$ à la planète, Δ étant la distance OP de la planète au lieu de l'observation.

Soient λ, β la longitude et la latitude de l'astre vu du point O, coordonnées déduites par la transformation des coordonnées (n° 15) de l'ascension droite et de la déclinaison observées; soient l, b la longitude et la latitude de la droite TO qui joint le centre de la Terre à l'observateur, r sa longueur; L et B la longitude et la

latitude géocentriques du Soleil, R la distance ST du Soleil au centre de la Terre. Prenons trois axes rectangulaires de coordonnées héliocentriques écliptiques, tels que l'axe des x ait la longitude N, l'axe des y la longitude $N+\frac{\pi}{2}$, l'axe des z la latitude $\frac{\pi}{2}$. Écrivons que les projections des lignes STO, ST'O sur les trois axes sont égales. Nous aurons les relations

$$\begin{aligned}
&R'\cos(L'-N)+\delta\cos\beta\cos(\lambda-N)\\
&\quad=-R\cos B\cos(L-N)+r\cos b\cos(l-N),\\
&R'\sin(L'-N)+\delta\cos\beta\sin(\lambda-N)\\
&\quad=-R\cos B\sin(L-N)+r\cos b\sin(l-N),\\
&\qquad\qquad\delta\sin\beta=-R\sin B+r\sin b.
\end{aligned}$$

La dernière donne

$$\delta=\frac{\mu}{\cos\beta},$$

en posant

$$\mu=(r\sin b-R\sin B)\cot\beta,$$

et les deux premières

$$\begin{aligned}
&R'\cos(L'-N)\\
&\quad=-R\cos B\cos(L-N)+r\cos b\cos(l-N)-\mu\cos(\lambda-N),\\
&R'\sin(L'-N)\\
&\quad=-R\cos B\sin(L-N)+r\cos b\sin(l-N)-\mu\sin(\lambda-N).
\end{aligned}$$

Si l'on fait $N=L$, que l'on remplace $\cos B$ par 1, r par $r_1\varpi$, ϖ étant la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil et r_1 le rapport de r au rayon de l'équateur terrestre, ce qui donne

$$\mu=(r_1\varpi\sin b-RB)\cot\beta,$$

les équations précédentes deviennent

$$L'-L=\frac{r\varpi}{R}\cos b\sin(l-L)+\frac{\sin(\lambda-L)}{\tan\!g\beta}\left[B-\frac{r_1\varpi}{R}\sin b\right],$$

$$R'=R-\left\{r_1\varpi\cos b\cos(l-L)-R\frac{\cos(\lambda-L)}{\tan\!g\beta}\left[B-\frac{r_1\varpi}{R}\sin b\right]\right\}\operatorname{arc}1''.$$

Les éphémérides astronomiques donnant $\log R$, il est plus commode de calculer $\log R'$. Posant

$$\frac{R'}{R}=1-h,$$

on a, en négligeant les termes du second ordre,

$$\log R' = \log R - M h,$$

M désignant le module des logarithmes vulgaires dont le logarithme est

$$\bar{1},6377843,$$

ou

$$\log R' = \log R - M \operatorname{arc} 1'' \left\{ \frac{r_1 \varpi}{R} \cos b \cos(l - L) + \frac{\cos(\lambda - L)}{\tan\beta} \left[B - \frac{r_1 \varpi}{R} \sin b \right] \right\}.$$

La valeur de log M donne

$$\log M \operatorname{arc} 1'' = \bar{6},3233592.$$

Il convient d'écrire ainsi la valeur de δ

$$\delta = \frac{R}{\sin\beta} \left(\frac{r_1 \varpi}{R} \sin b - B \right) \operatorname{arc} 1''.$$

Pour tenir compte de l'aberration planétaire il y a lieu d'augmenter le temps d'aberration de $493^s.\delta$, ou d'apporter à la date de l'observation la correction $493^s.\delta$ pour avoir l'époque à laquelle le rayon lumineux serait parvenu au lieu fictif.

147. Élimination de la latitude du Soleil quand on fait la correction de parallaxe. — Quand on connaît approximativement la distance de la planète à la Terre, il est plus simple de corriger de la parallaxe que de réduire au lieu fictif. Seulement le centre de la Terre auquel l'observation est alors rapportée n'est pas rigoureusement dans l'écliptique. On se débarrasse de la latitude B en rapportant l'observation à la projection O′ du centre O de la Terre sur l'écliptique (*fig.* 29). Il est manifeste que la longitude λ reste la même; la latitude est diminuée de l'angle P qui est excessivement petit. Dans le triangle OO′P, le côté OP est la distance Δ de l'astre au centre de la Terre, OO′ est égal à R sin B, B étant la latitude du Soleil, R son rayon vecteur.

Si l'on projette en O″ le point O sur PO′, la relation

$$OO'' = OP \sin P$$

donne

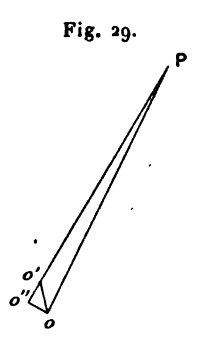
$$R \sin B \cos O'OO'' = \Delta \sin P$$

ou sensiblement, en remarquant que R est très voisin de un,

$$P = \frac{B \cos\beta}{\Delta}.$$

Il n'y a pas lieu de modifier la date de l'observation, le temps que la lumière met à décrire un chemin égal à $R \sin B$ étant toujours négligeable. Il importe d'observer qu'il n'en est pas nécessairement de même dans la réduction au lieu fictif; la longueur δ

Fig. 29.



peut être, en effet, beaucoup plus grande que $R \sin B$ non seulement parce que la parallaxe de la Terre peut atteindre $9''$, mais surtout parce que la droite OT' peut être presque parallèle à l'écliptique. En fait, si la latitude est extrêmement petite, la réduction au lieu fictif ne peut pas se faire avec une précision suffisante.

148. Principe de la méthode de Gauss. — Une fois que l'on a rapporté à un même système de coordonnées écliptiques les directions D, D', D'' dans lesquelles a été vue la planète, on est naturellement conduit à prendre pour inconnues les distances de la planète à la position fictive de la Terre au moment des trois observations. On a alors à résoudre ce problème :

Mener par l'origine S (*le Soleil*) *un plan qui coupe les trois droites* D, D', D'' *en trois points* P, P', P'' *tels qu'une ellipse, ayant pour foyer le Soleil et passant par les trois points, puisse être décrite par la planète de telle façon que celle-ci mette à aller de* P *à* P', *de* P' *à* P'' *des intervalles de temps égaux aux intervalles observés.*

Si l'on considère que ces intervalles de temps sont exactement proportionnels aux aires des secteurs elliptiques correspondants, et que ces secteurs diffèrent peu des triangles rectilignes $SP'P''$, SPP'', SPP', on est naturellement conduit à chercher à utiliser les

formules (53), (54) ou (59) du Chapitre précédent (nos 140 et 143 de ce Volume). Ces formules font connaître ρ, ρ', ρ'' en fonction des données et des rapports n, n''

$$n = \frac{[r'r'']}{[rr'']}, \qquad n'' = \frac{[rr']}{[rr'']},$$

dont on a les valeurs approchées $\frac{\theta}{\theta'}$, $\frac{\theta''}{\theta'}$.

Cependant il est indispensable d'examiner soigneusement les valeurs de ρ, ρ', ρ'' fournies par les formules (53), (54), (59) et de rechercher de quel ordre seront les erreurs produites sur ces valeurs par de petites erreurs commises sur n et n''. Or il est aisé de voir que le coefficient a'_0 qui se trouve en dénominateur est du second ordre. Cela résulte de l'expression (52) de a'_0, la différence $\beta' - \beta_0$ étant évidemment du second ordre. On peut encore s'en assurer en développant, suivant les puissances de θ, θ', θ'', le coefficient primitif de ρ' dans l'équation (47) (n° 139), au moyen des formules évidentes

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}\beta &= \operatorname{tang}\beta' - A\theta'' + B\theta''^2 \ldots,\\
\operatorname{tang}\beta'' &= \operatorname{tang}\beta' + A\theta + B\theta^2 \ldots,\\
\lambda &= \lambda' - A'\theta'' + B'\theta''^2,\\
\lambda'' &= \lambda' + A'\theta + B'\theta^2.
\end{aligned}$$

On trouve que l'expression de ce coefficient a le facteur $\theta\theta'\theta''$ et par suite est au moins du troisième ordre. On a déduit a'_0 de ce coefficient par la suppression du facteur $\sin(\lambda'' - \lambda)$ qui est du premier ordre. a'_0 est donc au moins du second ordre. Les numérateurs de b', c', d' sont finis. Il s'ensuit que, si l'on commettait sur n et n'' des erreurs qui soient même du second ordre, il en résulterait sur ρ, ρ', ρ'' des erreurs finies. Il est donc indispensable, si l'on veut constituer réellement une méthode d'approximation, d'employer des valeurs de n et n'' exactes aux termes près du troisième ordre.

Les formules (39), si l'on en supprime les troisièmes termes, offrent ce caractère. Seulement, elles introduisent la distance r' de la planète au Soleil, lors de la seconde observation. En réalité, il n'y a là qu'une complication de calcul et non un obstacle proprement dit, puisqu'il est assez évident que la connaissance de ρ'

entraîne celle de r' ou inversement, de sorte qu'il y a, entre r', ρ' et les données relatives à la seconde observation, une équation qu'il sera bien aisé de former. On aura, en vérité, à résoudre deux équations entre r' et ρ'. On verra que cette résolution se fait sans difficultés. Tel est le fondement de la méthode de Gauss.

Les formules (40) (n° **138**) peuvent être utilisées pour le calcul des valeurs de ρ et ρ'' données par les équations (59). Le calcul paraît *a priori* plus compliqué. Cependant les difficultés ont été levées et l'emploi que M. Oppolzer a fait de ces formules l'a conduit à une méthode préférable à celle de Gauss, puisque l'on obtient pour ρ et ρ'' une précision plus grande, les formules (40) donnant n et n'' aux termes près du quatrième ordre, de sorte que l'erreur finale sur ρ et ρ'' n'est que du second ordre, tandis que dans la méthode de Gauss elle est du premier.

Les distances à la Terre une fois trouvées et, par suite, les rayons vecteurs menés de la planète au Soleil connus en grandeur et en position, on s'en sert pour obtenir des valeurs plus exactes de n et n'' en calculant, au moyen des formules rigoureuses du n° **129**, les rapports s, s', s'' des aires des secteurs elliptiques aux triangles rectilignes correspondants. Après quoi, on reprend le calcul des distances ρ, ρ', ρ'', des rayons vecteurs r, r', r'', etc. Par une série d'approximations successives, on obtient des valeurs exactes dans la limite de la précision des tables trigonométriques employées.

Nous développerons successivement la méthode de Gauss et celle d'Oppolzer. On peut dire que, pour les premières déterminations d'orbites au moyen d'observations comprenant cinq à six semaines d'intervalles, on obtient, par la dernière méthode, dès la première approximation, une précision suffisante si l'on emploie des tables à six décimales, ce qui suffit toujours dans ces circonstances.

149. Développement de la méthode de Gauss. — On détermine ρ' par l'équation (53) du Chapitre précédent

$$\rho' = -d' + (b'n + c'n'')$$

ou

$$a_0\rho' = R'\sin(K - L') - [Rn\sin(K - L) + R''n''\sin(K - L'')].$$

Le dernier terme, si l'on y introduit pour n et n'' les valeurs (39) (n° 138), devient

$$\begin{aligned}
&\frac{R\theta\sin(K-L)+R''\theta''\sin(K-L'')}{\theta'}\\
&\quad+\frac{\theta\theta''}{6\theta' r'^3}[(\theta+\theta')\sin(K-L)+(\theta'+\theta'')\sin(K-L'')]+\ldots\\
&=\frac{R\theta\sin(K-L)+R''\theta''\sin(K-L'')}{\theta'}\left[1+\frac{\theta\theta''}{2r'^3}\right]\\
&\quad+\frac{\theta\theta''}{6\theta' r'^3}[R(\theta''-\theta)\sin(K-L)-R''(\theta''-\theta)\sin(K-L'')].
\end{aligned}$$

Négligeant le dernier terme qui est du troisième ordre, il reste

$$\frac{R\theta\sin(K-L)+R''\theta''\sin(K-L'')}{\theta+\theta''}\left(1+\frac{\theta\theta''}{2r'^3}\right).$$

Or ce même terme pouvait s'écrire

$$\frac{Rn\sin(K-L)+R''n''\sin(K-L'')}{n+n''}(n+n'').$$

Donc nous remplaçons, en définitive, $\frac{n}{n''}$ par $\frac{\theta}{\theta''}$ et $n+n''$ par $1+\frac{\theta\theta''}{2r'^3}$.

Posant

$$\frac{n''}{n}=P,\qquad 2r'^3(n+n''-1)=Q,$$

nous aurons pour valeur approchée de P

$$\frac{\theta''}{\theta},$$

et pour valeur approchée de Q

$$\theta\theta''.$$

Au reste, les formules (39) (n° 138) donnent

$$n+n''=1+\frac{\theta\theta''}{2r'^3}+\frac{\theta\theta''(\theta''-\theta)}{2r'^4}\frac{dr'}{d\theta},$$

$$\frac{n''}{n}=\frac{\theta}{\theta''}\left[1+\frac{\theta'(\theta-\theta'')}{6r'^2}\ldots\right],$$

valeurs qui montrent que la précision est augmentée quand les observations sont équidistantes, θ étant alors égal à θ''.

Des équations

$$\frac{n''}{n} = \mathrm{P}, \qquad n + n'' = 1 + \frac{\mathrm{Q}}{2r'^3},$$

combinées avec

(1) $$\rho' = -c' + (b'n + d'n''),$$

on déduit

(2) $$\rho' = -c' + \frac{b' + \mathrm{P}d'}{1 + \mathrm{P}}\left(1 + \frac{\mathrm{Q}}{2r'^3}\right).$$

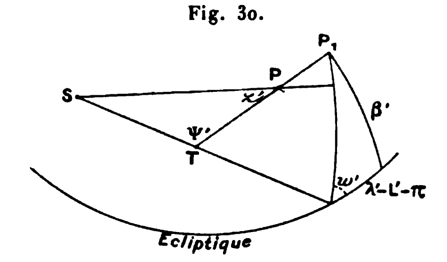
La considération du triangle qui a pour sommets le Soleil, la Terre et la planète, donne immédiatement entre r' et ρ' la relation

(3) $$r'^2 = \mathrm{R}'^2 + \rho'^2 \,\text{séc}^2\beta' - 2\mathrm{R}'\rho' \,\text{séc}\,\beta' \cos\psi',$$

où ψ' désigne l'angle à la Terre.

D'autre part, le trièdre formé par le plan STP, l'écliptique et

Fig. 30.



le plan mené par TPP_1 perpendiculairement à l'écliptique donne

(4) $$\left\{\begin{aligned} \tan\varpi' &= \frac{\tan\beta'}{\sin(\mathrm{L}' - \lambda')}, \\ \tan\psi' &= \frac{\tan(\mathrm{L}' - \lambda')}{\cos\varpi'}, \\ \cos\psi' &= \cos\beta' \cos(\mathrm{L}' - \lambda'), \end{aligned}\right.$$

où ϖ' désigne l'angle aigu ou obtus, opposé au dernier plan. Ces formules donnent ψ'. On déduit de l'équation (3)

(5) $$\rho' \,\text{séc}\,\beta' = \mathrm{R}' \cos\psi' \pm \sqrt{r'^2 - \mathrm{R}'^2 \sin^2\psi'},$$

et par suite, par comparaison avec l'équation (2)

(6) $$-c + \frac{b + \mathrm{P}d}{1 + \mathrm{P}}\left(1 + \frac{\mathrm{Q}}{2r'^3}\right) = \left(\mathrm{R}' \cos\psi' \pm \sqrt{r'^2 - \mathrm{R}'^2 \sin^2\psi'}\right) \cos\beta'.$$

Si, dans le triangle PTS, z' est l'angle à la planète, on a

$$(7) \qquad r' = \frac{R' \sin\psi'}{\sin z'}.$$

Soit

$$c_0 = \frac{b' + P d'}{1 + P}, \qquad c_0 - c' = k_0 \cos\beta', \qquad -\frac{1}{2} c_0 Q = l_0 \cos\beta'.$$

L'équation (5) devient successivement

$$k_0 - l_0 \frac{\sin^3 z'}{R'^3 \sin^3\psi'} = R' \cos\psi' \pm \frac{R' \sin\psi' \cos z'}{\sin z'},$$

$$(k_0 - R' \cos\psi') \sin z' \mp R' \sin\psi' \cos z' = \frac{l_0}{R'^3 \sin^3\psi'} \sin^4 z'.$$

Posant

$$k_0 - R' \cos\psi' = \mu \cos q,$$
$$R' \sin\psi' = \mu \sin q,$$
$$\frac{l_0}{\mu R'^3 \sin^3\psi'} = m,$$

on aura finalement

$$(8) \qquad m \sin^4 z' = \sin(z' \mp q).$$

Nous reviendrons sur la résolution de cette équation; en ayant tiré une valeur de z', on a

$$(9) \qquad \begin{cases} r' = \dfrac{R' \sin\psi'}{\sin z'}, & \rho' = \dfrac{R' \sin(\psi' + z')}{\sin z'} \cos\beta', \\ n = \dfrac{1}{1+P}\left(1 + \dfrac{Q}{2 r'^3}\right), & n'' = n P. \end{cases}$$

Après quoi l'on calcule ρ et ρ'' par les formules (54) du Chapitre précédent.

Enfin, on conclut de ρ, ρ', ρ'' les coordonnées héliocentriques par les formules

$$r \cos b \cos l = -R \cos L + \rho \cos\lambda,$$
$$r \cos b \sin l = -R \cos L + \rho \sin\lambda,$$
$$r \sin b = \rho \tan\beta,$$

qui s'écrivent aussi

$$(10) \qquad \begin{cases} r \cos b \cos(l - L) = -R + \rho \cos(\lambda - L), \\ r \cos b \sin(l - L) = \rho \sin(\lambda - L), \\ r \sin b = \rho \tan\beta. \end{cases}$$

On appliquera ces formules (10) aux trois positions de la planète.

Cela fait, les formules

$$\sin(l - \Omega)\operatorname{tang} i = \operatorname{tang} b, \qquad \sin(l'' - \Omega)\operatorname{tang} i = \operatorname{tang} b'',$$

qui, combinées par addition et soustraction, donnent

$$(10)' \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\left(\frac{l+l''}{2} - \Omega\right)\operatorname{tang} i &= \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{tang} b + \operatorname{tang} b''}{\cos\frac{l''-l}{2}}, \\ \cos\left(\frac{l+l''}{2} - \Omega\right)\operatorname{tang} i &= \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{tang} b'' - \operatorname{tang} b}{\sin\frac{l''-l}{2}}, \end{aligned} \right.$$

font connaître la longitude Ω du nœud et l'inclinaison i du plan de l'orbite.

Enfin, on a les arguments de la latitude par les relations

$$(10'') \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} o &= \frac{\operatorname{tang}(l - \Omega)}{\cos i}, \\ \operatorname{tang} o' &= \frac{\operatorname{tang}(l' - \Omega)}{\cos i}, \\ \operatorname{tang} o'' &= \frac{\operatorname{tang}(l'' - \Omega)}{\cos i}. \end{aligned} \right.$$

Tout ce calcul comporte les vérifications suivantes : d'une part, r' est trouvé de deux manières ; d'autre part, on doit avoir

$$\operatorname{tang} b' = \sin(l' - \Omega)\operatorname{tang} i.$$

Les résultats obtenus permettent d'obtenir des valeurs plus exactes de P et Q. A cet égard, remarquons qu'il ne faudrait pas calculer n et n'' par les formules

$$n = \frac{r'r''\sin(v'' - v')}{rr''\sin(v'' - v)}, \qquad n'' = \frac{rr'\sin(v' - v)}{rr''\sin(v'' - v)},$$

car on ne tiendrait pas compte exactement des équations des aires.

Cherchons d'abord des valeurs plus exactes de P et Q.

Nous avons posé

$$\frac{n''}{n} = \mathrm{P}, \qquad n + n'' - 1 = \frac{\mathrm{Q}}{2r'^3}.$$

Or, si s, s', s'' sont les rapports des aires des secteurs elliptiques compris entre les rayons vecteurs r, r', r'' aux triangles compris entre les mêmes rayons vecteurs, on a

$$s[r'r''] = \theta\sqrt{p}, \qquad s'[rr''] = \theta'\sqrt{p}, \qquad s''[rr'] = \theta''\sqrt{p},$$

$$n = \frac{\theta}{\theta'}\,\frac{s'}{s}, \qquad n'' = \frac{\theta''}{\theta'}\,\frac{s'}{s''},$$

$$\mathrm{P} = \frac{\theta''}{\theta}\,\frac{s}{s''},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Q} &= 2r'^2\left[\frac{\theta s'}{\theta' s} + \frac{\theta'' s'}{\theta' s''} - 1\right] \\ &= 2r'^2\frac{\theta\theta''}{ss''}\left[\frac{s's''}{\theta'\theta''} + \frac{ss'}{\theta\theta'} - \frac{ss''}{\theta\theta''}\right] \\ &= 2r'^2\frac{\theta\theta''}{ss''}\,p\left[\frac{1}{[rr''][rr']} + \frac{1}{[r'r''][rr'']} - \frac{1}{[r'r''][rr']}\right] \end{aligned}$$

ou

$$\mathrm{P} = \frac{\theta''}{\theta}\,\frac{s}{s''},$$

$$\mathrm{Q} = 2pr'^2\frac{\theta\theta''}{ss''}\,\frac{[r'r''] + [rr'] - [rr'']}{[r'r''][rr'][rr'']}.$$

D'autre part, des relations

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(o - \omega), \quad \frac{p}{r'} = 1 + e\cos(o' - \omega), \quad \frac{p}{r''} = 1 + e\cos(o'' - \omega),$$

on déduit

$$\begin{aligned} &\frac{p}{r}\sin(o'' - o') - \frac{p}{r'}\sin(o'' - o) + \frac{p}{r''}\sin(o' - o) \\ &\quad = 4\sin\frac{o'' - o'}{2}\sin\frac{o' - o}{2}\sin\frac{o'' - o}{o}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{4rr'r''\sin\dfrac{o''-o'}{2}\sin\dfrac{o'-o}{2}\sin\dfrac{o''-o}{2}}{r'r''\sin(o''-o') - rr''\sin(o''-o) + rr'\sin(o'-o)} \\ &= \frac{[rr'][r'r''][rr'']}{2rr'r''\cos\dfrac{o'-o}{2}\cos\dfrac{o''-o'}{2}\cos\dfrac{o''-o}{2}\big\{[rr'] + [r'r''] - [rr'']\big\}}; \end{aligned}$$

d'où enfin

$$\mathrm{Q} = \frac{\theta\theta''}{ss''}\,\frac{r'^2}{rr''}\,\frac{1}{\cos\dfrac{o'-o}{2}\cos\dfrac{o''-o'}{2}\cos\dfrac{o''-o}{2}}.$$

On détermine d'ailleurs s et s'' par les formules du n° **130**. Après quoi on fait une seconde approximation au moyen des nouvelles va-

leurs de P et Q, puis une troisième, et ainsi jusqu'à ce qu'une dernière approximation donne les mêmes résultats que la précédente.

L'équation

$$m \sin^4 z' = \sin(z' \mp q)$$

peut avoir o, 2 ou 4 solutions. Si l'on en déduit une équation en $\sin z'$, on trouve

$$m^2 \sin^8 z' - 2m \cos q \sin^5 z' + \sin^2 z' - \sin^2 q = 0,$$

qui a une ou trois racines comprises entre zéro et un. Ces racines sont seules acceptables et encore les valeurs de z' doivent-elles être moindres que $180° - \psi'$. Cette considération conduira souvent à rejeter une des trois solutions. Dans la pratique, il y a une solution voisine de $180° - \psi'$. On n'a, en effet, imposé aux points P, P', P'' que la condition d'être sur les droites TP, T'P', T''P'', dans un plan passant par le centre du Soleil et tellement placé que l'ellipse passant par ces points et ayant pour foyer le Soleil ait ses arcs PP'', P'P'' décrits dans les intervalles de temps donnés. Or les points T, T', T'' satisfont sensiblement à ces conditions (¹).

Cette solution, voisine de $180° - \psi'$, doit être rejetée, et comme le problème proposé a sûrement une solution, puisqu'il s'agit de trouver l'orbite d'une planète qui a été observée, l'équation a au moins une autre racine acceptable. Pratiquement, l'angle z' est petit, et, par suite, voisin de q, ce qui permet de résoudre rapidement l'équation par approximations successives.

150. Calcul des éléments. — Après la dernière approximation, on calcule les éléments de l'ellipse au moyen des formules du n° 133. On peut aussi procéder comme il suit. On a

$$\sqrt{p} = \frac{s'[rr'']}{\theta'}.$$

On a aussi

$$e \cos(o - \omega) = \frac{p}{r} - 1,$$

$$e \cos(o'' - \omega) = \frac{p}{r''} - 1,$$

(¹) Ils y satisferaient rigoureusement si ces points étaient réellement des positions du centre de la Terre aux moments mêmes où la planète est en P, P', P'' et si l'ellipse de Képler représentait rigoureusement les mouvements des planètes autour du Soleil.

d'où, par addition et soustraction,

$$e \sin\left(\frac{o''+o}{2} - \omega\right) = \frac{p}{2}\,\frac{r''-r}{rr''\sin\frac{o''-o}{2}},$$

$$e \cos\left(\frac{o''+o}{2} - \omega\right) = \frac{p}{2}\,\frac{r''+r}{rr''\cos\frac{o''-o}{2}} - \frac{1}{\cos\frac{o''-o}{2}}.$$

Posant

$$\sqrt{\frac{r}{r''}} = \operatorname{tang}\gamma$$

et

$$\sin\frac{o''-o}{2} = \sin\gamma\cos G,$$

$$\cos\frac{o''-o}{2}\cos 2\chi = \sin\gamma\sin G,$$

$$\cos\frac{o''-o}{2}\sin 2\chi = \cos\gamma,$$

on obtient

$$e \sin\left[\frac{o''+o}{2} - \omega\right] = \frac{p\cot 2\chi}{\sqrt{rr''}\sin\frac{o''-o}{2}} = \frac{p\operatorname{tang} G}{\sqrt{rr''}\cos\gamma},$$

$$e \cos\left[\frac{o''+o}{2} - \omega\right] = \frac{p}{\sin 2\chi\sqrt{rr''}\cos\frac{o''-o}{2}} - \operatorname{séc}\frac{o''-o}{2}$$

$$= \frac{p}{\sqrt{rr''}\cos\gamma} - \operatorname{séc}\frac{o''-o}{2}.$$

Ayant obtenu e et ω, on a

$$\varpi = \omega + \Omega,$$

$$a = \frac{p}{\cos^2\varphi},$$

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

On détermine les anomalies vraies par les relations

$$v = o - \omega, \qquad v' = o' - \omega, \qquad v'' = o'' = \omega.$$

De v, v', v'' on déduit

$$u, \quad u', \quad u'',$$
$$M, \quad M', \quad M'',$$

et ensuite de trois manières, l'instant du passage au périhélie.

La concordance des résultats vérifie tout le calcul.

151. Méthode d'Oppolzer. — Cette méthode a pour point de départ la recherche des distances géocentriques extrêmes Δ, Δ'', d'après les relations

$$n\Delta = nb - c + n''d,$$
$$n''\Delta'' = nb'' - c'' + n''d'',$$

où n et n'' ont les significations antérieures

$$n = \frac{[r'r'']}{[rr'']}, \qquad n'' = \frac{[rr']}{[rr'']};$$

les coefficients b, c, d diffèrent de ceux qui ont été représentés par les mêmes lettres au n° **143** par le diviseur $\cos\beta$; b'', c'', d'' par le diviseur $\cos\beta''$.

Ces équations résolues par rapport à Δ et Δ'' donnent

$$(11)\qquad \begin{cases} \Delta = b - c\dfrac{[rr'']}{[r'r'']} + d\dfrac{[rr']}{[r'r'']}, \\ \Delta'' = b''\dfrac{[r'r'']}{[rr']} - c''\dfrac{[rr'']}{[rr']} + d''. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on pose

$$(12)\qquad x = (r + r'')^{-3}, \qquad y = \frac{r'' - r}{r'' + r},$$

on a, d'après les équations (40) du Chapitre VIII,

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{[rr'']}{[r'r'']} = \dfrac{\theta'}{\theta}(1 + x\Psi'), & \dfrac{[rr'']}{[rr']} = \dfrac{\theta'}{\theta''}(1 + x\Psi'_{''}), \\ \dfrac{[rr']}{[r'r'']} = \dfrac{\theta''}{\theta}(1 + x\Psi''), & \dfrac{[r'r'']}{[rr']} = \dfrac{\theta}{\theta''}(1 + x\Psi_{''}), \end{cases}$$

où

$$(14)\qquad \begin{cases} \Psi' = \dfrac{4}{3}(\theta^2 - \theta'^2) - 4\dfrac{\theta^2\theta''}{\theta'}y + \gamma', \\ \Psi'' = \dfrac{4}{3}(\theta^2 - \theta''^2) - 4\theta\theta''y + \gamma'', \\ \Psi'_{''} = -\dfrac{4}{3}(\theta'^2 - \theta''^2) + 4\dfrac{\theta\theta''^2}{\theta'}y + \gamma'_{''}, \\ \Psi_{''} = -\dfrac{4}{3}(\theta^2 - \theta''^2) + 4\theta\theta''y + \gamma_{''}, \end{cases}$$

et ces valeurs substituées dans les équations (11) leur donnent la forme

$$(11^*)\qquad \begin{cases} \Delta = H + Kx, \\ \Delta'' = H'' + K''x, \end{cases}$$

H et H″ étant immédiatement connus, K et K″ dépendant encore de y, et des quantités γ', γ'', γ'_{n}, γ_{n}.

Les premiers termes des fonctions Ψ' sont du deuxième ordre, les seconds du troisième; les derniers sont du quatrième. Dans une première détermination d'orbite, ces derniers termes sont d'abord entièrement inconnus, ainsi que x et y. Comme on a, d'autre part, entre r et Δ, r'' et Δ'' deux équations analogues à l'équation (3), on a en fait, si du moins on néglige les γ, six équations (A) pour déterminer Δ, Δ'', r, r'', x, y : les deux équations analogues à l'équation (3) et les quatre équations (11*) et (12). On verra, au n° 153, comment on résout par tâtonnements ces équations (A).

Les distances Δ, Δ'' une fois obtenues, on en déduit les longitudes et latitudes héliocentriques par les formules (10), puis l'arc héliocentrique compris entre les rayons r et r'' par une formule appropriée. Nous indiquerons au n° 152 la marche indiquée à cet effet par M. Oppolzer; pour le moment, il nous suffira de signaler les formules

$$(15)\quad \begin{cases} \cos 2f' = \cos b \cos b'' \cos(l''-l) + \sin b \sin b'', \\ \sin^2 f'' = \cos b \cos b'' \sin^2 \dfrac{l''-l}{2} + \sin^2 \dfrac{b''-b}{2}, \end{cases}$$

dont la première résulte immédiatement de la considération du triangle qui a pour sommets le pôle héliocentrique de l'écliptique et les positions héliocentriques de la planète, et dont la seconde se déduit sans effort de la première.

On obtient ensuite le rayon intermédiaire r' et les arcs héliocentriques $2f$ et $2f''$ compris entre la deuxième et la troisième position de la planète d'une part, entre la première et la deuxième d'autre part. A cet effet, on calcule n et n'' au moyen des deux premières formules (13), en y négligeant dans Ψ' et dans Ψ'_{n} les quantités encore inconnues γ' et γ'_{n}. Ensuite on utilise les relations évidentes

$$(16)\qquad r' \sin 2f = nr \sin 2f', \qquad r' \sin 2f'' = n''r'' \sin 2f'.$$

Remplaçant dans la deuxième de ces équations f'' par $f'-f$, dans la première f par $f'-f''$, développant les premiers membres et utilisant, pour simplifier les résultats, les équations (16) elles-

mêmes, on trouve

$$(16^*) \quad r'\cos 2f = n''r'' + nr\cos 2f', \qquad r'\cos 2f'' = nr + n''r''\cos 2f.$$

Les équations (16) et (16*) donnent pour f et f'' des valeurs dont la somme doit être égale à f' et pour r' deux valeurs qui doivent être égales entre elles.

Ces quantités suffisent pour déterminer par les formules du n° 129 les rapports s, s', s'' des secteurs elliptiques aux triangles correspondants.

De ces rapports on déduit les valeurs de Ψ', Ψ'', $\Psi'_{''}$, $\Psi_{''}$ comme il suit. On a, par définition,

$$\frac{\text{sect}\, r'r''}{[r'r'']} = s, \qquad \frac{\text{sect}\, rr''}{[rr'']} = s', \qquad \frac{\text{sect}\, rr'}{[rr']} = s''$$

et, d'autre part,

$$\frac{\text{sect}\, r'r''}{\theta} = \frac{\text{sect}\, rr''}{\theta'} = \frac{\text{sect}\, rr'}{\theta''}.$$

On en conclut

$$\frac{[rr'']}{[r'r'']} = \frac{\theta'}{\theta}\frac{s}{s'}, \qquad \frac{[rr']}{[r'r'']} = \frac{\theta''}{\theta}\frac{s}{s''}, \qquad \frac{[rr'']}{[rr']} = \frac{\theta'}{\theta''}\frac{s''}{s'}, \qquad \frac{[r'r'']}{[rr']} = \frac{\theta}{\theta''}\frac{s''}{s},$$

d'où, par les formules (13),

$$1 + x\Psi' = \frac{s}{s'}, \qquad 1 + x\Psi'' = \frac{s}{s''}, \qquad 1 + x\Psi'_{''} = \frac{s''}{s'}, \qquad 1 + x\Psi_{''} = \frac{s''}{s}.$$

De ces équations l'on tire des valeurs des quantités Ψ qu'il conviendra d'écrire

$$(17) \quad \begin{cases} x\Psi' = \dfrac{(s-1)-(s'-1)}{s'}, & x\Psi'' = \dfrac{(s-1)-(s''-1)}{s''}, \\[2ex] x\Psi'_{''} = \dfrac{(s''-1)-(s'-1)}{s'}, & x\Psi_{''} = \dfrac{(s''-1)-(s-1)}{s}. \end{cases}$$

Les différences $s-1$, $s'-1$, $s''-1$ s'obtiennent de la façon la plus exacte par la formule (11) du n° 130

$$s - 1 = \frac{s + \frac{1}{9}}{s^2}\eta_{,}.$$

On applique ces diverses formules comme il suit :

Ayant trouvé successivement x, y, f', n, n'', f, f'', r', s, s', s'', on calcule les quantités γ au moyen des formules (14) en y prenant pour les Ψ les valeurs (17), et l'on en déduit X, X''. Après quoi on reprend la résolution des équations (A) dont les coefficients, s'il s'agit d'une première détermination d'orbite, doivent être calculés à nouveau en tenant compte des temps d'aberration, et l'on continue ainsi jusqu'à ce que deux approximations successives donnent des résultats identiques.

Arrivé à ce point, on calcule les coordonnées héliocentriques correspondant aux observations extrêmes par les formules (10); on en déduit, comme dans la méthode de Gauss, la longitude du nœud, l'inclinaison de l'orbite et les arguments des latitudes; enfin, par les formules du n° 130, on calcule les valeurs définitives de s' et f'. On en déduit les éléments de l'ellipse et les anomalies par les formules du n° 133, puis les autres éléments, comme cela a été indiqué pour la méthode de Gauss elle-même.

Ajoutons que, s'il s'agit d'une première détermination d'orbite, une seule approximation suffit le plus souvent, et l'on néglige entièrement les quantités γ. Pour une détermination ultérieure, on corrige les observations de l'aberration planétaire dès le début du calcul.

152. Calcul de l'arc héliocentrique $2f'$ compris entre les positions extrêmes. — La formule (15) suppose le calcul préalable d'un certain nombre de quantités dont les valeurs varient à chacune des approximations successives. M. Oppolzer a réussi à donner des formules qui expriment l'arc f' en fonction de z et z'' et de quantités susceptibles d'être déterminées une fois pour toutes.

Soient x, y, z; x'', y'', z'' les coordonnées rectangulaires écliptiques héliocentriques des deux positions extrêmes de la planète et $\varkappa$ la longueur de la corde qui joint ces deux positions. Les formules évidentes

$$\varkappa^2 = (r'' - r)^2 + 4rr'' \sin^2 f',$$
$$\varkappa^2 = r''^2 + r^2 - 2(xx'' + yy'' + zz'')$$

donnent

$$\sin^2 f' = \frac{1}{2} - \frac{xx'' + yy'' + zz''}{2rr''}.$$

Les coordonnées x, y, z s'expriment immédiatement par les for-

mules

$$x = \Delta \cos\beta \cos\lambda - R\cos L,$$
$$y = \Delta \cos\beta \sin\lambda - R\sin L,$$
$$z = \Delta \sin\beta.$$

Si l'on remplace dans les deux premières de ces formules λ par $(\lambda - L) + L$, que l'on développe $\sin\lambda$ et $\cos\lambda$ par les formules d'addition, qu'on exprime Δ et R au moyen de r, z et ψ par les formules (9), et $\sin(\lambda - L)$ et $\cos(\lambda - L)$ au moyen des formules (4), on obtient

$$\frac{x}{r} = \cos(z+\psi)\cos L - \sin(z+\psi)\cos\varpi \sin L,$$

$$\frac{y}{r} = \cos(z+\psi)\sin L + \sin(z+\psi)\cos\varpi\cos L,$$

$$\frac{z}{r} = \sin(z+\psi)\sin\varpi.$$

Les valeurs de $\frac{x''}{r''}$, $\frac{y''}{r''}$, $\frac{z''}{r''}$ s'en déduisent en accentuant les lettres. La formation de $\frac{xx''+yy''+zz''}{rr''}$ n'offre pas d'autre difficulté que la peine d'écrire. Les sinus et cosinus des arcs

$$(18)\qquad \begin{cases} z+\psi+\ z''+\psi'' = S, \\ z+\psi-(z''+\psi'') = D \end{cases}$$

s'introduisent d'eux-mêmes. Leurs multiplicateurs dépendent de ϖ et ϖ'' sous des formes qui permettent de les exprimer en fonctions homogènes du second degré des sinus et des cosinus de $\frac{\varpi''-\varpi}{2}$ et $\frac{\varpi''+\varpi}{2}$; ces multiplicateurs dépendent aussi de $\sin(L''-L)$ et de $\cos(L''-L)$ que l'on peut exprimer au moyen de $\sin\frac{L''-L}{2}$ et $\cos\frac{L''-L}{2}$. On obtient, ces réductions faites,

$$\begin{aligned} \frac{xx''+yy''+zz''}{rr''} \\ = \quad & \cos S\left(\sin^2\frac{\varpi''-\varpi}{2}\cos^2\frac{L''-L}{2} - \sin^2\frac{\varpi''+\varpi}{2}\sin^2\frac{L''-L}{2}\right) \\ & + \cos D\left(\cos^2\frac{\varpi''-\varpi}{2}\cos^2\frac{L''-L}{2} - \cos^2\frac{\varpi''+\varpi}{2}\sin^2\frac{L''-L}{2}\right) \\ & + 2\sin S\ \sin\frac{\varpi''-\varpi}{2}\sin\frac{\varpi''+\varpi}{2}\sin\frac{L''-L}{2}\cos\frac{L''-L}{2} \\ & + 2\sin D\cos\frac{\varpi''-\varpi}{2}\cos\frac{\varpi''+\varpi}{2}\sin\frac{L''-L}{2}\cos\frac{L''-L}{2} \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(19)\quad \begin{cases} p\sin P = \sin\dfrac{w''+w}{2}\sin\dfrac{L''-L}{2}, \\ p\cos P = \sin\dfrac{w''-w}{2}\cos\dfrac{L''-L}{2}, \\ q\sin Q = \cos\dfrac{w''+w}{2}\sin\dfrac{L''-L}{2}, \\ q\cos Q = \cos\dfrac{w''-w}{2}\cos\dfrac{L''-L}{2}, \end{cases}$$

on obtient

$$\sin^2 f' = p^2\sin^2\left(\frac{S}{2} - P\right) + q^2\sin^2\left(\frac{D}{2} - Q\right).$$

En remplaçant S et D par leur expression (18) et posant

$$(19\ bis)\qquad P - \frac{\psi+\psi''}{2} = P', \qquad Q - \frac{\psi-\psi''}{2} = Q',$$

cette équation devient

$$(20)\qquad \sin^2 f' = p^2\sin^2\left(P' - \frac{z''+z}{2}\right) + q^2\sin^2\left(Q' + \frac{z''-z}{2}\right).$$

Les quantités p, q, P', Q' sont calculées une fois pour toutes, et l'application de cette formule est évidemment bien plus simple que celle de la formule (15).

Il y a lieu de remarquer que l'application des formules (19) comporte la vérification

$$p^2 + q^2 = 1.$$

153. Résolution des équations (A). — Les formules (11), si l'on y remplace les rapports des aires triangulaires par les valeurs (13), les fonctions Ψ par leurs valeurs (14), prennent la forme

$$(21)\qquad \begin{cases} \Delta = A + x(B + Cy + X), \\ \Delta'' = A'' + x(B'' + C''y + X''), \end{cases}$$

X et X'' désignant, dans les coefficients de x, les termes en γ. On voit, au premier examen, que B, B'', C et C'' sont de l'ordre 0, y de l'ordre 1 ; X, X'' de l'ordre 2 : ces dernières quantités sont tout d'abord inconnues.

Les équations (21) sont, pour les observations extrêmes, analogues à l'équation (2). Pour former le système A, il faut leur adjoindre, outre les valeurs (12) de x et y, des équations analogues aux équations (3). Nous allons d'abord étudier le système formé par les équations (2) et (3).

D'après le n° **142**, l'équation (2) peut s'écrire

$$(22) \qquad \frac{\Delta'}{R'} = \frac{\theta\theta''}{2}\,\frac{\sin P'}{\sin p'}\left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

et l'équation (3), si l'on y substitue Δ' à ρ', devient

$$\Delta'^2 - 2R'\Delta'\cos\psi' + R'^2 - r'^2 = 0.$$

Posant

$$(23) \qquad \frac{\Delta'}{R'} = Z, \qquad \frac{r'}{R'} = \lambda, \qquad \frac{\theta'\theta''}{2}\,\frac{\sin P'}{\sin p'}\,\frac{1}{R'^3} = m.$$

Ces équations deviennent

$$(24) \qquad Z = m - \frac{m}{\lambda^3},$$

$$(25) \qquad \lambda^2 = 1 - 2Z\cos\psi' + Z^2.$$

Par définition Z et λ sont essentiellement positifs : par le théorème de Lambert n° **142**, m est positif ou négatif suivant que r' est $> R'$ ou $< R'$.

L'élimination de λ donnant l'équation

$$m - Z = \frac{m}{(1 - 2Z\cos\psi' + Z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Z sera l'abscisse d'un point commun à la droite D, dont m est à la fois l'abscisse et l'ordonnée à l'origine et à la courbe définie par l'équation

$$Y = \frac{m}{(1 - 2Z\cos\psi' + Z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m}{[(Z - \cos\psi')^2 + \sin^2\psi']^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette ligne L est représentée sur la *fig.* 31. Le double signe

Fig. 31.

que comporte le dénominateur donne deux branches symétriques

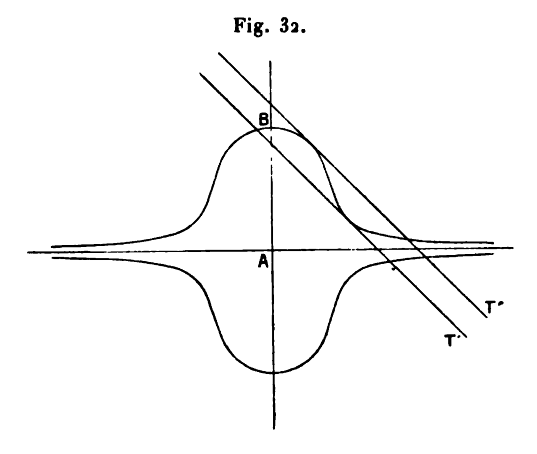
par rapport à oZ. Seulement, λ étant positif, on ne doit utiliser que celle des deux branches dont l'ordonnée a le signe de m.

Pour $Z = o$, $Y = m$; le point correspondant est un point de la droite D, de sorte que le problème a toujours une solution. Mais cette solution, puisqu'elle donne $\Delta' = o$, correspond à la Terre elle-même. Il est manifeste, d'ailleurs, que le problème admet une autre solution, si du moins les trois observations qui ont fourni les données initiales ont été réellement faites. On voit de suite que Y a un maximum AB correspondant à $Z = \cos\psi'$, et que la courbe offre des points d'inflexion pour

$$Z = \cos\psi' \pm \frac{1}{2}\sin\psi'.$$

Si l'angle aigu formé avec oZ par les tangentes en ces points était moindre que 45°, il serait évident que la droite D ne couperait la branche utilisable de la courbe L qu'au point C. Donc, dans la pratique, cet angle sera plus grand que 45° et la courbe aura la forme générale indiquée sur la *fig.* 32. On pourra lui

Fig. 32.



mener d'un même côté du point A deux tangentes T', T'' parallèles à la droite D et la droite D sera située entre ces deux tangentes. Si les deux points autres que le point C où la droite D coupe la courbe S sont, par rapport à oY et oZ, dans un même quadrant, le problème comportera deux solutions; dans le cas contraire, il n'en comportera qu'une. On voit aisément que, si m est positif, le Z d'un point d'intersection avec la branche utilisable est non seulement positif, mais moindre que m; si m est négatif, toute va-

leur positive de Z est acceptable. L'équation qui donne les Z des points communs à la droite D et à la courbe L est

$$P = (m - Z)^2[Z^2 - 2Z\cos\psi' + 1]^3 - m^2 = 0.$$

Le premier membre P est divisible par Z et le quotient Q est du septième degré en Z. D'après ce qui précède, la discussion se réduit à chercher combien l'équation $Q = 0$ a de racines positives quand m est négatif, de racines comprises entre zéro et m quand m est positif, et l'on est sûr que le nombre cherché est un ou deux.

Pour $Z = 0$, Q se réduit à $-2m(1 + 3m\cos\psi')$,
Pour $Z = m$, » $-m$,
Pour $Z = \infty$, » $+\infty$.

Il s'ensuit que, si m est positif, l'équation $Q = 0$ a deux racines comprises entre zéro et m quand $1 + 3m\cos\psi'$ est positif et une dans le cas contraire; si m est négatif, l'équation a deux racines positives quand $1 + 3m\cos\psi'$ est positif et une dans le cas contraire. De sorte que le problème admet deux solutions quand $1 + 3m\cos\psi'$ est positif, une seule quand cette quantité est négative.

L'équation (24) conduit aisément à la résolution par tâtonnements des équations (A). A cet effet, on suppose d'abord, dans ces équations (A), y, X, X″ nulles, et on les écrit, en ne négligeant que des quantités très petites du premier ordre,

$$\Delta = A + \frac{B}{8r^3}, \qquad \Delta'' = A'' + \frac{B''}{8r''^3}.$$

On en conclut, approximativement, en comparant à l'équation (24)

$$m = \frac{A}{R} = -\frac{B}{8R^4}, \qquad m'' = \frac{A''}{R''} = -\frac{B''}{8R''^4}.$$

On adoptera ces premières valeurs $\frac{A}{R}$, $\frac{A''}{R''}$ de m et m'' et les valeurs ψ et ψ'' données par les formules (4). Après quoi les équations (24) et (25) donneront λ, Z, λ'', Z″. A cet effet, il est commode d'utiliser une table (¹) qui donne $\log(2\lambda)^{-3}$ au moyen des arguments m, ψ : on prend la moyenne des deux valeurs obtenues de ce logarithme comme étant $\log(2\lambda')^{-3}$. On retranche de ce loga-

(¹) Table XIII_c du *Traité des orbites* d'Oppolzer.

garithme celui de R'^2 et l'on a une valeur approchée de x

$$x = (2\lambda R')^{-2}.$$

De cette valeur, combinée avec $y = 0$, on conclut Δ et Δ'' par les formules (21), puis r et r'' par des équations semblables à l'équation (3). On en rend les valeurs calculables par logarithmes au moyen d'angles analogues aux angles z', ψ' du n° **149**. Ensuite les formules (12) donnent pour x et y des valeurs x_f, y_f dont les écarts avec les valeurs x_i, y_i primitivement adoptées conduisent, comme il suit, à des valeurs beaucoup plus exactes.

Soient $x_i + dx_i$, $y_i + dy_i$ les valeurs exactes; dr, dr'', dx_f, dy_f les accroissements de r, r'', x_f, y_f qui résulteraient de l'adoption de ces valeurs.

L'équation (3) donne, en négligeant les termes du second ordre,

$$dr = \cos z \;\, d\Delta \;= \cos z \;(\alpha \;\, dx_i + \beta \;\, dy_i),$$
$$dr'' = \cos z'' \, d\Delta'' = \cos z'' (\alpha'' \, dx_i + \beta'' \, dy_i),$$

où

$$\alpha = B + C y + X, \qquad \beta = C x,$$
$$\alpha'' = B'' + C'' y + X'', \qquad \beta'' = C'' x.$$

On a ensuite, par les équations (12),

$$dx_f = -\frac{3(dr + dr'')}{(r + r'')^4}, \qquad dy_f = \frac{2r\,dr'' - 2r''\,dr}{(r + r'')^2}.$$

En portant ces valeurs dans les conditions évidentes

$$x_i + dx_i = x_f + dx_f, \qquad y_i + dy_i = y_f + dy_f,$$

on obtient les équations

$$x_f - x_i = [1 + 3P(r + r'')^{-4}]\,dx_i + \qquad 3Q(r + r'')^{-4}\,dy_i,$$
$$y_f - y_i = \qquad 2R(r + r'')^{-2}\;\; dx_i + [1 + 2S(r + r'')^{-2}]\,dy_i,$$

où

$$P = \alpha \cos z + \alpha'' \cos z'', \qquad R = \alpha r'' \cos z - \alpha'' r \cos z'',$$
$$Q = \beta \cos z + \beta'' \cos z'', \qquad S = \beta r'' \cos z - \beta'' r \cos z''.$$

La résolution de ces équations donnera pour dx_i et dy_i des valeurs très approchées. On réitérera, s'il y a lieu, l'application de la méthode.

154. Orbites circulaires. — La méthode d'Oppolzer donne un algorithme très commode pour la détermination d'une orbite sup-

posée circulaire. Il suffit alors de deux observations complètes, l'excentricité et la longitude du périhélie n'étant plus à déterminer. Nous conserverons dans ce qui précède les observations extrêmes. Il va sans dire que l'on ne se préoccupe dans ce problème ni de la réduction à un même équinoxe, ni de la parallaxe, ni de l'aberration.

Ayant tiré des éphémérides les longitudes du Soleil et conclu des observations les longitudes et latitudes géocentriques de la planète, on détermine les auxiliaires ψ, ϖ, ψ'', ϖ' par les formules (4), p, P'; q, Q' par les formules (19) et (19 *bis*). Attribuant à a une valeur arbitraire, on calcule z et z'' par la formule (7) qui, r et r'' se confondant avec a, donne

$$\sin z = \frac{R \sin\psi}{a}, \qquad \sin z'' = \frac{R'' \sin\psi''}{a},$$

et l'on détermine f' par la formule (18). Si la valeur de a était exacte, la valeur de f' serait identique à celle que donne la dernière loi de Kepler

$$f' = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} \frac{t''-t}{2 \operatorname{arc} 1''}, \qquad \text{où} \qquad \log \frac{k}{2 \operatorname{arc} 1''} = 3,2489796.$$

Au moyen d'un second essai et d'interpolations, on arrivera rapidement à la vraie valeur de a.

Ayant a, on détermine ainsi les éléments : on a

$$\begin{aligned} \Delta &= R \cos\psi + a \cos z, \\ \Delta'' &= R'' \cos\psi'' + a'' \cos z'', \end{aligned}$$

puis on détermine les coordonnées héliocentriques par les formules (10), où ρ est remplacé par $\Delta \cos\beta$; enfin, on a i qui est toujours aigu et Ω par les formules (10'). On en conclut les arguments de la latitude par les formules (10'') et l'on vérifie que $o'' - o = 2f'$.

Enfin la relation $\mu a^{\frac{3}{2}} = k''$, où $\log k'' = 3,5500066$, donne le moyen mouvement μ.

Il est inutile de transcrire les formules qui peuvent servir à construire une éphéméride en partant des éléments; il suffit de remarquer que dans les expressions des coordonnées rectangulaires héliocentriques, les arguments sont des fonctions linéaires du temps.

155. Variation de grandeur d'une petite planète. — Les éléments de l'orbite d'une petite planète une fois connus, il est aisé d'étudier les variations de son éclat. On suppose que l'astre n'a pas de lumière propre, n'est éclairé que par le Soleil, et l'on néglige la phase. Dans ces conditions, l'éclat apparent I est en raison inverse des carrés des distances r et Δ de la planète au Soleil et à la Terre. On prend d'ailleurs pour unité d'éclat celui qu'aurait la planète si elle était à la distance a du Soleil et à la distance $a-1$ de la Terre, a étant le demi grand axe de l'orbite de la planète et l'unité de longueur étant le demi grand axe de l'orbite terrestre. On a ainsi

$$I = \frac{a^2(a-1)^2}{r^2\Delta^2}.$$

D'autre part, on a coutume de classer les astres, au point de vue de l'éclat apparent, en grandeurs. On s'est d'abord conformé, à cet égard, aux habitudes de divers astronomes, notamment d'Argelander, l'auteur de la célèbre *Bonnerdurchmusterung*, où sont données les coordonnées approchées et les grandeurs de 324 188 étoiles comprises entre 0° et 92° de distance polaire nord. L'application des méthodes photométriques a montré ensuite que, si les grandeurs de deux étoiles diffèrent d'une unité, le rapport de leur éclat est un nombre sensiblement constant h, environ 2,5.

Soient m la grandeur d'un astre, I son éclat. I est une fonction $f(m)$. D'après ce qui vient d'être dit,

$$f(m) = h f(m+1).$$

On satisfait à cette condition et à cette autre, que $f(m)$ décroît quand m augmente en faisant

$$I = f(m) = h^{\beta-m}.$$

Si, d'autre part, on désigne par m_0 la grandeur d'une planète dans les conditions où son éclat est un, on a

$$1 = h^{\beta-m_0}.$$

Donc

$$I = h^{m_0-m}$$

et

$$\log I = (m_0 - m)\log h.$$

Comme on a aussi, d'après la première valeur de I,

$$\log I = 2\log a(a-1) - 2\log r\Delta$$

il s'ensuit que

$$(m_0 - m)\log h = 2\log a(a-1) - 2\log r\Delta;$$

d'où

$$m = m_0 - \frac{2}{\log h}\log a(a-1) + \frac{2}{\log h}\log r\Delta.$$

Si, à une certaine date, on a observé la valeur m_1 de m, l'orbite une fois déterminée, on connaîtra les valeurs r_1 et Δ_1 de r et Δ relatives à cette date; on a d'ailleurs avec une précision suffisante

$$h = 2{,}5, \qquad \log h = 0{,}40, \qquad \frac{2}{\log h} = 5;$$

on pourra donc calculer

$$g = m_0 - \frac{2}{\log h}\log a(a-1) = m_1 - \frac{2}{\log h}\log r_1\Delta_1.$$

On aura ensuite, à une date quelconque,

$$m = g + 5\log r\Delta.$$

Dans les éphémérides astronomiques, notamment dans le *Berliner Jahrbuch*, on a coutume de donner, avec les éléments des orbites, les valeurs de m_0 et de g.

Les astronomes n'oublient pas d'ailleurs que l'absorption de la lumière par l'atmosphère diminue l'éclat des astres. On peut admettre comme suffisant le Tableau suivant qui donne la diminution de grandeur à diverses distances zénithales :

z.	Δm.	z.	Δm.	z.	Δm.	z.	Δm.
30°...	0,01	55°...	0,14	76°...	0,70	81°...	1,06
35...	0,02	60...	0,22	77...	0,75	82...	1,20
40...	0,03	65...	0,32	78...	0,81	83...	1,36
45...	0,05	70...	0,45	79...	0,88	84...	1,53
50...	0,09	75...	0,65	80...	0,96	85...	1,71

Pratiquement, on observe peu de petites planètes à moins de 15° de hauteur et l'effet de l'absorption atmosphérique ainsi calculée est moindre que la variation d'éclat qui résulte du plus ou moins de transparence de l'atmosphère; cette dernière variation, purement accidentelle, échappe à tout calcul.

CHAPITRE X.

COMÈTES.

GÉNÉRALITÉS SUR LEURS ORBITES. — MÉTHODE D'OLBERS POUR LA DÉTERMINATION D'UNE ORBITE PARABOLIQUE.

---

156. **Généralités sur les orbites cométaires.** — Nous ne décrirons pas ici les aspects divers qu'ont offerts les comètes, l'Astronomie descriptive étant en dehors du cadre de cet Ouvrage. Nous ne nous occuperons de ces astres qu'au point de vue de leurs mouvements.

Il s'en faut de beaucoup que les astronomes soient d'accord sur l'origine des comètes, bien que cette question les ait préoccupés depuis longtemps. La plupart des orbites étant fort voisines de la parabole, on a été porté à admettre que les comètes viennent des espaces interstellaires; mais des travaux récents, confirmés par la discussion minutieuse à laquelle s'est livré M. Louis Fabry dans sa thèse de doctorat (1893), montrent que, s'il en est ainsi et que les comètes aient dans les régions interstellaires des vitesses comparables à celles du Soleil et des étoiles, la plupart des orbites observées devraient être hyperboliques, ce qui est entièrement contraire à la réalité. D'autre part, il n'est pas sans intérêt de mentionner l'opinion d'après laquelle ces astres seraient des émanations du Soleil lui-même, projetées loin de cet astre avec de très grandes vitesses.

L'attraction d'une planète dans le voisinage immédiat de laquelle passe une comète peut en modifier le mouvement et, transformant l'orbite en une ellipse médiocrement allongée, incorporer définitivement la comète dans les limites du système planétaire. Il pourra arriver que plus tard l'action de la même planète, ou d'une autre planète, fasse sortir cette comète du système solaire. C'est ainsi que, d'après d'Arrest, la comète de Bror-

sen a été capturée par Jupiter en 1842 et sortira probablement du système solaire, encore par l'action de Jupiter, en 1937.

Parmi les comètes observées jusqu'ici, 15 seulement sont périodiques et ont été observées à deux apparitions. Le Tableau suivant, extrait de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1894, fait connaître leurs distances périhélies et aphélies, leurs excentricités, les durées de leurs révolutions et les époques de leurs passages aux périhélies.

Noms.	Révolutions sidérales.	Passages aux périhélies.	Distances périhélies.	Distances aphélies.	Excentricités.
	ans	h			
Encke.........	3,3	1891 oct. 18, 0	0,3405	4,0949	0,84[illegible]
Tempel........	5,2	1889 fév. 2, 2	0,3866	4,6654	0,5[illegible]
Brorsen.......	5,5	1890 fév. 24, 3	0,5878	5,6104	0,810[illegible]
Tempel-Swift..	5,5	1891 nov. 14, 23	1,0866	5,1709	0,6[illegible]
Winnecke.....	5,8	1892 juin 30, 21	0,8864	5,5831	0,72[illegible]
Tempel........	6,5	1885 sept. 25, 18	2,0733	4,8973	0,40[illegible]
Biela I......	6,6	1852 » 23, 17	0,8601	6,1673	0,75[illegible]
Biela II.....	6,6	» » 22, 23	0,8606	6,1969	0,75[illegible]
Finlay.........	6,6	1893 juil. 12, 3	0,9891	6,0637	0,7[illegible]
D'Arrest.......	6,7	1890 sept. 17, 12	1,3240	5,7778	0,62[illegible]
Wolf..........	6,8	1891 » 3, 11	1,5929	5,6006	0,55[illegible]
Faye..........	7,6	1881 janv. 22, 16	1,7381	5,9701	0,5[illegible]
Tuttle.........	13,8	1885 sept. 11, 4	1,0247	10,4596	0,82[illegible]
Pons-Brooks...	71,5	1884 janv. 25, 19	0,7751	33,6713	0,9[illegible]
Olbers........	72,6	1887 oct. 8, 10	1,1996	33,6159	0,931[illegible]
Halley........	76,4	1835 nov. 15, 0	0,5890	35,4112	0,96[illegible]

Indépendamment des comètes précédentes, dont la périodicité a été réellement observée, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1894 en donne 64 autres pour chacune desquelles des éléments elliptiques ont été déterminés. La plupart ont des périodes extrêmement longues allant jusqu'à 8368 ans; 14 seulement de ces périodes sont inférieures à 10 ans; pour 10 de ces 14 comètes, il s'est écoulé au moins une période depuis l'apparition; mais, pour des causes diverses, ces astres n'ont pas été revus.

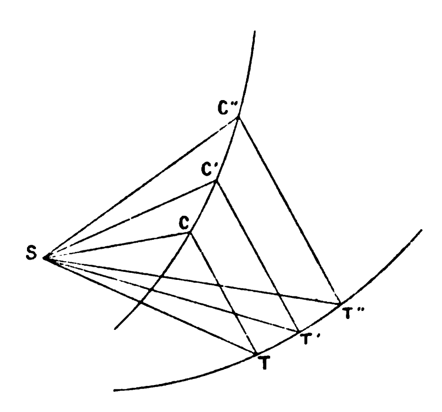
Nous ne nous occuperons de la détermination des éléments des orbites qu'en les supposant paraboliques, ce que l'on fait toujours lors de la première détermination. Il n'est pas nécessaire de dis-

poser de trois observations complètes, le nombre des éléments se réduisant à cinq : le demi grand axe et l'excentricité sont, en effet, remplacés par un seul élément, la distance périhélie. On emploie, néanmoins, trois observations complètes, mais on n'utilise les deux coordonnées déterminées par l'une d'elles que dans une seule équation. L'écart entre la latitude intermédiaire observée et celle qui résulte des éléments calculés indique si l'hypothèse de la parabole est acceptable ou si l'on doit déterminer des éléments elliptiques ou hyperboliques.

157. Idée générale de la méthode d'Olbers pour la détermination des éléments paraboliques. — Soient (*fig.* 33)

C, C′, C″ trois positions observées d'une comète dans l'espace;
T, T′, T″ les positions de la Terre au moment d'une observation;
S le centre du Soleil.

Fig. 33.



Soient Δ, Δ′, Δ″ les distances TC, T′C′, T″C″; r, r', r'' les rayons vecteurs SC, SC′, SC″.

Il est aisé de former trois équations entre les distances Δ, Δ″ et la longueur x de la corde CC″.

En effet, le théorème d'Euler (n° 135) donne entre r, r'' et x la relation

$$(1)\qquad (r+r''+x)^{\frac{3}{2}} \pm (r+r''-x)^{\frac{3}{2}} = 6k(t''-t).$$

Or, les points S, T, T″ et les directions Δ, Δ″ étant connus, SC,

SC″ peuvent s'exprimer en fonction de Δ, Δ″, de sorte qu'on aura une relation entre Δ, Δ″ et la corde x.

Le quadrilatère gauche TCT″C″ entièrement déterminé donnera une seconde relation (II) entre les mêmes quantités.

Enfin, en écrivant, comme au n° **139**, que le point C′ est dans le plan SCC″, on a des relations entre les projections ρ, ρ′, ρ″ de Δ, Δ′, Δ″ sur l'écliptique, les données et les rapports des aires triangulaires SCC′, SC′C″, SCC″. On déduira, en éliminant ρ′ de ces relations, la formule (60) du n° **144** et comme on a, avec une approximation suffisante,

$$\frac{n}{n''} = \frac{N}{N''},$$

on aura la relation

$$\text{(III)} \qquad \rho'' = M'\rho,$$

où

$$M' = \frac{\sin(w - \beta)}{\sin(\beta'' - w'')} \frac{\cos\beta''\cos w''}{\cos\beta\cos w},$$

w et w'' étant définis par les formules

$$\operatorname{tang} I' = \frac{\operatorname{tang}\beta'}{\sin(\lambda' - L')},$$

$$\operatorname{tang} w = \operatorname{tang} I' \sin(\lambda - L'), \qquad \operatorname{tang} w'' = \operatorname{tang} I' \sin(\lambda'' - L').$$

158. Formation de la seconde équation. — Désignant par x, y, z; x'', y'', z'' les coordonnées rectangulaires héliocentriques écliptiques de la comète lors des observations extrêmes, et conservant les notations du Chapitre IX, on a

$$x = -R\cos L + \rho\cos\lambda, \qquad y = -R\sin L + \rho\sin\lambda, \qquad z = \rho\operatorname{tang}\beta,$$
$$x'' = -R''\cos L'' + \rho''\cos\lambda'', \qquad y'' = -R''\sin L'' + \rho''\sin\lambda'', \qquad z'' = \rho''\operatorname{tang}\beta''$$

et

$$(1) \qquad x^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2.$$

Si l'on pose, d'une part,

$$(2) \qquad \begin{cases} R''\cos L'' - R\cos L = g\cos G, \\ R''\sin L'' - R\sin L = g\sin G, \end{cases}$$

g désignant la longueur de la droite qui joint les positions ex-

trêmes de la Terre, d'autre part,

$$(3)\qquad \begin{cases} M'\cos\lambda'' - \cos\lambda = h\cos\zeta\cos H,\\ M'\sin\lambda'' - \sin\lambda = h\cos\zeta\sin H,\\ M'\operatorname{tang}\beta'' - \operatorname{tang}\beta = h\sin\zeta,\end{cases}$$

et enfin

$$(4)\qquad \cos\varphi = \cos\zeta\cos(G - H),$$

la formule (1) donne

$$(\mathrm{II})\qquad x^2 = (\rho h - g\cos\varphi)^2 + g^2\sin^2\varphi,$$

g, G, h, ζ et H se calculent d'après les formules (2) et (3) que l'on transforme dans les suivantes

$$(4)\qquad \begin{cases} R''\sin(L'' - L) = g\sin(G - L),\\ R''\cos(L'' - L) - R = g\cos(G - L)\end{cases}$$

et

$$(5)\qquad \begin{cases} h\cos\zeta\cos(H - \lambda'') = M' - \cos(\lambda'' - \lambda),\\ h\cos\zeta\cos(H - \lambda'') = \sin(\lambda'' - \lambda),\\ h\sin\zeta = M'\operatorname{tang}\beta'' - \operatorname{tang}\beta.\end{cases}$$

159. Résolution des équations (I), (II), (III). — On simplifie l'équation (II) en posant

$$(6)\qquad \rho h - g\cos\varphi = d, \qquad g\sin\varphi = A,$$

et substituant l'inconnue d à ρ. Cette équation (II) devient

$$(\mathrm{II})^*\qquad x = \sqrt{d^2 + A^2}.$$

On exprime d'autre part r et r'' en fonction de d comme il suit. Désignant par ψ et ϖ, ψ'' et ϖ'' des angles définis par rapport aux observations extrêmes comme ψ' et ϖ' l'ont été au n° 149 (formules 4) par rapport à l'observation moyenne, on a

$$(7)\qquad \begin{cases} r^2 = \Delta^2 + R^2 - 2\Delta R\cos\psi,\\ r''^2 = \Delta''^2 + R''^2 - 2\Delta'' R''\cos\psi''.\end{cases}$$

Il convient, dans ces formules, de décomposer les seconds membres en carrés, d'introduire, au lieu de Δ et Δ'', d'abord ρ et ρ'', puis d par l'application de la formule (III) et de la première

formule (6). En posant

$$(8)\quad \begin{cases} R\sin\psi = B, & R''\sin\psi'' = B'', \\ h\cos\beta = b, & \dfrac{h\cos\beta''}{M'} = b'', \\ g\cos\varphi - bR\cos\psi = c, & g\cos\varphi - b''R''\cos\psi'' = c'', \end{cases}$$

les formules (7) deviennent

$$(9)\qquad r = \sqrt{\left(\frac{d+c}{b}\right)^2 + B^2}, \qquad r'' = \sqrt{\left(\frac{d+c''}{b''}\right)^2 + B''^2}.$$

Si l'on remplaçait, dans l'équation (I) d'Euler, r, r'' et $\varkappa$ en fonction de d, on obtiendrait une équation en d de degré élevé. Au lieu de cela, on procède comme au n° 136.

Posant

$$(10)\qquad \frac{\varkappa}{r + r''} = \sin\gamma',$$

l'équation (I) devient

$$\frac{6k(t''-t)}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = \left(\cos\frac{r'}{2} + \sin\frac{r'}{2}\right)^3 \pm \left(\cos\frac{r'}{2} - \sin\frac{r'}{2}\right)^3.$$

Au second membre, on doit prendre le signe inférieur si $v'' - v$ est moindre que 180°, le signe supérieur dans le cas contraire. Mais γ' étant défini par son sinus peut être à volonté aigu ou obtus. Or

$$\cos\frac{\gamma'}{2} - \sin\frac{\gamma'}{2}$$

est positif si γ' est aigu, négatif dans le cas contraire, de sorte que l'on peut toujours adopter la forme

$$\frac{6k(t''-t)}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}} = \left(\cos\frac{\gamma'}{2} - \sin\frac{\gamma'}{2}\right)^3 - \left(\cos\frac{\gamma'}{2} - \sin\frac{\gamma'}{2}\right)^3,$$

à condition de supposer γ' aigu si $v'' - v$ est moindre que 180°, obtus dans le cas contraire. Cette équation se simplifie par la décomposition du second membre en facteur et en posant

$$(11)\qquad \sin\frac{\gamma'}{2} = \sqrt{2}\sin x,$$

devient

$$(12) \qquad \sin 3x = \frac{3k(t''-t)}{\sqrt{2}\,(r+r'')^{\frac{3}{2}}}.$$

L'angle $\frac{\Upsilon'}{2}$ étant compris entre 0° et 45° quand $v''-v$ est moindre que 180°, entre 45° et 90° dans le cas contraire, x est compris entre 0° et 30° dans le premier cas, entre 30° et 45° dans le second. Par suite, l'équation (12) détermine, dans chaque cas, une seule valeur de x.

Si l'on pose

$$\eta = \frac{2(t''-t)k}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mu = \frac{3\sin x\sqrt{\cos 2x}}{\sin 3x},$$

on a

$$\sin 3x = \frac{3\eta}{\sqrt{8}}.$$

Une Table auxiliaire (Table VII du *Traité des orbites* d'Oppolzer) permet de conclure de η la valeur de $\log\mu$, après quoi l'on a

$$\varkappa = \frac{2\mu\theta'}{\sqrt{r+r''}}.$$

Ces formules se prêtent à un calcul d'approximations successives. On fera d'abord, à l'ordinaire, $r=r''=1$, d'où η, $\log\mu$, $\varkappa$. Après quoi, on trouvera d par l'équation (11)* qui donne

$$d = \pm\sqrt{\varkappa^2 - A^2}.$$

Le signe de d est ambigu. Cependant la définition (6) de d montre que, si l'angle φ est obtus, d est positif; et la relation

$$\varkappa^2 = \rho^2 h^2 + g^2 - 2g\rho h\cos\varphi$$

montre que, si la corde $\varkappa$ est plus grande que g, $2g\cos\varphi$ est moindre que ρh et d est encore positif. Or, les vitesses de la Terre et de la comète sont, à peu près, proportionnelles aux cordes $\varkappa$ et g et l'on verra que les carrés de ces vitesses sont respectivement

$$k^2\left(\frac{2}{R'}-\frac{1}{a}\right) \quad \text{et} \quad k^2\frac{2}{r'},$$

a étant le rayon de l'orbite terrestre, de sorte que sensiblement

$$\frac{\text{x}}{g} = \sqrt{\frac{2}{r'}},$$

les longueurs a et R' étant à peu près égales à l'unité. Cette formule montre que si r' est moindre que 2, ce qui a lieu le plus ordinairement dans les premières déterminations d'orbite, la corde x est plus grande que la corde g, et d est positif.

La valeur approchée de d une fois trouvée, on en conclut r et r'' par les équations (9), et l'on reprend la suite des calculs. On fait autant d'approximations successives qu'il est nécessaire pour la concordance des divers résultats. Naturellement, s'il y a doute sur le signe de d, on termine les calculs séparément avec les deux valeurs, et la comparaison avec une nouvelle observation permet de lever l'indétermination.

Les valeurs de x, r, r'' obtenues, on obtient la distance périhélie q et les anomalies vraies v et v'' comme il suit. Posant comme précédemment (n° **129**)

$$\sin\gamma = \frac{\text{x}}{r + r''}$$

et tenant compte de

$$\text{x}^2 = r^2 + r''^2 - 2rr''\cos 2f,$$

l'équation (19) du n° **134** devient

$$q = \frac{rr''}{\text{x}}\sin^2\frac{v''-v}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

Posant, en outre,

$$\sin\nu = \frac{r''-r}{\text{x}},$$

d'où

$$\cos\nu = \frac{\sqrt{\text{x}^2-(r''-r)^2}}{\text{x}} = \frac{2\sqrt{rr''}}{\text{x}}\sin\frac{v''-v}{2};$$

on obtient

$$q = \frac{1}{2}(r+r'')\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\nu.$$

On a ensuite

$$\operatorname{tang}\frac{v''-v}{2} = \operatorname{tang}\gamma\cos\nu$$

et (20, n° **134**)

$$\operatorname{tang}\frac{v''+v}{4} = \sin 2\omega\cot\frac{v''-v}{4}.$$

Ces formules donnent q, v, v'' et, par suite, l'instant du passage au périhélie, d'où l'on déduira l'anomalie v' et le rayon vecteur r' relatifs à la date de l'observation intermédiaire.

Ces valeurs permettront le calcul des rapports n et n'' ; on peut d'ailleurs calculer N et N'' et, par suite, dans le second membre de la formule du n° **144**, on pourra obtenir la valeur du second terme qui avait été supposé nul. Écrivant ensuite cette formule

$$\rho'' = \rho\left[\mathrm{M}'\frac{n}{n''} + \frac{\mathrm{R}}{\rho}\mathrm{M}'\left(\frac{n}{n''} - \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}''}\right)\right],$$

on donnera, au dénominateur de R, à ρ la valeur trouvée, de sorte qu'on obtiendra de nouveau entre ρ et ρ'' une équation

$$\rho'' = \mathrm{M}_1\rho,$$

de la même forme que l'équation (III), où la valeur de M_1 sera plus exacte que celle de M et au moyen de laquelle on fera une nouvelle approximation, puis, s'il y a lieu, une troisième, jusqu'à ce que l'on retrouve, dans une dernière approximation, les nombres fournis par la précédente. On a soin d'ailleurs, après la première approximation, de corriger les observations de l'aberration des planètes.

160. Détermination finale des éléments. — Après la dernière approximation, ayant les valeurs définitives de ρ et ρ'', on en conclut les coordonnées héliocentriques, la longitude du nœud, l'inclinaison de l'orbite et les arguments de la latitude o, o'' par les formules (10), (10)', (10)'' du n° **149**. De ces derniers angles, on déduit l'argument Ω de la latitude du périhélie et la distance périhélie comme il suit :

On a par l'équation de la parabole

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\cos\frac{o-\Omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{q}}\cos\frac{o''-\Omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{r''}},$$

d'où, par addition et soustraction, en posant

$$\sqrt[4]{\frac{r''}{r}} = \mathrm{tang}(45° + \omega)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\cos\frac{1}{2}\left(\frac{o''+o}{2}-\Omega\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{rr''}\cos 2\omega\cos\frac{o''-o}{4}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\sin\frac{1}{2}\left(\frac{o''+o}{2}-\Omega\right)=\frac{\tang 2\omega}{\sqrt[4]{rr''}\sin\frac{o''-o}{4}}.$$

On a ensuite

$$\varpi=\Omega+\Omega,$$

$$v=o-\varpi,\qquad v''=o''-\varpi,$$

après quoi la Table de Barker, donne

$$t-\mathrm{T},\quad t''-\mathrm{T},$$

et, par suite, T de deux manières.

On apprécie la précision avec laquelle les éléments représentent les observations en calculant les coordonnées géocentriques relatives à la date de la deuxième observation et comparant les résultats du calcul aux données de l'observation.

161. **Formation des queues des comètes.** — L'observation prouve que les queues des comètes se forment dans le voisinage du périhélie. La comète s'approchant du Soleil, il se produit une décomposition du noyau, du côté du Soleil, et du côté opposé, par un effet de l'attraction analogue aux marées. Les matériaux ainsi séparés de la comète forment un essaim dont les innombrables particules décrivent des orbites voisines de celle du noyau. Mais, si la comète est assez voisine du Soleil, ces particules sont vivement chassées à l'opposé du Soleil et, comme les bouffées successives de fumée d'une locomotive forment une traînée lumineuse opposée au Soleil, qui est la queue de la comète. L'observation montre que l'axe de la queue est situé dans le plan de l'orbite, est tangent à l'origine au rayon vecteur mené du Soleil au noyau, et tourne sa convexité vers la région où se dirige la comète.

Quelle que soit la cause qui éloigne si vivement du Soleil les particules qui composent la queue, elle équivaut assurément à une force répulsive. Cette force ne produit sur le noyau lui-même qu'un effet négligeable. Son action ne devient sensible que sur

les nébulosités émises par le noyau, nébulosités d'une rareté dont rien de ce que nous connaissons sur la Terre ne peut donner une idée.

Bessel, dans un Mémoire célèbre dont Plantamour a donné une traduction française dans la *Connaissance des Temps pour* 1840, a étudié le mouvement relatif d'une particule matérielle projetée hors de la sphère d'action du noyau cométaire, soumise à une action, attractive ou répulsive, dirigée suivant la droite qui joint cette particule au Soleil, et s'exerçant en raison inverse du carré de la distance. Désignant par $\frac{\mu}{r^2}$ cette force, et supposant μ positif dans le cas d'une attraction, il a trouvé par l'application aux apparences qu'avait offertes la comète de Halley

$$\mu = -1,812,$$

de sorte que l'action du Soleil sur les particules de la queue, au lieu d'être une attraction, était une répulsion.

Récemment, M. Brédichin a publié dans les *Annales de l'Observatoire de Moscou* des recherches très complètes sur les queues des comètes, dans la voie tracée par Bessel. La discussion des apparences offertes par les queues de 36 comètes l'a conduit à les diviser en trois classes. Pour les queues appartenant à la première classe, la force répulsive vaut douze fois la force attractive du Soleil; pour celles de la seconde, de une à deux fois; pour celles de la troisième, elle est le cinquième environ de cette force attractive. Les vitesses initiales des particules à la sortie du noyau sont, pour ces trois types, $4^{km},5$ par seconde, 900^{m}, 300^{m}. Brédichin trouve que les queues du premier type sont formées d'hydrogène, celles du deuxième d'hydrocarbures, celles du troisième de fer. Une même comète peut d'ailleurs avoir plusieurs queues, des diverses classes. M. Brédichin eut l'heureuse fortune de pouvoir appliquer immédiatement, et avec succès, sa théorie aux cinq grandes comètes visibles de 1880 à 1882.

Ajoutons, pour terminer, que l'étude de ces comètes a montré que les comètes n'éprouvent pas de résistance appréciable en traversant la couronne solaire, que leur constitution chimique est complexe et qu'elles peuvent avoir un noyau métallique de même nature que les aérolithes.

L'analyse spectrale a montré en outre que les comètes réfléchissent la lumière solaire; elles peuvent aussi être lumineuses par elles-mêmes.

Les belles recherches de M. Brédichin sont publiées dans les divers volumes des *Annales de l'Observatoire de Moscou*. M. Socolof a, dans le tome II de la 2e série (1890), donné un exposé des formules de cette théorie. Nous en ferons connaître, à la fin du Chapitre XI, les traits essentiels.

162. Étoiles filantes. Travaux de Schiaparelli. — La connexion intime entre les étoiles filantes, les bolides et les comètes a été établie en 1866 par Schiaparelli. La question, soulevée depuis Halley, était particulièrement à l'ordre du jour en raison de l'annonce du retour de l'essaim des Léonides observé en 1833. Néanmoins, les théories les plus diverses étaient encore en faveur, notamment celle de l'origine atmosphérique des étoiles filantes.

Cette opinion avait pourtant été fort ébranlée par l'apparition de l'averse extraordinaire d'étoiles filantes observée dans l'Amérique du Nord dans la nuit du 12 au 13 novembre 1833, averse qui conduisit Olmsteed, professeur à Yale College, à la découverte du point radiant. Toutes les étoiles filantes observées le 12 novembre 1833 paraissaient venir d'un même point du Ciel situé dans la constellation du Lion. Elles décrivaient donc, par rapport à la Terre supposée immobile, des lignes planes projetées sur la sphère céleste suivant de grands cercles qui se coupaient en un même point. Les plans de ces grands cercles passaient tous par la droite menée de l'observateur vers ce point, le *point radiant*, et cette propriété subsistait quelle que fût la position de l'observateur à la surface de la Terre; le point radiant était indépendant de cette position. Les orbites des étoiles filantes étaient donc des droites parallèles à la direction du point radiant.

Dès la fin du siècle dernier, deux étudiants de Göttingue, Brandès et Benzenberg avaient mesuré, par des observations faites simultanément, de deux points éloignés, la vitesse des étoiles filantes et l'avaient trouvée comparable à la vitesse des mouvements planétaires. La découverte du point radiant établissait solidement la doctrine de l'origine cosmique des étoiles filantes.

En 1839, A. Erman, de Berlin, émit l'opinion que la matière

météorique dont la rencontre par l'atmosphère terrestre constitue un essaim d'étoiles filantes circule autour du Soleil en forme d'anneaux fermés. Chaque année la Terre passe par l'intersection de son orbite avec cet anneau. Ainsi s'explique la périodicité annuelle de l'essaim des Perséides qui se reproduit annuellement du 9 au 10 août. Si l'essaim, au lieu d'être répandu à peu près uniformément sur l'anneau, y voyage en un amas relativement peu étendu, l'averse ne se reproduira que de loin en loin quand la Terre et l'essaim se trouveront ensemble au point de rencontre de leurs orbites. L'averse des Léonides s'était reproduite en 1834, et les années suivantes, avec une intensité décroissante. On savait que de Humboldt avait été témoin à Cumana, dans la nuit du 12 novembre 1799, d'une averse analogue à celle de 1833. Olbers, en 1837, adoptant les idées que nous venons d'indiquer, annonça qu'il fallait s'attendre à un retour en 1867.

Vers 1864, la question fut reprise avec le plus grand soin par le professeur Newton, de Yale College, qui annonça le retour des Léonides pour la nuit du 13 au 14 novembre 1866.

A la même époque, Schiaparelli entreprenait à Milan ses admirables travaux.

Dans cinq lettres au P. Secchi, directeur de l'observatoire du Collège romain (lettres traduites en français dans les tomes XII et XIII du journal *les Mondes*), Schiaparelli exposa la suite de ses idées qu'il développa plus tard, en 1871, dans son Ouvrage *Note e reflessioni sulla teoria astronomica delle stelle cadenti.*

Son point de départ a été la loi de la variation diurne démontrée notamment par Coulvier-Gravier et Chapelas, d'après laquelle les étoiles filantes qui se montrent toutes les nuits sont plus nombreuses le matin avant le lever du Soleil que le soir après son coucher. Cette loi s'explique immédiatement si l'on admet que les étoiles filantes sont de petits corps se mouvant dans l'espace avec une vitesse comparable à la vitesse des planètes et devenant incandescents à travers l'atmosphère. Si, en effet, ces étoiles étaient immobiles et leur essaim traversé par la Terre, les seuls points de la Terre, à chaque instant, verraient des étoiles filantes, qui auraient au-dessus de leur horizon l'*apex*, le point du Ciel vers lequel la Terre, à cet instant, se dirige. Si, au contraire, la Terre était immobile, les étoiles filantes circulant en toutes direc-

tions dans l'espace, la distribution apparente serait uniforme. Si, comme cela a lieu réellement, la Terre se meut, les étoiles filantes distribuées uniformément ayant une vitesse notablement plus grande que celle de la Terre, on a un régime intermédiaire dans lequel un maximum a lieu pour chaque point de la Terre au moment où l'apex est à la plus grande hauteur. L'axe de rotation étant grossièrement perpendiculaire à l'écliptique, cela a lieu vers 6 heures du matin. Au contraire, vers 6 heures du soir, il se produit un minimum.

Une fois assuré que les étoiles filantes se meuvent dans l'espace, Schiaparelli les regarde comme décrivant, autour du Soleil, des ellipses fort allongées. Il arrive à penser que « les orbites décrites dans l'espace par les étoiles filantes sont analogues à celles des comètes, que leur vitesse absolue, quand elles atteignent l'atmosphère terrestre, est très voisine de celle qui correspond au mouvement parabolique, que certaines comètes sont liées à certains essaims de météores, de telle sorte qu'elles décrivent des orbites presque identiques, enfin, que les étoiles filantes sont très probablement le produit de la décomposition de la matière des comètes ».

La détermination du radiant d'un essaim d'étoiles filantes donne la direction de la vitesse relative de l'essaim par rapport à la Terre; nous verrons au n° 163 comment on peut déduire la direction de la vitesse absolue et, par suite, les éléments de la parabole que cet essaim décrit autour du Soleil. Schiaparelli, appliquant la méthode à l'essaim des Perséides que la Terre traverse du 9 au 10 août, constata que les éléments étaient analogues à ceux de la grande comète de 1862. Il calcula en même temps les éléments des Léonides.

L'averse extraordinaire du 13 au 14 novembre 1866 confirma, pour cet essaim, la périodicité de 33 ans $\frac{1}{4}$. Peters, d'Altona, reconnut l'identité des éléments de Schiaparelli avec ceux de la comète I, 1866. Peu après, Weiss et Galle remarquèrent que l'essaim des Lyrides du 20 avril se trouve à un point où l'orbite de la Terre est coupée par l'orbite de la comète 1861 I, et Weiss et d'Arrest constatèrent que celui des Andromédides suit l'orbite de la comète de Biéla que l'on n'avait pas revue depuis 1852, et que l'on attendait en 1872. La comète ne fut pas retrouvée, mais l'averse

extraordinaire d'étoiles filantes du 28 novembre de cette année confirma d'une manière éclatante les idées de Schiaparelli.

163. Détermination de l'orbite parabolique d'un essaim. — Nous admettrons que les corpuscules qui composent un essaim d'étoiles filantes décrivent, autour du Soleil, des orbites paraboliques. Ces corpuscules ne sont visibles pour nous qu'après leur entrée dans l'atmosphère, où ils pénètrent avec une vitesse relative très grande, résultant de leur vitesse par rapport au Soleil et de la vitesse de la Terre par rapport à cet astre. Nous verrons au Chapitre XI que la vitesse v dans une orbite parabolique est donnée par la relation

$$v^2 = k^2\left(\frac{2}{r}\right), \tag{α}$$

et la vitesse V de la Terre par

$$V^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right), \tag{β}$$

r et R étant les distances de l'étoile filante et de la Terre au Soleil et a le demi grand axe de l'orbite terrestre. Or, au moment d'une observation d'étoile filante, r est sensiblement égal à R et, avec une précision suffisante, à a. On a donc très approximativement

$$\frac{v}{V} = \sqrt{2}.$$

V est environ 23^{km} et v, 32^{km}; si les deux vitesses s'ajoutent, la vitesse relative peut atteindre 55^{km}. On explique aisément qu'un corps n'ayant que quelques décimètres cubes de volume pénétrant avec une telle vitesse dans un milieu extrêmement raréfié, au delà même de la hauteur à laquelle la pression de l'atmosphère est sensible, devienne rapidement incandescent et se volatilise. Il faut que ce corps ait un volume notable pour qu'il puisse tomber à l'état solide à la surface de la Terre.

Tous ces corpuscules qui composent un essaim ont, au moment où ils pénètrent dans l'atmosphère, des vitesses sensiblement parallèles. Les directions de ces vitesses ne sont que très peu modifiées par la résistance de l'atmosphère. Les vitesses relatives par rapport à un observateur sont aussi parallèles. La parallèle à ces

vitesses relatives, menée par l'œil de l'observateur, perce, comme il a été dit, la sphère en deux points. Celui de ces points d'où paraissent venir les étoiles se nomme le *radiant,* l'autre l'*anti-radiant*. L'observation fait aisément connaître le radiant. On y parvient le plus simplement en reportant sur une carte céleste les trajectoires observées et déterminant le point où elles paraissent se couper plus ou moins exactement. La direction ainsi trouvée est celle de la vitesse relative des corpuscules.

Soient

l la longitude observée du radiant;
b sa latitude;
γ la vitesse relative.

Les composantes de cette vitesse suivant trois axes de coordonnées rectangulaires ayant pour plan fondamental l'écliptique, l'axe des x passant par le point vernal, sont

$$-\gamma\cos b\cos l,\quad -\gamma\cos b\sin l,\quad -\gamma\sin b.$$

Si $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, o sont les composantes de la vitesse V de la Terre et que l'on néglige le mouvement de l'observateur résultant de la rotation diurne, les composantes de la vitesse absolue du météore sont

$$\frac{dX}{dt}-\gamma\cos b\cos l,\qquad \frac{dY}{dt}-\gamma\cos b\sin l,\qquad -\gamma\sin b,$$

et, par la formule (α), on a

$$\left(\frac{dX}{dt}-\gamma\cos b\cos l\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}-\gamma\cos b\sin l\right)^2+\gamma^2\sin^2 b=k^2\frac{2}{R},$$

ou, en tenant compte de la formule (β),

$$\gamma^2-2\gamma\cos b\left(\cos l\frac{dX}{dt}+\sin l\frac{dY}{dt}\right)-\frac{k^2}{R}=o,$$

γ étant essentiellement positif, cette équation en détermine entièrement la valeur.

La vitesse γ une fois connue, les composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de la vitesse absolue s'en déduisent.

Si l'on désigne par ☊ et i la longitude du nœud et l'inclinaison

de l'orbite, le double de l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur mené du Soleil à l'étoile filante étant $k\sqrt{p}$ (k désignant la constante de Gauss), on a

$$k\sqrt{p}\cos i = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt},$$

$$k\sqrt{p}\cos\Omega\sin i = x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt},$$

$$k\sqrt{p}\sin\Omega\sin i = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}.$$

Dans le calcul des seconds membres on prend pour x, y, z les coordonnées héliocentriques du centre de la Terre.

Les seconds membres étant connus, ces équations donnent Ω, i, p. Il est d'ailleurs visible que l'astéroïde étant dans l'écliptique au moment de l'observation est au nœud ascendant si la latitude du radiant est négative, au nœud descendant si elle est positive, de sorte que la longitude du nœud Ω est égale à celle du Soleil ou la surpasse de 180°, suivant que la latitude du radiant est positive ou négative.

Pour déterminer l'anomalie, la relation

$$r = \frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}},$$

où q désigne $\frac{p}{2}$, ne peut suffire à cause de l'indétermination du signe de $\frac{v}{2}$ qui en résulterait, mais on a, en la différentiant,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q\tang\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}}\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r}\tang\frac{v}{2};$$

d'où

$$\tang\frac{v}{2} = \frac{r\frac{dr}{dt}}{k\sqrt{p}} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{k\sqrt{p}},$$

et l'angle $\frac{v}{2}$ étant compris entre $+90°$ et $-90°$ est entièrement déterminé par cette formule.

L'argument de la latitude est zéro si b est négatif, 180° si b est positif. Donc, l'argument de la latitude du périhélie est $-v$ dans

le premier cas, $180^{\circ} - v$ dans le second. Tous les éléments sont ainsi déterminés.

Nous n'avons tenu aucun compte de la vitesse de rotation de la Terre, ni de l'influence que cette rotation a sur la vitesse relative apparente. Schiaparelli a montré que ces quantités ne sont cependant pas entièrement négligeables.

164. Travaux de M. Brédichin. — Dans ces dernières années, le nombre des points radiants catalogués s'est considérablement augmenté, et la question de l'origine première des étoiles filantes a été reprise, notamment par M. Brédichin, à la suite de ses recherches sur les queues des comètes. M. Brédichin pense que l'attraction solaire, en même temps qu'elle sépare du noyau d'une comète très voisine du Soleil les matériaux impalpables qui, soumis à la force répulsive, produisent la queue de la comète, entraîne avec ces masses gazeuses une infinité de petites masses solides, lesquelles échappent par leur densité à l'action de la force répulsive. Ces masses solides ont fourni, dans quelques cas, des *queues anomales* dirigées vers le Soleil. Leurs particules, sous l'influence de l'attraction solaire, poursuivent leur chemin dans des orbites plus ou moins voisines de celles du noyau, pouvant s'en écarter notablement suivant la direction et l'intensité de l'impulsion qui a fait sortir du noyau les corpuscules. Ces considérations, sur lesquelles il ne nous est pas possible d'insister davantage, permettent de rendre compte du grand nombre des radiants et de la largeur de certains essaims, assez grande pour que la Terre mette plusieurs semaines à les traverser.

CHAPITRE XI.

LOI DE NEWTON. — ÉQUATIONS DES MOUVEMENTS DES PLANÈTES AUTOUR DU SOLEIL. — INTÉGRATION DANS LE CAS D'UNE SEULE PLANÈTE.

165. Détermination de la force qui sollicite une planète vers le Soleil. — D'après les lois de Képler, une planète, que nous regarderons ici comme un point matériel, décrit une ellipse autour du Soleil supposé fixe. Il s'ensuit, d'après les principes fondamentaux de la Mécanique, que cette planète est soumise à l'action d'une force. Le plan de l'ellipse passant par le Soleil, la direction de cette force est constamment dans ce plan.

Soient, par rapport à deux axes rectangulaires passant par le Soleil, x, y les coordonnées de la planète, X, Y les composantes de la force qui la sollicite, m la masse de la planète. On a les équations

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y}; \end{aligned}\right. \tag{1}$$

d'où l'on déduit

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}. \tag{2}$$

En vertu de la loi des aires, $x\,dy - y\,dx$ étant le double de l'aire décrite dans le temps infiniment petit dt,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c, \tag{3}$$

c désignant une constante. La différentiation des deux membres de cette équation donnant

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

il résulte de l'équation (2)

$$(4)\qquad xY - yX = 0.$$

Or, les composantes X, Y de la force cherchée sont proportionnelles aux cosinus des angles que la direction de cette force fait avec les axes. Les coordonnées x, y de la planète sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec les axes le rayon vecteur mené du Soleil à la planète. La direction de ce rayon vecteur coïncide donc avec celle de la force cherchée. Ainsi :

La force qui sollicite la planète est dirigée suivant la droite qui joint cette planète au Soleil.

D'autre part, la courbe que décrit la planète tourne sa concavité vers le Soleil. Il s'ensuit que *la force cherchée est dirigée vers le Soleil : c'est une force attractive.*

Soit F l'intensité de cette force. Multiplions les équations (1) respectivement par $2\,dx$, $2\,dy$ et additionnons-les membre à membre : nous trouvons

$$md\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = 2(X\,dx + Y\,dy).$$

Les relations évidentes

$$X = -F\frac{x}{r}, \qquad Y = -F\frac{y}{r},$$

$$dx = \frac{x}{r}\,dr + r\,d\left(\frac{x}{r}\right), \qquad dy = \frac{y}{r}\,dr + r\,d\left(\frac{y}{r}\right),$$

$$\frac{x}{r}\,d\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\,d\frac{y}{r} = \frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] = 0;$$

donnant

$$X\,dx + Y\,dy = -F\,dr,$$

on a

$$(5)\qquad md\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -2F\,dr,$$

équation qui, si l'on remplace x et y par les coordonnées polaires r, θ au moyen des relations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

devient

$$(5^*)\qquad md\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2} = -2F\,dr.$$

L'équation (3), qui exprime la loi des aires, devient par la même substitution

$$(3^*) \qquad r^2\,d\theta = c\,dt.$$

Si l'on élimine dt entre les équations (3*) et (5*), on trouve

$$-\frac{2c^2}{r^3} + c^2\frac{d}{dr}\left(\frac{dr^2}{r^4\,d\theta^2}\right) = -\frac{2F}{m}.$$

Comme on a

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dr^2}{r^4\,d\theta^2}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\frac{d\theta}{dr} = -\frac{2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2},$$

l'équation précédente devient

$$(6) \qquad F = \frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Il convient, avant d'aller plus loin, de remarquer que les équations (4) et (6) s'appliquent non seulement au mouvement des planètes autour du Soleil, mais au mouvement de tout point matériel décrivant autour d'un point fixe une ligne plane suivant la loi des aires. Elles constituent des équations fondamentales pour l'étude du mouvement d'un tel point.

La planète décrit autour du Soleil une ellipse dont le Soleil occupe un foyer. Si a désigne le demi grand axe, e l'excentricité de cette ellipse, ϖ l'angle que fait avec Ox la direction du périhélie, l'équation de cette ellipse est

$$(7) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta - \varpi)}{a(1 - e^2)}.$$

Si l'on introduit cette valeur de $\frac{1}{r}$ dans la relation (6), on trouve immédiatement

$$(8) \qquad F = \frac{mc^2}{a(1 - e^2)}\,\frac{1}{r^2}.$$

La force qui sollicite la planète vers le Soleil est donc en raison inverse du carré de la distance de la planète au Soleil.

On peut remarquer que si, dans l'équation (6), on suppose

$$(9) \qquad F = \frac{F_1}{r^2},$$

F_1 étant une constante donnée, l'équation (7) sera l'intégrale générale de cette équation (6) pourvu que l'on ait

$$(10) \qquad F_1 = \frac{mc^2}{a(1-e^2)}.$$

En effet, la fonction r de θ définie par l'équation (7) satisfait à l'équation (6); comme elle renferme deux constantes arbitraires, elle en est l'intégrale générale : il y a bien deux constantes arbitraires, puisque entre les trois constantes arbitraires a, e, ϖ il n'existe que la relation (10).

Nous remarquerons encore que, si l'on désigne par v la vitesse de la planète, on a

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2} = c^2\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{r^4\,d\theta^2} = c^2\left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right],$$

d'où

$$(11) \qquad v^2 = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

D'autre part

$$a(1-e^2) = \frac{mc^2}{F_1};$$

le second membre étant positif, il est manifeste que si l'orbite est elliptique, e étant moindre que un, a est positif; si elle est hyperbolique, a est négatif; si elle est parabolique, a est infini.

Si r_0 est la valeur initiale du rayon vecteur, v_0 la vitesse correspondante, on a

$$v_0^2 = \frac{F_1}{m}\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right).$$

Donc, quelle que soit la direction de la vitesse initiale, l'orbite est elliptique, parabolique ou hyperbolique suivant que v_0^2 est moindre que $\frac{2F_1}{mr_0}$, égal ou supérieur à cette quantité.

166. Comparaison des forces qui sollicitent les diverses planètes vers le Soleil. — La constante c désigne le double de l'aire décrite dans l'unité de temps. L'aire de l'ellipse est $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$. La durée T de la révolution de la planète est donc

$$T = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{c},$$

d'où, par la relation (10),

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{F_1}.$$

D'après la dernière loi de Képler, si a' et T' désignent les quantités analogues à a et T pour une autre planète,

$$\frac{T'^2}{a'^3} = \frac{T^2}{a^3}.$$

Si donc m' désigne la masse de cette planète, F'_1 la force qui la sollicite vers le Soleil,

$$\frac{m'}{F'_1} = \frac{m}{F_1}.$$

Les forces qui sollicitent les diverses planètes vers le Soleil sont donc proportionnelles à leurs masses. Elles sont représentées par une expression de la forme $\frac{\mu m}{r^2}$, μ étant une constante.

L'équation (7) s'applique aux orbites paraboliques des comètes, pourvu que l'on y remplace e par un et $a(1 - e^2)$ par le paramètre p, double de la distance périhélie. La formule (8) donne alors

$$F = \frac{mc^2}{p}\frac{1}{r^2}.$$

Or, on constate que pour les nombreuses comètes paraboliques observées, $\frac{c^2}{p}$ est un nombre constant égal, d'ailleurs, à la valeur de $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ relative aux planètes.

Les forces qui sollicitent vers le Soleil les planètes ou les comètes sont donc proportionnelles aux masses de ces corps.

167. Cas des satellites des planètes. — Les mouvements des satellites autour des planètes correspondantes obéissent sensiblement aux lois de Képler. Quand une planète a plusieurs satellites, la troisième loi de Képler elle-même se vérifie. L'action d'une planète sur un quelconque de ses satellites est donc représentée par une expression telle que $\frac{\mu' m}{r^2}$, m étant la masse du sa-

tellite, r sa distance à la planète, μ' un nombre constant pour les divers satellites de la même planète.

La Terre, n'ayant qu'un satellite ne se prête pas à cette vérification; mais si l'on calcule la valeur de la constante μ' d'après le mouvement de la Lune et que l'on regarde un point placé près de la surface de la Terre comme soumis à la même loi d'attraction, on trouve pour l'intensité de la force qui sollicite ce point la valeur de l'intensité de la pesanteur mesurée par les physiciens.

On a en effet, pour la Lune

$$F_1 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} m,$$

de sorte que l'accélération due à cette force, si la Lune était rigoureusement à la distance a, serait

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2}.$$

Or le demi grand axe a est environ soixante rayons terrestres, de sorte que si l'on prend pour unité de longueur le mètre et pour unité de temps la seconde de temps moyen, ce qui donne

$$T = 27^j 7^h 43^m = 39343^m,$$

on trouve pour l'accélération à la distance a

$$\frac{4\pi^2 40000000.60}{2\pi 39342^2 60^2} = 0^m,002706.$$

Si la même force s'exerçait, modifiée en raison inverse du carré de la distance, à la surface de la Terre, elle produirait une accélération 60^2 ou 3600 fois plus grande, égale par suite à $9^m,74$. Un calcul plus rigoureux donne une valeur qui coïncide avec $9^m,82$, accélération due à la pesanteur à la surface de la Terre. De sorte que la force qui fait mouvoir la Lune autour de la Terre est la pesanteur diminuée en raison inverse du carré de la distance.

168. **Loi de la gravitation universelle.** — Il y a lieu d'observer que les planètes attirent le Soleil, comme elles attirent leurs satellites, et l'action du Soleil sur une planète égale celle de la planète sur le Soleil. Soit M la masse du Soleil, m celle de la planète. L'attraction du Soleil sur la planète est représentée par

$\frac{\mu m}{r^2}$; celle de la planète sur le Soleil par $\frac{\mu' M}{r^2}$. Donc

$$\mu m = \mu' M$$

ou

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\mu'}{m}.$$

Si donc k^2 est *un nombre constant dans le système solaire*, on a

$$\mu = k^2 M, \qquad \mu' = k^2 m,$$

et l'action mutuelle du Soleil sur la planète est représentée par

$$\frac{k^2 M m}{r^2}.$$

Si l'on considère que la pesanteur terrestre s'exerce sur toutes les parties des corps si petites qu'elles soient, le poids d'un corps étant la somme des poids de ses parties, et tous les fragments d'un même corps tombant dans le vide avec la même vitesse, on est conduit à admettre que *deux particules quelconques, prises dans le système solaire, s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance*. Cette loi est *la loi de la gravitation universelle*, nommée aussi *loi de Newton*.

Cette loi n'a pu être étendue en toute rigueur aux astres étrangers au système solaire. L'orbite relative apparente du satellite dans un système stellaire double est bien une ellipse à laquelle s'applique la loi des aires; mais les observations ne permettent pas de démontrer que l'orbite réelle, qui est aussi une ellipse *si on la suppose plane*, a l'astre principal pour foyer. Le lecteur désireux d'étudier la question la trouvera traitée au § 5 du tome I du *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand. Un astre peut décrire autour d'un autre regardé comme fixe, suivant la loi des aires, une ellipse, quelles que soient à l'époque initiale la position et la vitesse du premier astre, sous l'action d'une force qui dépendrait non seulement de la distance, mais aussi de la direction du rayon vecteur joignant les deux astres. Si l'on suppose que la force ne dépende que de la distance, on trouve qu'elle doit être représentée par la loi de Newton, ou être proportionnelle à la distance. Dans ce dernier cas, l'ellipse aurait pour centre l'astre principal, et il en serait de même de l'orbite

apparente. Cela n'a pas lieu, en général, pour les orbites connues d'étoiles doubles.

169. Réduction des corps célestes, pour l'étude des mouvements de translation, à leurs centres de gravité. — La loi de Newton admise, la Mécanique permet de tenter l'étude complète des mouvements des corps célestes. Les dimensions de ces corps sont très petites par rapport à leurs distances mutuelles, de sorte que leurs mouvements de translation nous sont beaucoup plus sensibles (sauf dans le cas de la Terre) que les mouvements de rotation dont ils peuvent être animés. *Pour l'étude de ces mouvements de translation,* les seuls dont nous nous occuperons dans ce Chapitre, *on peut, dans le cas du système planétaire, remplacer, sans erreur sensible, le Soleil et chaque système formé d'une planète et de ses satellites par un point matériel de même masse placé en son centre de gravité.* Cette proposition résulte, d'une part, de ce que les distances de ces corps sont très grandes par rapport à leurs dimensions, d'autre part, de ce que chacun d'eux est à peu près sphérique et formé de couches concentriques homogènes, de sorte que l'on peut leur appliquer les deux propositions suivantes qui sont de la plus haute importance dans l'étude des mouvements célestes :

(*a*) *Si deux corps célestes étaient formés chacun de couches sphériques concentriques homogènes, leurs actions mutuelles seraient rigoureusement les mêmes que si la masse de chacun d'eux était réunie en son centre de gravité.*

Soient en effet x, y, z les coordonnées d'un point d'un élément infiniment petit, de masse dm, d'un corps solide C; α, β, γ les coordonnées d'un point extérieur à l'élément, r sa distance à cet élément. Supposons que l'élément attire le point $\alpha\beta\gamma$ et que l'intensité de l'attraction soit une fonction $f(r)$ de r. Les composantes de l'attraction seront

$$X = \iiint f(r)\frac{x-\alpha}{r}\,dm,$$

$$Y = \iiint f(r)\frac{y-\beta}{r}\,dm,$$

$$Z = \iiint f(r)\frac{z-\gamma}{r}\,dm,$$

les intégrales étant étendues à toute la masse du corps attirant C. Désignons par $F(r)$ une fonction ayant $f(r)$ pour dérivée, ne devenant pas infinie entre les limites des intégrations, et par V la fonction

$$V = -\int\int\int F(r)\,dm,$$

l'intégrale s'étendant aussi à toute la masse du corps C. De la relation

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

on a déduit

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \int\int\int f(r)\frac{x-\alpha}{r}\,dm = X,$$

et de même

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = Y, \qquad \frac{\partial V}{\partial \gamma} = Z,$$

et ces formules fondées sur la règle de différentiation sous le signe $\int$ ne peuvent prêter ici à aucune objection, puisque les limites des intégrations sont indépendantes de α, β, γ et que l'élément différentiel ne devient pas infini entre ces limites.

Il est aisé de voir que cette dernière condition est satisfaite si $f(r)$ est la loi de Newton et que le point $\alpha\beta\gamma$ ne fasse pas partie de la masse du corps. On a alors, en désignant par f une constante positive,

$$f(r) = \frac{f}{r^2}, \qquad F(r) = -\frac{f}{r},$$

$$V = \int\int\int \frac{f\,dm}{r}.$$

Divisons la sphère en couches sphériques homogènes infiniment minces. Soient R le rayon de l'une d'elles, ε son épaisseur, ρ sa densité. Décomposons-la en zones dont l'une quelconque soit limitée par deux cercles de rayons sphériques θ et $\theta + d\theta$, ayant un même pôle situé sur la droite qui joint le centre de la sphère au point $\alpha\beta\gamma$. On a

$$dm = 2\pi RR \sin\theta\, d\theta\, \varepsilon\rho,$$

d'où

$$V = \int_0^\pi \varepsilon\rho\,\frac{2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta}{r}.$$

La relation

$$r^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta$$

donne

$$r\,dr = aR\sin\theta\, d\theta,$$

et

$$V = \frac{2\pi\varepsilon\rho R}{a} \int_{a-R}^{a+R} dr = \frac{4\pi\varepsilon\rho R^2}{a}.$$

Le numérateur est la masse de la couche sphérique, de sorte que V est égal au potentiel qui proviendrait de l'action de la masse de la couche sphérique sur le point $\alpha\beta\gamma$ si cette masse était concentrée en son centre. Le potentiel étant le même dans les deux cas, il en est de même des composantes X, Y, Z de l'attraction exercée sur le point $\alpha\beta\gamma$.

Le théorème s'étend de lui-même au cas d'un corps formé d'une infinité de couches sphériques concentriques homogènes attirant un point extérieur, et à celui où l'on envisage l'action mutuelle de deux corps ainsi constitués.

(*b*) *Quelle que soit la distribution de la densité* dans une masse attractive, *l'action de cette masse sur un point très éloigné* $\alpha\beta\gamma$ *est à peu près la même que si toute la masse attractive était concentrée en son centre de gravité.*

On a en effet, pour l'attraction suivant la loi de Newton,

$$X = \frac{\partial V}{\partial \alpha},$$

avec

$$V = \iiint \frac{f\,dm}{r}.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= [(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= [a^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (x^2 + y^2 + z^2)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{a}\left(1 - 2\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{a^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Le second terme de la parenthèse est du premier ordre par rapport à $\frac{r}{a}$, le troisième du second ordre, r désignant la distance du point xyz à l'origine des coordonnées que nous supposerons placée au centre de gravité des corps. On en conclut, par la série du binome,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} - \ldots\right).$$

Donc

$$V = \iiint \frac{f\,dm}{a} + \frac{\alpha}{a^3}\iiint \frac{fx\,dm}{a}$$
$$+ \frac{\beta}{a^3}\iiint y\,dm + \frac{\gamma}{a^3}\iiint z\,dm - \frac{1}{2a^3}\iiint x^2\,dm - \ldots .$$

Les trois intégrales qui suivent la première sont nulles, l'origine des coordonnées étant au centre de gravité. Donc, aux termes près du second ordre,

$$V = \iiint \frac{f\,dm}{a}.$$

C'est bien la valeur qu'aurait V si toute la masse attirante était réunie au centre de gravité.

170. Équations différentielles du mouvement d'un système de points matériels libres, s'attirant suivant la loi de Newton. — Soient m_0, m_1, m_2, ..., m_n les masses de ces points. Soient aussi, par rapport à des axes reetangulaires fixes dans l'espace, ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées du point dont la masse est m_i, et Δ_{ij} la distance de ce point à celui dont la masse est m_j. Soit enfin f l'action de l'unité de masse sur une masse égale placée à une distance de la première égale à l'unité de distance.

L'action mutuelle des deux masses m_i, m_j est

$$\frac{f m_i m_j}{\Delta_{ij}^2}.$$

Sa composante suivant l'axe des ξ est

$$f m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3},$$

s'il s'agit de l'action de m_j sur m_i : il faudrait en changer le signe pour l'action de m_i sur m_j.

D'après cela, les équations fondamentales de la Mécanique donnent pour les composantes de l'accélération du point m_i l'équation

$$(12) \qquad m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \sum f m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3}$$

et deux équations semblables se déduisant de la première par le

remplacement des lettres ξ par η ou ζ. Le symbole Σ_j indique une sommation qui s'étend à toutes les valeurs de j, la valeur i exceptée.

Si l'on pose avec Lagrange

$$U = f \sum \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{13}$$

la sommation s'étendant à tous les groupes de valeurs inégales des nombres i et j, l'équation (12) et les équations analogues deviennent

$$m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \qquad m_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \qquad m_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \tag{14}$$

la relation

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2 \tag{15}$$

montrant sans peine que le second membre de l'équation (12) est la dérivée partielle de U par rapport à ξ_i.

La fonction U s'appelle *fonction des forces*.

171. Équation du mouvement relatif des points $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par rapport au point m_0. — Rapportons les points $m_1, m_2, \ldots, m_n$ à trois axes de coordonnées parallèles aux premiers, menés par le point m_0. Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées du point m_i par rapport à ces axes. Elles sont liées aux anciennes par les relations

$$\xi_i = \xi_0 + x_i, \qquad \eta_i = \eta_0 + y_i, \qquad \zeta_i = \zeta_0 + z_i, \tag{16}$$

d'où il résulte

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ \frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= \frac{d^2\xi_0}{dt^2} + \frac{d^2 x_i}{dt^2}. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

L'équation (12) relative à la valeur o de i devient

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = fm_1 \frac{x_1}{r_1^3} + fm_2 \frac{x_2}{r_2^3} + \ldots + fm_n \frac{x_n}{r_n^3},$$

r_i désignant la distance Δ_{0i}. La première équation (16) devient, par l'introduction de ces diverses valeurs,

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} - \Sigma f m_k \frac{x_r}{r_k^3}, \tag{18}$$

k ayant toutes les valeurs 1, 2, 3, ..., n.

Si l'on désigne par U′ la partie de U indépendante de m_0, on a

$$U = U' + fm_0 \sum \frac{m_k}{r_k};$$

la valeur de U′ est d'ailleurs

$$U' = f \sum \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

les indices i et j ayant toutes les valeurs inégales de 1 à n.

On en conclut

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U'}{\partial x_i} - fm_0 \frac{m_k x_i}{r_i^3}$$

et l'équation (18) devient

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + fm_0 \frac{x_i}{r_i^3} + f \sum \frac{m_k x_k}{r_k^3} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U'}{\partial x_i}. \tag{18*}$$

Cette équation (18*), les deux qui s'en déduisent par la permutation de x en y, de y en z, donnent pour toutes les valeurs 1, 2, ..., n de i un système de $3n$ équations différentielles du second ordre entre les coordonnées x_i, y_i, z_i des corps $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par rapport à des axes ayant pour origine l'astre m_0.

On a coutume de modifier la forme de cette équation comme il suit : on réunit au premier membre les deux termes qui ont pour dénominateur r_i^3; on supprime au second membre les termes de U′ indépendants de x_i, et l'on groupe chacun des termes restant au second membre avec le terme correspondant du premier. L'équation relative au cas de $i = 1$ devient ainsi

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + f(m_0 + m_1) \frac{x_1}{r_1^3}$$
$$= fm_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\Delta_{1,2}} - \frac{x_2}{r_2^3} \right) + \ldots + fm_n \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\Delta_{1,n}} - \frac{x_n}{r_n^3} \right).$$

On observe ensuite que

$$\frac{x_2}{r_2^3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{x_n}{r_n^3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1 x_n + y_1 y_n + z_1 z_n}{r_n^3},$$

de sorte que, posant

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_1 = &\ fm_2\left(\frac{1}{\Delta_{1,2}} - \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_2^3}\right)+\ldots \\
&+fm_n\left(\frac{1}{\Delta_{1,n}} - \frac{x_1x_n+y_1y_n+z_1z_n}{r_n^3}\right), \\
\mathrm{R}_2 = &\ fm_1\left(\frac{1}{\Delta_{2,1}} - \frac{x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1}{r_1^3}\right)+\ldots \\
&+fm_n\left(\frac{1}{\Delta_{2,n}} - \frac{x_2x_n+y_2y_n+z_2z_n}{r_n^3}\right),
\end{aligned}$$

fonctions symétriques par rapport aux lettres x, y, z, les équations (18*) deviennent

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+f(m_0+m_1)\dfrac{x_1}{r_1^3}=\dfrac{\partial\mathrm{R}_1}{\partial x_1}, & \dfrac{d^2x_2}{dt^2}+f(m_0+m_1)\dfrac{x_2}{r_2^3}=\dfrac{\partial\mathrm{R}_2}{\partial x_2}, \\
\dfrac{d^2y_1}{dt^2}+f(m_0+m_1)\dfrac{y_1}{r_1^3}=\dfrac{\partial\mathrm{R}_1}{\partial y_1}, & \dfrac{d^2y_2}{dt^2}+f(m_0+m_2)\dfrac{y_2}{r_2^3}=\dfrac{\partial\mathrm{R}_2}{\partial z_2}, \\
\dfrac{d^2z_1}{dt^2}+f(m_0+m_1)\dfrac{z_1}{r_1^3}=\dfrac{\partial\mathrm{R}_1}{\partial z_1}, & \dfrac{d^2z_2}{dt^2}+f(m_0+m_2)\dfrac{z_2}{r_2^3}=\dfrac{\partial\mathrm{R}_2}{\partial z_2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Dans l'étude du mouvement des planètes, on prend pour m_0 le Soleil; $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ sont alors les coordonnées des planètes par rapport à des axes passant par le centre du Soleil.

172. Transformation en coordonnées polaires des équations du mouvement relatif des planètes autour du Soleil. — Désignant par m la masse de l'une des planètes, par exemple de la planète m_1, par x, y, z ses coordonnées, et posant

$$\mathrm{R}_1+\frac{f(m_0+m)}{r_1}=\mathrm{Q},$$

les équations

$$(19)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial x},\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial y},\qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial z}$$

sont dites *équations différentielles* du mouvement de cette planète $m(x, y, z)$, bien que les seconds membres dépendent des coordonnées des autres planètes et qu'au point de vue analytique il soit nécessaire de considérer ensemble les $3n$ équations (A).

Le plus souvent il est utile de remplacer les coordonnées rectan-

gulaires x, y, z par des coordonnées polaires r, θ, v liées aux premières par les relations

$$(20) \qquad x = r\cos\theta\cos v, \qquad y = r\cos\theta\sin v, \qquad z = r\sin\theta.$$

r est le rayon vecteur; nous appellerons θ la latitude, v la longitude, bien que nous ne supposions en aucune manière que le plan des xy soit l'écliptique, ni Ox la ligne des équinoxes.

Q est fonction de r, θ, v, étant fonction de x, y, z qui sont fonctions de r, θ, v. L'application du théorème relatif à la différentiation des fonctions composées donne

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

et des valeurs analogues pour $\frac{\partial Q}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial Q}{\partial v}$.

La substitution dans ces valeurs de celles de $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial r}, \dots,$ dont le calcul est immédiat, donne ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial r} &= \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{y}{r} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{z}{r},\\
\frac{\partial Q}{\partial \theta} &= -\frac{\partial Q}{\partial x}x\,\mathrm{tang}\,\theta - \frac{\partial Q}{\partial y}y\,\mathrm{tang}\,\theta + \frac{\partial Q}{\partial z}r\cos\theta,\\
\frac{\partial Q}{\partial v} &= -\frac{\partial Q}{\partial x}y + \frac{\partial Q}{\partial y}x.
\end{aligned}$$

Si l'on remplace aux seconds membres $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z}$ par $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ suivant les équations (19), on trouve

$$(21) \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial r} &= \frac{x}{r}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{y}{r}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{z}{r}\frac{d^2z}{dt^2},\\
\frac{\partial Q}{\partial \theta} &= -\mathrm{tang}\,\theta\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}\right) + v\cos\theta\frac{d^2z}{dt^2},\\
\frac{\partial Q}{\partial v} &= x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}.
\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres de ces équations s'expriment en coordonnées polaires comme il suit. Posant

$$r\cos\theta = \rho,$$

d'où

$$x = \rho\cos v, \qquad y = \rho\sin v,$$

on a

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 dv^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= d\rho^2 + dz^2 + r^2 \cos^2\theta\, dv^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2\theta\, dv^2. \end{aligned}$$

On a aussi

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

d'où

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$$

et

$$\begin{aligned} x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z &= r\,d^2r + dr^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= r\,d^2r - r^2 d\theta^2 - r^2 \cos^2\theta\, dv^2. \end{aligned}$$

De la relation

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} v,$$

on déduit

$$x\,dy - y\,dx = r^2 \cos^2\theta\, dv$$

et

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(r^2 \cos^2\theta \frac{dv}{dt}\right).$$

Enfin on trouve directement

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \sin\theta \frac{d^2 r}{dt^2} + 2\cos\theta \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} + r\cos\theta \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

La substitution de ces valeurs dans les équations (21) donne les équations cherchées

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial r} &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{d\theta^2}{dt^2} - r\cos^2\theta \frac{dv^2}{dt^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} &= r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r \frac{d\theta}{dt}\frac{dv}{dt} + r^2 \sin\theta\cos\theta \frac{dv^2}{dt^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial v} &= \frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\theta \frac{dv}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

173. Autre transformation des mêmes équations. — Posons

$$r\cos\theta = \frac{1}{u}, \qquad \operatorname{tang}\theta = s,$$

$\frac{1}{u}$ étant la projection du rayon vecteur r sur le plan des xy, s la tangente de la latitude.

Multiplions par $2r^2\cos^2\theta \frac{dv}{dt}$ les deux membres de la troisième équation B, et supprimons le dénominateur dt, nous aurons, par

l'introduction de la variable u,

$$2\frac{1}{u^2}\frac{dv}{dt}d\left(\frac{1}{u^2}\frac{dv}{dt}\right)=\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{2}{u^2}dv,$$

d'où, en intégrant et désignant par c une constante arbitraire,

$$\left(\frac{1}{u^2}\frac{dv}{dt}\right)^2=c+\int\frac{2}{u^2}\frac{\partial Q}{\partial v}dv$$

et

$$(22)\qquad dt=\frac{dv}{u^2\sqrt{c+\int\frac{2}{u^2}\frac{\partial Q}{\partial v}dv}}.$$

On utilisera cette relation pour éliminer dt des deux premières équations (B) et, le faisant, on prendra v pour variable indépendante.

A cet effet, en désignant par γ le radical qui figure au dénominateur de dt dans l'équation (22) et observant que

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial v},$$

on a

$$(23)\qquad\left\{\begin{aligned}
\frac{dr}{dt}&=\frac{s}{u\sqrt{1+s^2}}\frac{ds}{dt}-\frac{\sqrt{1+s^2}}{u^2}\frac{du}{dt}=\frac{\gamma us}{\sqrt{1+s^2}}\frac{ds}{dv}-\gamma\sqrt{1+s^2}\frac{du}{dv},\\
\frac{d^2r}{dt^2}&=\gamma u^2\left[\frac{\gamma us}{\sqrt{1+s^2}}\frac{d^2s}{dv^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\gamma u}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{ds^2}{dv^2}-\gamma\sqrt{1+s^2}\frac{d^2u}{dv^2}\right]+\frac{1}{\gamma}\frac{dr}{dt}\frac{dQ}{dv},\\
\frac{d\theta}{dt}&=\frac{\gamma u^2}{1+s^2}\frac{ds}{dv},\\
\frac{d^2\theta}{dt^2}&=\gamma u^2\left[\frac{\gamma u^2}{1+s^2}\frac{d^2s}{dv^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2\gamma u}{1+s^2}\frac{du}{dv}\frac{ds}{dv}-\frac{2\gamma u^2 s}{(1+s^2)^2}\frac{ds^2}{dv^2}\right]+\frac{u^2}{1+s^2}\frac{ds}{dv}\frac{\partial Q}{\partial v}.
\end{aligned}\right.$$

D'autre part on a, les variables u, s se substituant à r et θ,

$$(24)\qquad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial\theta}&=\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial Q}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\theta}=us\frac{\partial Q}{\partial u}+(1+s^2)\frac{\partial Q}{\partial s},\\
\frac{\partial Q}{\partial r}&=\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{u^2}{\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial Q}{\partial u}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on porte les valeurs (23) et (24) dans les deux premières

équations (B), la seconde donne d'abord

$$(25)\qquad \frac{d^2 s}{dv^2}+s=\frac{1}{\gamma^2 u^2}\left[us\frac{\partial Q}{\partial u}+(1+s^2)\frac{\partial Q}{\partial s}-\frac{ds}{dv}\frac{\partial Q}{\partial v}\right].$$

La première équation (B) devient

$$us\frac{d^2 s}{dv^2}-(1+s^2)\frac{d^2 u}{dv^2}-u=\frac{1}{\gamma^2 u^2}\left[(1+s^2)\frac{du}{dv}-us\frac{ds}{dv}\right]\frac{\partial Q}{\partial v}-\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial Q}{\partial u},$$

et si l'on élimine $\frac{d^2 s}{dv^2}$ au moyen de l'équation (25)

$$(26)\qquad \frac{d^2 u}{dv^2}+u=-\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial Q}{\partial u}+\frac{s}{\gamma^2 u}\frac{\partial Q}{\partial s}-\frac{1}{\gamma^2 u^2}\frac{du}{dv}\frac{\partial Q}{\partial v}.$$

En réunissant les équations (22), (25), (26), on obtient le système suivant

$$(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{aligned} dt &= \frac{dv}{u^2\sqrt{c+\int\frac{2}{u^2}\frac{\partial Q}{\partial v}dv}},\\ \frac{d^2 u}{dv^2}+u &= \frac{us\frac{\partial Q}{\partial s}+u^2\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{du}{dv}\frac{\partial Q}{\partial v}}{u^2\left(c+\int\frac{2}{u^2}\frac{\partial Q}{\partial v}dv\right)},\\ \frac{d^2 s}{ds^2}+s &= \frac{(1+s^2)\frac{\partial Q}{\partial s}+us\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{ds}{dv}\frac{\partial Q}{\partial v}}{u^2\left(c+\int\frac{2}{u^2}\frac{\partial Q}{\partial v}dv\right)},\end{aligned}\right.$$

qui a été utilisé par Laplace dans la *Théorie de la Lune*. Il convient de remarquer que Q est une fonction non seulement de u, v, s, mais aussi des coordonnées des autres planètes, que l'on devra regarder ces dernières comme des fonctions connues du temps et les exprimer en fonction de v avant d'effectuer la quadrature

$$\int\frac{2}{u^2}\frac{\partial Q}{\partial v}dv.$$

La constante c dépend de la limite inférieure adoptée pour cette intégrale.

174. Composantes de la force accélératrice suivant la projection du rayon vecteur, la perpendiculaire à cette projection dans le plan des xy et l'axe des z. — Si l'on désigne par P, T, S les com-

posantes de la force accélératrice suivant la projection du rayon vecteur, sur le plan des xy, suivant la perpendiculaire à cette projection et suivant l'axe des z, on a

$$P = \cos v \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \sin v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \cos v \frac{d^2 x}{dt^2} + \sin v \frac{d^2 y}{dt^2},$$

$$T = -\sin v \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \cos v \frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\sin v \frac{d^2 x}{dt^2} + \cos v \frac{d^2 y}{dt^2},$$

$$S = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Si l'on prend pour variables au lieu de x et y la longitude v et la projection ρ du rayon vecteur sur le plan des x, y, ce qui donne

$$x = \rho \cos v, \qquad y = \rho \sin v,$$

on a d'une part

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

d'où

$$\cos v \frac{dx}{dt} + \sin v \frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt};$$

d'autre part

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} v,$$

d'où

$$\cos v \frac{dy}{dt} - \sin v \frac{dx}{dt} = \rho \frac{dv}{dt},$$

puis en différentiant ces deux dernières formules

$$(D) \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \frac{dv^2}{dt^2}, \\ T &= \frac{d\rho}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt}\left[\rho \frac{dv}{dt}\right] = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}\left[\rho^2 \frac{dv}{dt}\right], \\ S &= \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right.$$

175. Intégration des équations différentielles dans le cas où l'on ne considère qu'une seule planète. — Dans le cas où l'on suppose qu'une planète soit seule en présence du Soleil, les équations du mouvement relatif se déduisent des équations (A) en y faisant $R = 0$, ce qui donne

$$Q = \frac{f(m_0 + m_1)}{r}.$$

Désignons, pour abréger, par μ la somme $m_0 + m_1$ des masses du Soleil et de la planète.

Les équations du mouvement sont

$$(\text{A}') \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + f\mu\frac{x}{r^3} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + f\mu\frac{y}{r^3} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + f\mu\frac{z}{r^3} = 0.$$

On déduit d'abord de ces équations les suivantes

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \qquad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

dont l'intégration immédiate donne

$$(27) \qquad y\,dz - z\,dy = c\,dt, \quad z\,dx - x\,dz = c'\,dt, \quad x\,dy - y\,dx = c''\,dt,$$

d'où

$$(28) \qquad cx + c'y + c''z = 0.$$

L'équation (28) montre que l'orbite de la planète est située dans un plan passant par le centre du Soleil.

Les équations (27) montrent que les projections sur les trois plans de coordonnées des aires décrites dans le temps dt par le rayon vecteur mené du Soleil à la planète sont proportionnelles à ce temps infiniment petit dt; et, par suite, la même propriété a lieu pour des intervalles de temps quelconques. Il s'ensuit que l'aire même décrite par le rayon vecteur est proportionnelle au temps, et si σ désigne l'aire décrite dans le temps τ

$$(29) \qquad 2\sigma = \tau\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = h\tau.$$

Si l'on multiplie les deux membres des équations (A′) respectivement par $2\,dx$, $2\,dy$, $2\,dz$ et qu'on les additionne membre à membre, elles donnent

$$d\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) - 2f\mu\,d\frac{1}{r} = 0,$$

d'où, en désignant par v la vitesse de la planète, et par a une constante arbitraire,

$$(30) \qquad v^2 = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Or, si l'on pose,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

on a

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2} = h^2\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{r^4\,d\theta^2} = h^2\left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right],$$

d'où, en différentiant les deux valeurs de v^2,

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{f\mu}{h^2}$$

ou

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r} - \frac{f\mu}{h^2}\right)}{d\theta^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{f\mu}{h^2}\right) = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle est

$$\frac{1}{r} - \frac{f\mu}{h^2} = \frac{f\mu}{h^2}e\cos(\theta - \varpi),$$

e et ϖ désignant deux nouvelles constantes arbitraires. Cette équation qui s'écrit encore

$$(31) \qquad r = \frac{\frac{h^2}{f\mu}}{1 + e\cos(\theta - \varpi)}$$

est celle d'une section conique dont le Soleil occupe un foyer. L'excentricité est e, le paramètre $\frac{h^2}{f\mu}$.

On posera

$$\frac{h^2}{f\mu} = a(1 - e^2).$$

Trois cas sont à distinguer :

I. Si e est moindre que 1, l'orbite est une ellipse, et l'on achève l'intégration en intégrant l'équation des aires

$$2\,d\sigma = h\,dt$$

ou

$$(32) \qquad r^2\,d\theta = h\,dt.$$

A cet effet, on change de variables en posant

$$\tang\frac{\theta - \varpi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{u}{2},$$

ce qui donne

$$r = \frac{\frac{h^2}{f\mu}\left(1+\tang^2\frac{\theta-\varpi}{2}\right)}{1+e+(1-e)\tang^2\frac{\theta-\varpi}{2}}$$

$$= \frac{h^2}{f\mu}\,\frac{(1-e)+(1+e)\tang^2\frac{u}{2}}{(1-e^2)\left(1+\tang^2\frac{u}{2}\right)} = \frac{h^2}{f\mu(1-e^2)}(1-e\cos u) = a(1-e\cos u).$$

On a aussi

$$\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta-\varpi}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}$$

ou, en exprimant $\cos\frac{\theta-\varpi}{2}$ au moyen de u,

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\,du = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}\,du.$$

Enfin on trouve

$$r^2\,d\theta = a\sqrt{1-e^2}\,r\,du = a^2\sqrt{1-e^2}(1-e\cos u)\,du.$$

La substitution de cette valeur dans l'équation (32) donne

$$(33)\qquad u - e\sin u = \frac{h}{a^2\sqrt{1-e^2}}(t-t_0),$$

t_0 étant la valeur de t à l'époque où u est nulle.

L'intégration a introduit les constantes arbitraires $c, c', c'', e, \varpi, t_0$, au nombre de six. Les équations (27), (30), (31), (33) donnent bien l'intégration complète des équations (A′), la constante a qui entre dans l'équation (30) étant fonction de c, c', c'', et e.

II. Si $e=1$, l'orbite est parabolique; l'équation (31), si l'on y remplace $\frac{h^2}{f\mu}$ par $2q$, s'écrit

$$r = \frac{q}{\cos^2\frac{\theta-\varpi}{2}}.$$

L'équation (32) donne

$$\left(1+\tang^2\frac{\theta-\varpi}{2}\right)d\tang\frac{\theta-\varpi}{2} = \frac{h}{2q^2}\,dt;$$

son intégration est immédiate; elle conduit à l'équation du troisième degré

$$\operatorname{tang}\frac{\theta-\varpi}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{\theta-\varpi}{2}=\frac{h}{2q^2}(t-t_0), \tag{34}$$

t_0 étant l'époque à laquelle l'angle $\theta-\varpi$ est nul.

III. Si $e>1$ l'orbite est hyperbolique. Pour intégrer l'équation (32) des aires, on fait un changement de variable en posant

$$\operatorname{tang}\frac{\theta-\varpi}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\frac{E^u-1}{E^u+1},$$

où E désigne la base des logarithmes népériens.

On trouve successivement

$$\left\{\begin{aligned} r&=-a\left(e\frac{E^u+E^{-u}}{2}-1\right),\\ r\,d\theta&=-a\sqrt{e^2-1}\,du;\end{aligned}\right. \tag{35}$$

d'où par substitution dans l'équation (32) des aires

$$\left(e\frac{E^u+E^u}{2}-1\right)du=\frac{h}{a^2\sqrt{e^2-1}}\,dt,$$

et en intégrant

$$e\frac{E^u-E^{-u}}{2}-u=\frac{h}{a^2\sqrt{e^2-1}}(t-t_0)=\frac{\sqrt{f\mu}}{(-a)^{\frac{3}{2}}}(t-t_0), \tag{36}$$

t_0 étant l'époque à laquelle u est nulle et θ égale à ϖ. C'est l'époque du passage au périhélie.

On peut transformer utilement ces formules en introduisant à la place de u une variable F définie par la relation

$$\frac{E^u-1}{E^u+1}=\operatorname{tang}\frac{F}{2}. \tag{37}$$

Si l'on pose

$$n=\frac{\sqrt{f\mu}}{(-a)^{\frac{3}{2}}}, \tag{38}$$

comme on a

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\frac{\theta-\varpi}{2}&=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{tang}\frac{F}{2},\\ r&=-a\left(\frac{2}{\cos F}-1\right),\end{aligned}\right. \tag{39}$$

la relation entre u et le temps devient

$$e \operatorname{tang} F - \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{F}{2}\right) = n(t - t_0).$$

La variable F est analogue à l'anomalie excentrique.

176. Seconde méthode d'intégration des équations du problème des deux corps; intégrales de Laplace. — On a d'abord les intégrales des aires

$$(27^*) \qquad c = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}, \qquad c' = z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}, \qquad c'' = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

On déduit aussi des équations (A′) l'équation

$$(40) \qquad c''\frac{d^2y}{dt^2} - c'\frac{d^2z}{dt^2} + f\mu\frac{c''y - c'z}{r^3} = 0,$$

puis des intégrales des aires la suivante

$$\begin{aligned} c''y - c'z &= -(y^2 + z^2)\frac{dx}{dt} + x\left(y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2)\frac{dx}{dt} + x\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) \\ &= -r^2\frac{dx}{dt} + xr\frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

Cette valeur étant introduite dans l'équation (40), cette équation devient

$$c''\frac{d^2y}{dt^2} - c'\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{f\mu x}{r}\right) = 0.$$

L'intégration est immédiate; elle donne la première des équations suivantes dont les deux autres se déduisent par des permutations circulaires

$$(41) \qquad \begin{cases} -c''\dfrac{dy}{dt} + c'\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{f\mu x}{r} = \mathfrak{f}, \\ -c\dfrac{dz}{dt} + c''\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{f\mu x}{r} = \mathfrak{f}', \\ -c'\dfrac{dx}{dt} + c\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{f\mu x}{r} = \mathfrak{f}''. \end{cases}$$

Si l'on remplace dans les premiers membres de ces équations (41) c, c', c'' par les valeurs que donnent les intégrales des

aires, on obtient les trois intégrales suivantes dues à Laplace

$$(42)\quad \begin{cases} \mathfrak{f} = f\mu\dfrac{x}{r} + \dfrac{dx}{dt}\left(x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} + z\dfrac{dz}{dt}\right) - x\left(\dfrac{dx^2}{dt^2} + \dfrac{dy^2}{dt^2} + \dfrac{dz^2}{dt^2}\right), \\ \mathfrak{f}' = f\mu\dfrac{y}{r} + \dfrac{dy}{dt}\left(x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} + z\dfrac{dz}{dt}\right) - y\left(\dfrac{dx^2}{dt^2} + \dfrac{dy^2}{dt^2} + \dfrac{dz^2}{dt^2}\right), \\ \mathfrak{f}'' = f\mu\dfrac{z}{r} + \dfrac{dz}{dt}\left(x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} + z\dfrac{dz}{dt}\right) - z\left(\dfrac{dx^2}{dt^2} + \dfrac{dy^2}{dt^2} + \dfrac{dz^2}{dt^2}\right). \end{cases}$$

En joignant aux trois intégrales des aires et aux trois intégrales de Laplace celle des forces vives

$$(30^*)\qquad \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

on a sept intégrales premières du système A′. Ces sept intégrales ne sont pas distinctes, puisqu'un système de trois équations différentielles du second ordre ne peut en avoir que six; et même, le temps n'entrant dans ces sept intégrales que par sa différentielle, elles se réduisent non pas à six intégrales distinctes, mais seulement à cinq, l'intégration qui donnera t devant introduire une nouvelle constante arbitraire. On peut donc affirmer qu'entre les sept constantes c, c', c'', $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}''$, a il y a deux relations.

Si l'on multiplie les deux membres des équations (42) respectivement par c, c', c'', on obtient immédiatement, en tenant compte de l'équation (28), la relation

$$(43)\qquad c\,\mathfrak{f} + c'\mathfrak{f}' + c''\mathfrak{f}'' = 0.$$

D'autre part, en posant

$$l^2 = \mathfrak{f}^2 + \mathfrak{f}'^2 + \mathfrak{f}''^2,$$

on déduit des équations (42)

$$l^2 = f^2\mu^2 + r^2\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)\left[\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} - \frac{2f\mu}{r}\right]$$
$$- \left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)^2\left[\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} - \frac{2f\mu}{r}\right],$$

d'où

$$l^2 - f^2\mu^2 = r^2\left[\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2}\right]\left[\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} - \frac{2f\mu}{r}\right].$$

Comme les intégrales des aires donnent

$$(44)\qquad h^2 = c^2 + c'^2 + c''^2 = r^2\left[\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2}\right],$$

l'identité précédente devient

$$(45)\qquad l^2 - f^2\mu^2 = -\frac{h^2 f\mu}{a}.$$

Les relations (43) et (45) sont les deux conditions cherchées.

Les intégrales précédentes donnent comme il suit la trajectoire et la position de la planète dans son orbite.

L'équation

$$cx + c'y + c''z = 0$$

déduite des intégrales des aires indique que l'orbite est plane et $\frac{c}{h}, \frac{c'}{h}, \frac{c''}{h}$ sont les cosinus des angles que la normale à son plan fait avec les axes de coordonnées.

Les équations (41) donnent immédiatement

$$\mathfrak{f}x + \mathfrak{f}'y + \mathfrak{f}''z = \mathfrak{f}\mu r - h^2,$$

équation qui exprime que l'orbite est une section conique ayant l'origine pour foyer.

Si X, Y, Z sont les coordonnées du périhélie, point pour lequel $\frac{dr}{dt} = 0$ et $r = a(1-e)$, les intégrales de Laplace donnent

$$\frac{\mathfrak{f}}{X} = \frac{\mathfrak{f}'}{Y} = \frac{\mathfrak{f}''}{Z} = \frac{f\mu}{r} - V^2 = f\mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) = -\frac{f\mu e}{r}.$$

X, Y, Z étant les projections sur les trois axes de la distance périhélie r, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}''$ sont les projections sur les mêmes axes d'une longueur $f\mu e$ portée sur l'axe focal en sens inverse de la distance périhélie, c'est-à-dire vers le centre.

Si R désigne le rayon vecteur du périhélie (ou de l'aphélie), l'équation (44) donne, en tenant compte de l'intégrale des forces vives (30),

$$h^2 = f\mu R^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

ou

$$R^2 - 2aR + \frac{ah^2}{f\mu} = 0.$$

La demi-somme des rayons vecteurs extrêmes ou le demi-axe focal est donc a et l'excentricité e est donnée par la formule

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{af\mu}},$$

d'où, en tenant compte de la condition (45),

$$e = \frac{l}{f\mu}.$$

Enfin on exprime r en fonction du temps en combinant l'équation (44) avec l'intégrale des forces vives; on trouve

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{f\mu}\sqrt{2r - \frac{r^2}{a} - a(1-e^2)}},$$

équation que l'on intègre en exprimant r au moyen de l'anomalie excentrique ou de l'angle analogue dans le cas de l'hyperbole, et qui s'intègre immédiatement dans le cas de la parabole.

177. Lois de Képler. — On trouvera dans le premier Volume de la *Mécanique céleste* de Laplace et dans l'Ouvrage de M. Tisserand d'autres procédés fort élégants d'intégration. Nous nous bornerons ici à déduire des méthodes précédentes l'énoncé exact de la troisième loi de Képler.

La constante des aires h est le double de l'aire décrite dans l'unité de temps. Si g est le double de l'aire décrite dans le temps t,

$$\frac{g}{t} = h.$$

Or on a vu que, si p désigne le paramètre $a(1-e^2)$,

$$\frac{h^2}{f\mu} = p.$$

Donc

$$\frac{g}{t\sqrt{p}\sqrt{\mu}} = \sqrt{f}, \tag{46}$$

ce qui est l'énoncé de Gauss.

Si l'on prend pour t la durée T de la révolution en supposant le mouvement elliptique, ce qui a lieu pour toutes les planètes, g

est égal à $2\pi a^2\sqrt{1-e^2}$. L'équation (46) donne

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f\mu = f(m_0 + m).$$

178. Détermination de la masse d'une planète ayant un satellite. — La loi de Newton permet, par l'application de la troisième loi de Képler, de déterminer la masse d'une planète dont le mouvement et la distance au Soleil sont connus, quand on connaît la durée de la révolution d'un satellite autour d'elle et la distance de ce satellite à la planète.

Soient en effet m_0 la masse du Soleil, m celle de la planète, m_1 celle du satellite, a, T le demi grand axe de l'orbite de la planète autour du Soleil et la durée de sa révolution sidérale, a' le demi grand axe de l'orbite du satellite autour de la planète et la durée de sa révolution sidérale. On a les relations

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(m_0 + m),$$

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(m + m'),$$

d'où

$$\frac{a^3}{T^2} : \frac{a'^3}{T'^2} = \frac{m_0 + m}{m + m'}.$$

Si l'on néglige la masse du satellite par rapport à celle de la planète, ou si, par d'autres considérations, on connaît le rapport $\frac{m'}{m}$ de ces deux masses, cette relation donnera le rapport $\frac{m}{m_0}$ de la masse de la planète à celle du Soleil.

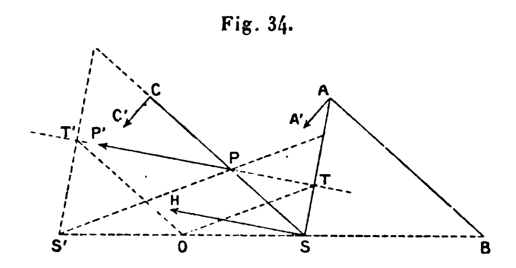
179. Hodographe de Hamilton. — *Si l'on mène par le centre* S *du Soleil un vecteur égal et parallèle à la vitesse de la planète, le lieu de l'extrémité de ce vecteur, nommé* hodographe, *est un cercle dont le rayon* R *est* $\frac{he}{p}$, *et dont le centre, situé sur la perpendiculaire à l'axe focal menée par le centre du Soleil, a pour ordonnée* $\frac{h}{p}$ (h désigne comme ci-dessus la constante des aires, p le paramètre, e l'excentricité).

Cette propriété est presque évidente si, au lieu de mener le

vecteur parallèle à la vitesse, on le mène perpendiculairement à cette vitesse.

Soient, en effet (*fig.* 34), S le centre du Soleil, S' l'autre foyer

Fig. 34.



de l'orbite, O son centre, P la planète, PP' sa vitesse, T, T' les projections de S et S' sur la tangente PP'. Menons le vecteur SH égal et parallèle à PP' et portons sur ST une longueur SA égale à PP'.

La loi des aires exprime que le double du triangle infiniment petit compris entre le rayon vecteur SP et un rayon vecteur voisin est égal à $h\,dt$. Donc

$$\text{ST}.ds = h\,dt,$$

d'où

$$\text{ST}.\text{SA} = h.$$

On a aussi

$$\text{ST}.\text{S}'\text{T}' = ap,$$

d'où

$$\frac{\text{SA}}{\text{S}'\text{T}'} = \frac{h}{ap}.$$

Menons par le point A une parallèle AB à SP jusqu'à sa rencontre avec l'axe focal. La similitude des triangles SAB, S'T'O donne

$$\frac{\text{AB}}{\text{OT}'} = \frac{\text{SB}}{\text{S}'\text{O}} = \frac{h}{ap}.$$

Donc

$$\text{AB} = \frac{h}{p} = \frac{f\mu}{h} = \sqrt{\frac{f\mu}{p}}, \qquad \text{SB} = \frac{he}{p} = e\sqrt{\frac{f\mu}{p}}.$$

Le lieu du point A est donc un cercle du rayon $\frac{h}{p}$ ayant pour centre le point fixe B. Il s'ensuit que le lieu du point H est un cercle de même rayon dont le centre est situé sur la perpendiculaire menée en S à l'axe focal à une distance du point S égale à SB.

M. Darboux a remarqué que la construction du point B conduit immédiatement aux intégrales de Laplace. A cet effet il énonce le théorème en ces termes :

Si l'on mène un vecteur SA perpendiculaire à la vitesse de la planète et égal à cette vitesse, puis par le point A un vecteur parallèle à SP et égal à $\frac{f\mu}{h}$, f étant le coefficient de l'attraction, μ la somme des masses du Soleil et de la planète, le vecteur résultant SB est constant.

Soient x, y, z les coordonnées du point P par rapport à trois axes rectangulaires ayant pour origine le centre S du Soleil.

Les composantes du vecteur AB sont

$$-\frac{f\mu}{h}\frac{x}{r},\quad -\frac{f\mu}{h}\frac{y}{r},\quad -\frac{f\mu}{h}\frac{z}{r}.$$

Pour avoir celles du vecteur SA, observons qu'il est perpendiculaire à la normale au plan de l'orbite, laquelle fait avec les axes des angles dont les cosinus sont $\frac{c}{h}$, $\frac{c'}{h}$, $\frac{c''}{h}$ (c, c', c'' étant les trois composantes de h), et à la vitesse du point P, et qu'il est égal à cette vitesse.

Les cosinus des angles que fait SA avec les axes sont donc

$$\frac{c''}{h}\frac{dy}{ds}-\frac{c'}{h}\frac{dz}{ds},\quad \frac{c}{h}\frac{dz}{ds}-\frac{c''}{h}\frac{dx}{ds},\quad \frac{c'}{h}\frac{dx}{ds}-\frac{c}{h}\frac{dy}{ds},$$

et les composantes de ce vecteur sont

$$\frac{c''}{h}\frac{dy}{dt}-\frac{c'}{h}\frac{dz}{dt},\quad \frac{c}{h}\frac{dz}{dt}-\frac{c''}{h}\frac{dx}{dt},\quad \frac{c'}{h}\frac{dx}{dt}-\frac{c}{h}\frac{dy}{dt}.$$

Les équations qui expriment que les deux vecteurs ont une résultante constante sont donc

$$-f\mu\frac{x}{r}+c''\frac{dy}{dt}-c'\frac{dz}{dt}=-\mathfrak{f},$$

$$-f\mu\frac{y}{r}+c\frac{dz}{dt}-c''\frac{dx}{dt}=-\mathfrak{f}',$$

$$-f\mu\frac{z}{r}+c'\frac{dx}{dt}-c\frac{dy}{dt}=-\mathfrak{f}'',$$

les nombres $-\frac{f}{h}$, $-\frac{f'}{h}$, $-\frac{f''}{h}$ désignant les coordonnées du point B.

Nous retrouvons les équations (41) équivalentes aux intégrales de Laplace.

M. Darboux montre d'ailleurs que la propriété qu'a le point A de décrire un cercle est intuitive si l'on part, non pas de ce que l'orbite est une section conique, mais immédiatement de la loi de Newton.

En effet, la vitesse du point H est visiblement égale et parallèle à l'accélération $\frac{f\mu}{SP^2}$ du point P. Celle du point A est donc perpendiculaire à SP et égale à $\frac{f\mu}{SP^2}$.

D'autre part, prenons sur SP un vecteur SC égal à $\frac{f\mu}{h}$. Le point C décrira un cercle et sa vitesse sera $\frac{f\mu}{h}\frac{dv}{dt}$, ou, à cause de la loi des aires, $\frac{f\mu}{SP^2}$.

Le point A et le point C ont constamment des vitesses égales et parallèles. On peut donc passer de la trajectoire de l'une à celle de l'autre par une simple translation. Si donc on mène AB égale et parallèle à CS, le point B est fixe et le lieu du point A est un cercle ayant pour centre le point B.

180. Éléments des orbites elliptiques des planètes principales. — Nous donnons ici, d'après l'*Annuaire du Bureau des Longitudes,* les éléments des orbites des planètes principales et d'autres éléments concernant les dimensions de ces planètes, du Soleil et de la Lune, et leur mouvement de rotation.

Dans la première colonne, on a représenté ces astres par les symboles suivants constamment employés par les astronomes :

Mercure............	☿	Jupiter.............	♃
Vénus..............	♀	Saturne.............	♄
La Terre...........	♁	Uranus.............	♅
Mars...............	♂	Neptune............	♆
Soleil..............	☉	Lune...............	☾

Noms.	Moyens mouvements diurnes.	Révolutions sidérales en années juliennes et jours moyens.	Distances moyennes au Soleil.	Excentricités.
	"	j		
☿...	14732,4194	87,969258	0,3870987	0,2056048
♀...	5767,6698	ans 224,700787	0,7233322	0,0068433
♁...	3548,1927	1 + 0,006374	1,0000000	0,0167701
♂...	1886,5184	1 +321,729646	1,5236913	0,0932611
♃...	299,1284	11 +314,838171	5,202800	0,0482519
♄...	120,4547	29 +166,986360	9,538861	0,0560713
♅...	42,2310	84 + 7,39036	19,18329	0,0463402
♆...	21,5350	164 +280,11316	30,05508	0,0089646

Noms.	Longitudes des périhélies.	Longitudes moyennes au 1er janvier 1850 à midi moyen de Paris.	Longitudes des nœuds ascendants.	Inclinaisons.
☿...	75°. 7'.14"	327°.15'.20"	46°.33'. 9"	7°. 0'. 8"
♀...	129.27.15	245.33.15	75.19.52	3.23.35
♁...	100.21.22	100.46.44	....	0. 0. 0
♂...	333.17.54	83.40.31	48.23.53	1. 5. 2
♃...	11.54.58	160. 1.10	98.56.17	1.18.41
♄...	90. 6.38	14.52.28	112.20.53	2.29.40
♅...	170.50. 7	29.17.51	73.13.54	0.46.20
♆...	45.59.43	334.33.29	130. 6.25	1.47. 2

Les longitudes sont rapportées à l'équinoxe du 1er janvier 1850.

Noms.	Diamètres équatoriaux.	Volumes.	Inverses des masses rapportées à celle du Soleil.	Densité, celle de l'eau étant 1.	Pesanteur à l'équateur.	Durée de la rotation.
						j h m
☿...	0,373	0,052	5310000	6,45	0,439	28 ?
♀...	0,999	0,975	412150	4,44	0,802	225 ?
♁...	1	1	324439	5,50	1	22.56. 4
♂...	0,528	0,147	3093500	3,91	0,376	24.37.23
♃...	11,061	1279,412	1047,2	1,33	2,261	9.55.37
♄...	9,299	718,883	3529,6	0,70	0,892	10.14.74
♅...	4,234	69,237	24000	1,07	0,754	»
♆...	3,798	54,955	19700	1,65	1,142	»
☉...	108,558	1283,720	1	1,39	27,625	25. 4.29
☾...	0,273	0,020	25858000	3,38	0,174	27. 7.43.11

La durée de la rotation de Mercure est encore incertaine; celle de Vénus est très incertaine. Les nombres donnés ici pour ces deux planètes sont ceux de Schiaparelli.

181. Éléments des satellites. — Dans les Tableaux ci-dessous, établis pour des époques diverses, d'après les travaux les plus précis concernant ces satellites, A désigne l'auteur et θ la date de la découverte, en temps moyen de Paris, *t* l'époque, L la longitude moyenne du satellite à cette date, ☊ et *i* la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison, ω et *e* l'argument de la latitude du péri-planète et l'excentricité, *a* le demi grand axe de l'orbite, rapporté au demi-diamètre équatorial de la planète, T la durée de la révolution sidérale en secondes de temps moyen, *m* la masse du satellite rapportée à celle de la planète. (Les masses des satellites de Saturne sont très incertaines.)

Satellites de Mars.

(Écliptique et équinoxe moyen de 1878,0).

	Phobos.	Deimos.
A	Asaph Hall	Asaph Hall
θ	17 août 1877	11 août 1877
t	1877 août 28,0	1877 août 28,0
L	319°.41′.6″	38°.18′.7″
☊	82.57.6	85.34.4
ω	4.13.9	357.58.4
i	26.17.2	25.47.2
e	0,03208	0,00574
a	2,771	6,921
T	$7^h 39^m 15^s,1$	$1^j 6^h 17^m 54^s,0$

Satellites de Jupiter.

(Équinoxe moyen de l'époque).

	I.	II.	III.	IV.	V.
A	Galilée	S. Marius	Galilée	Galilée	Barnard
θ	7 janv. 1610	8 janv. 1610	7 janv. 1610	7 janv. 1610	9 sept. 1892
t	1850 janv. 0	1850 janv. 0	1850 janv. 0	1850 janv. 0	»
L	146°.43′.54″	14°.20′. 6″	37°. 7′.33″	164°.12′.59″	»
☊	335.45. 0	336.55.16	341.30.23	344.56.46	»
ω	»	»	235.18.32	266.40.56	»
i	2. 8. 3	1.38.57	1.59.53	1.57. 0	»
e	0	0	0,001316	0,007243	»
a	5,933	9,439	15,057	26,486	2,50
T	$1^j 18^h 27^m 33^s,51$	$4^j 13^h 13^m 42^s,05$	$7^j 3^h 42^m 33^s,39$	$16^j 15^h 32^m 11^s,20$	$11^h 49^m 38^s$
m	0,000016877	0,000023227	0,000088437	0,000042475	»

Anneau de Saturne.

Pour l'équinoxe de 1880,0

$$\Omega = 167^\circ 55' 6'', \qquad i = 28^\circ 10' 17''.$$

Le demi-diamètre équatorial de Saturne étant 1,

Le demi-diamètre	extérieur de l'anneau extérieur est......	2,229
»	intérieur de l'anneau extérieur est......	1,962
»	extérieur de l'anneau intérieur est......	1,916
»	intérieur de l'anneau intérieur est......	1,482

La durée de la rotation d'après W. Herschel $10^h 32^m 15^s$.
La masse, d'après M. F. Tisserand, $\frac{1}{620}$ de celle de Saturne.

Satellites de Saturne.

(Équinoxe moyen de l'époque).

	Mimas.	Encelade.	Téthys.	Dioné.
A....	W. Herschel	W. Herschel	J.-D. Cassini	J.-D. Cassini
θ.....	16 juillet 1789	20 août 1789	21 mars 1684	21 mars 1684
t.....	1889 mars 31,0	1889 mars 23,0	1889 mars 17,0	1889 sept. 1,0
L....	$84^\circ 56'$	$256^\circ 17' 24''$	$138^\circ 4' 48''$	$56^\circ 45' 8''$
Ω....	165. 0	167.56.30	166. 7.24	167.40.0
ω....	300	122.28	»	270.50
i.....	27.36	28. 7. 0	28.40.12	27.58.36
e....	0,016	0,0047	»	0,00396
a....	3,10	3,98	4,93	6,31
T....	$0^j 22^h 37^m 5^s,1$	$1^j 8^h 53^m 7^s,0$	$1^j 21^h 18^m 26^s,1$	$2^j 17^h 41^m 9^s,4$
m...	0,00000009	0,00000025	0,00000130	0,00000189

	Rhéa.	Titan.	Hypérion.	Japhet.
A....	J.-D. Cassini	Huygens	G.-P. Bond	J.-D. Cassini
θ.....	23 déc. 1672	25 mars 1655	16 sept. 1848	25 oct. 1671
t.....	1881 nov. 0,0	1881 nov. 0,0	1875 oct. 28,0	1874 sept. 3,0
L....	$198^\circ 21' 39''$	$234^\circ 10' 34''$	$174^\circ 30' 4''$	$333^\circ 14' 9''$
Ω....	168.29.51	168. 9.35	168. 9.9	142.40.1
ω....	61.22.53	102.31.11	3.42.6	205.20.0
i.....	27.54.27	27.38.49	27. 4.8	18.31.5
e....	0,00364	0,029869	0,11885	0,02957
a....	8,86	20,48	25,07	59,58
T....	$4^j 12^h 25^m 12^s,6$	$15^j 22^h 41^m 23^s,2$	$21^j 6^h 39^m 27^s$	$79^j 7^h 54^m 17^s$
m...	»	»	»	0,0001000

Il est nécessaire, pour se faire une idée de la précision que comportent ces nombres, d'observer que dans les positions où les mouvements de ces satellites se projettent sur le ciel en vraie grandeur, un déplacement apparent de une seconde correspond aux déplacements angulaires suivants autour de Saturne :

Mimas..........	2°	Rhéa..........	0°.7
Encelade........	1.6	Titan...........	0.3
Téthys..........	1.3	Hypérion.......	0.2
Dioné...........	1.0	Japhet..........	0.1

Satellites d'Uranus.

(Équinoxe moyen de 1850,0).

	Ariel.	Umbriel.	Titania.	Obéron.
A....	Lassell	Lassell	W. Herschel	W. Herschel
θ.....	24 oct. 1851	24 oct. 1851	11 janv. 1787	11 janv. 1787
t.....	1871 déc. 31,0	1871 déc. 31,0	1871 déc. 31,0	1871 déc. 31,0
L.....	153°.1′	275°.9′	20°.26′	308°.21′
☊....	167.20	164.6	165.32	165.17
ω....	196.26	158.33	93.33	149.46
i.....	97.58	98.21	97.47	97.54
e.....	0,020	0,010	0,00106	0,00383
a.....	7,72	10,76	17,65	23,60
T....	$2^j 12^h 29^m 21^s.1$	$4^j 3^h 27^m 37^s,2$	$8^j 16^h 56^m 29^s,5$	$13^j 11^h 7^m 6^s,4$

Satellite de Neptune.

(Équinoxe moyen de 1874,0).

A....................	Lassell
θ....................	10 oct. 1846
t....................	1874 janv. 0,0
L....................	272°.4′
☊....................	184.30
ω....................	184
i....................	145
e....................	0,0088
a....................	14,54
T....................	$5^j 21^h 2^m 44^s,2$

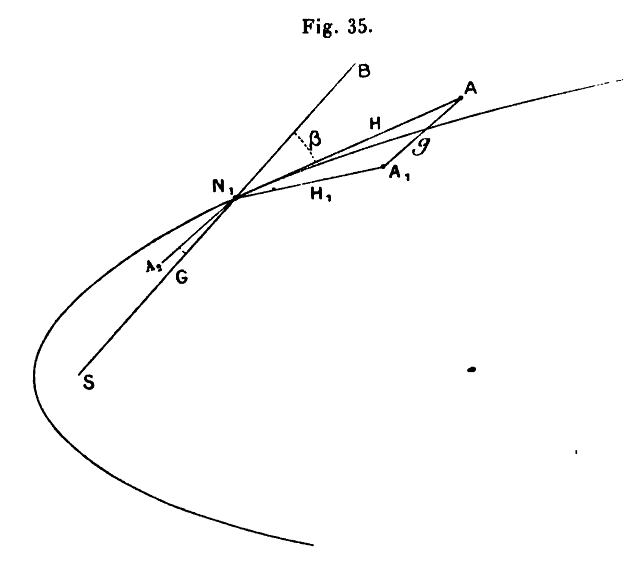
Les satellites d'Uranus et de Neptune ont des mouvements rétrogrades.

182. Formules de Brédichin, relatives à la théorie des queues des comètes. — Supposons que le noyau d'une comète décrivant

autour du Soleil une orbite elliptique, une particule de matière soit, à une date t_1, projetée hors du noyau avec une vitesse relative g et, en raison de la faiblesse de la masse du noyau, ne soit plus soumise de la part de ce noyau à aucune action sensible. Cette particule de matière continuera à se mouvoir en vertu de sa vitesse initiale et de l'action que peut exercer sur elle le Soleil. Admettons que cette action soit dirigée suivant la droite de longueur R qui joint la particule au Soleil et que son intensité soit égale à $\frac{\mu}{R^2}$, μ étant un nombre positif ou négatif selon que l'action du Soleil sur la particule est une attraction ou une répulsion.

M. Brédichin admet que g est un nombre constant pour chacune des trois classes de comètes (*voir* n° 161). Ce nombre est petit par rapport à la vitesse du noyau. La direction de cette vitesse

Fig. 35.



relative g peut être quelconque; nous la supposerons dans le plan de l'orbite du noyau. Si l'on regarde cette direction comme connue et que l'on ait déterminé, au moment t_1 où la particule a été projetée, le rayon vecteur r_1 et l'anomalie vraie v_1 du noyau, et aussi sa vitesse H et l'angle β que fait cette vitesse avec le rayon vecteur r_1 prolongé, on peut déterminer la grandeur H_1 et la direction de la vitesse de la particule, vitesse qui est la résultante

de H et de g. Connaissant à l'instant t_1, en grandeur et en direction, la vitesse N_1A_1 de la particule, on peut déterminer son orbite par les formules données au présent Chapitre et calculer pour une autre date t la position de la particule considérée.

Soient (*fig.* 35) a, e, q le demi grand axe, l'excentricité et la distance périhélie de l'orbite du noyau, r_1 le rayon vecteur et v_1 l'anomalie du noyau à la date t_1. On calcule d'abord, comme il suit, l'angle β que fait la vitesse H de ce noyau avec le rayon vecteur à la date t_1; on a

$$\operatorname{tang}\beta_1 = \frac{r_1}{\frac{dr_1}{dv_1}}$$

et

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos v_1},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{1 + e\cos v_1}{e\sin v_1} = \frac{1 + e + (1-e)\operatorname{tang}^2\frac{v_1}{2}}{2e\operatorname{tang}\frac{v_1}{2}}.$$

On en conclut

$$\operatorname{tang}\left(\beta + \frac{v_1}{2}\right) = -\frac{1+e}{1-e}\cot\frac{v_1}{2}.$$

Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tang}\frac{v_1}{2},$$

on a

$$\operatorname{tang}\left(\beta + \frac{v_1}{2}\right) = -\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right),$$

et, par suite, β est donné par l'une des formules

$$\beta + \frac{v_1}{2} = \delta - \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\beta + \frac{v_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Si l'on suppose que δ s'annule avec v_1, β étant égal à $+\frac{\pi}{2}$ quand v_1 est nul, la seconde valeur de β est seule acceptable :

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{v_1}{2} + \delta.$$

On calcule H par l'équation

$$H^2 = f\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right).$$

Si l'on prend pour unité de temps le quotient $\frac{1}{\sqrt{f}}$ égal à $58^j,13244$, on a simplement

$$H = \sqrt{\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}}.$$

On obtient ensuite H_1 et l'angle β_1 que fait H_1 avec le rayon r_1 prolongé. Soit, à cet effet, γ l'angle $A_1 N_1 A$. Le triangle A_1, N_1, A donne

$$\begin{aligned} H_1^2 &= H^2 + g^2 - 2gH\cos A, \\ &= H^2 + g^2 - 2gH\cos(\beta - G), \end{aligned}$$

G désignant l'angle SN_1A_2 qui fait N_1S avec la parallèle N_1A_2 à g. Nous supposerons, en outre, $N_1A_2 = g$.

On a aussi, dans le même triangle,

$$\sin\gamma = \frac{g\sin(\beta - G)}{H_1},$$

$$\cos\gamma = \frac{H - g\cos(\beta - G)}{H_1},$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{g\sin(\beta - G)}{H - g\cos(\beta - G)},$$

formules qui donnent γ sans ambiguïté; après quoi l'on a

$$\beta_1 = \beta + \gamma.$$

On obtient enfin, de la manière suivante, le double c de l'aire décrite par le noyau dans l'unité de temps et le double C de l'aire décrite dans l'unité de temps par la particule. On a

$$c = \sqrt{p} = \sqrt{a(1 - e^2)} = \sqrt{q(1 + e)}.$$

Or c est aussi le produit de H par la distance du Soleil à la tangente $N_1 A$ à l'orbite

$$c = H r_1 \sin\beta.$$

On a, de même,

$$C = H_1 r_1 \sin\beta_1,$$

formule qui donne successivement

$$\begin{aligned} C &= r_1 H_1 \sin\beta\cos\gamma + r_1 H_1 \cos\beta\sin\gamma, \\ &= r_1 \sin\beta[H - g\cos(\beta - G)] + r_1\cos\beta\, g\sin(\beta - G), \\ &= c - g r_1 \sin G. \end{aligned}$$

Cette valeur de C s'obtient d'ailleurs immédiatement par la remarque que les trois triangles SN_1A_2, SN_1A, SN_1A_1 ont pour base commune SN_1 et que la distance de A_2 à cette base est égale à celle de A, moins celle de A_1.

183. Orbite d'une particule de la queue d'une comète. — Si nous désignons le rayon vecteur de la particule à une date quelconque t par R, à la date t_1 par $R_1 = r_1$ et l'action du Soleil sur cette particule à la distance R par $\frac{\mu}{R^2}$, les équations relatives au mouvement de cette particule seront celles du n° 175 où nous remplacerons $f\mu$ par μ, h par C. L'équation de la trajectoire est donc

$$R = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 \pm E \cos V},$$

où V désigne l'anomalie de la particule comptée à partir de la direction de son périhélie, et l'on a

$$H_1^2 = \mu\left(\frac{2}{r_1} \mp \frac{1}{A}\right), \qquad \pm A(1 - E^2) = \frac{C^2}{\mu},$$

A étant, au signe près, le demi grand axe. Ces formules donnent

$$\pm \frac{1}{A} = \frac{2}{R_1} - \frac{H_1^2}{\mu},$$

$$E^2 = 1 - \frac{C^2}{\mu}\left(\frac{2}{R_1} - \frac{H_1^2}{\mu}\right),$$

$$= \frac{C^2}{\mu^2}\left(H_1^2 - \frac{2\mu}{R_1} + \frac{\mu^2}{C^2}\right),$$

d'où

$$E = \pm \frac{C}{\mu}\sqrt{H_1^2 - \frac{2\mu}{R_1} + \frac{\mu^2}{C^2}}.$$

On prendra le signe supérieur si μ est positif, c'est-à-dire si l'action du Soleil est attractive, le signe — si elle est répulsive. Le paramètre P, essentiellement positif, est égal à $\pm \frac{C^2}{\mu}$, avec les mêmes conventions.

Si la force est attractive, $\mu > 0$, l'orbite est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que E^2 est < 1, $= 1$ ou > 1,

ou, si l'on pose

$$\mu_1 = \frac{2\mu}{H^2 R_1},$$

suivant que μ_1 sera > 1, $= 1$ ou < 1.

On calculera les autres éléments de l'orbite par les formules ci-dessus auxquelles on peut adjoindre l'équation

$$\sin V_1 = \frac{P}{E r_1 \tang \beta_1},$$

qui détermine la direction de l'axe de l'orbite de la particule, et l'équation

$$A = \frac{P}{1 - E^2},$$

d'où le signe $\pm$ a disparu. A ainsi défini est toujours positif quand l'orbite est elliptique, négatif si elle est hyperbolique. A une date quelconque, on a

$$R = \frac{\pm P}{1 \pm E \cos V},$$

et cette équation montre que si μ est négatif, cas où il faut prendre les signes inférieurs, l'orbite est une branche d'hyperbole convexe vers le Soleil.

184. Détermination de la constante μ. — Si, à une date t, on a déterminé les coordonnées angulaires géocentriques d'une particule de la queue d'une comète, et si l'on admet que cette particule est exactement dans le plan de l'orbite du noyau, on peut aisément calculer ses coordonnées dans ce plan. Nous admettrons que l'on ait obtenu ainsi le rayon vecteur R mené du Soleil à la particule, l'angle ω que fait ce rayon vecteur avec l'axe de l'orbite du noyau. Nous supposerons aussi connue la vitesse relative initiale g de la particule, cette vitesse ayant, ainsi qu'il a été dit, une valeur fixe pour chacune des trois classes de queues de comètes. Nous nous proposons de calculer l'instant t_1 auquel la particule a quitté le noyau et le coefficient μ de l'action exercée par le Soleil. Nous supposerons l'orbite de la particule hyperbolique.

On a visiblement, en conservant les notations des deux numéros précédents

$$\omega = v_1 - V_1 + V.$$

L'orbite étant hyperbolique, la position de la particule à une date t est donnée par les équations ([1])

$$\operatorname{tang}\frac{V}{2} = \sqrt{\frac{E+1}{E-1}}\,\operatorname{th}\frac{u}{2},$$
$$R = b(E\operatorname{ch}u \mp 1),$$
$$E\operatorname{sh}u \mp u = \frac{\sqrt{\pm\mu}}{b^{\frac{3}{2}}}(t-t_0),$$

formules dans lesquelles t_0 désigne l'instant du passage au périhélie, et où $-b$ a été mis à la place de A, A étant négatif dans une orbite hyperbolique.

A la date t_1, on a de même

$$E\operatorname{sh}u_1 \mp u_1 = \frac{\sqrt{\pm\mu}}{b^{\frac{3}{2}}}(t_1-t_0);$$

d'où, par soustraction,

$$2E\operatorname{ch}u_1\operatorname{ch}\frac{u-u_1}{2}\operatorname{sh}\frac{u-u_1}{2}$$
$$+2E\operatorname{sh}u_1\operatorname{sh}^2\frac{u-u_1}{2} \mp (u-u_1) = \frac{\sqrt{\pm\mu}}{b^{\frac{3}{2}}}(t-t_1).$$

Or, par les formules ci-dessus,

$$E\operatorname{ch}u_1 = \frac{R_1}{b} \pm 1 = \pm\frac{2-\mu_1}{\mu_1},$$
$$E\operatorname{sh}u_1 = \frac{ER_1\sin V_1}{b\sqrt{E^2-1}} = \pm\frac{2\cos\beta_1\sqrt{1-\mu_1}}{\mu_1},$$

et

$$\frac{\sqrt{\pm\mu}}{b^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{2H_1(1-\mu_1)^{\frac{3}{2}}}{R_1\mu_1}.$$

Posant

$$\frac{u-u_1}{2} = \alpha,$$

([1]) On a posé

$$\operatorname{sh}u = \frac{e^u - e^{-u}}{2},\quad \operatorname{ch}u = \frac{e^u + e^{-u}}{2},\quad \operatorname{sh}u = \operatorname{ch}u\operatorname{th}u,$$

e désignant la base des logarithmes népériens. M. Houël a donné (*Recueil de formules et de Tables numériques*) des Tables de ces fonctions.

l'équation entre u et t devient

$$(\mathrm{I})\quad (2-\mu_1)\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha+2\cos\beta_1\sqrt{1-\mu_1}\,\mathrm{sh}^2\alpha-\alpha\mu_1=\frac{H_1(1-\mu_1)^{\frac{3}{2}}}{R_1}(t-t_1).$$

Nous la regardons comme une équation entre α et μ_1, les quantités R_1, H_1, β_1 qui y figurent aussi devant être remplacées par des valeurs hypothétiques.

On obtient une seconde équation entre les mêmes quantités comme il suit.

Des relations

$$R\cos V = b(E\mp \mathrm{ch}\,u),$$
$$R = b(E\,\mathrm{ch}\,u\mp 1),$$

on déduit

$$2R\cos^2\frac{V}{2} = b(E\mp 1)(\mathrm{ch}\,u+1) = 2b(E\mp 1)\,\mathrm{ch}^2\frac{u}{2},$$
$$2R\sin^2\frac{V}{2} = b(E\pm 1)(\mathrm{ch}\,u-1) = 2b(E\pm 1)\,\mathrm{sh}^2\frac{u}{2}.$$

On en conclut, en observant que $\dfrac{V-V_1}{2}=\dfrac{\omega-v_1}{2}$,

$$(a)\quad\begin{cases}\sqrt{R}\sin\dfrac{V-V_1}{2}=\sqrt{R}\sin\dfrac{\omega-v_1}{2}=\dfrac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{1-\mu_1}}\sin\beta_1\,\mathrm{sh}\,\alpha,\\[2mm] \sqrt{R}\cos\dfrac{V-V_1}{2}=\sqrt{R}\cos\dfrac{\omega-v_1}{2}=\sqrt{R_1}\left(\mathrm{ch}\,\alpha+\dfrac{\cos\beta_1}{\sqrt{1-\mu_1}}\,\mathrm{sh}\,\alpha\right),\\[2mm] \sqrt{R}\sin\left(\beta_1-\dfrac{\omega-v_1}{2}\right)=\sqrt{R_1}\sin\beta_1\,\mathrm{ch}\,\alpha;\end{cases}$$

d'où

$$(\mathrm{II})\qquad \mathrm{th}\,\alpha=\sqrt{1-\mu_1}\,\frac{\sin\dfrac{\omega-v_1}{2}}{\sin\left(\beta_1-\dfrac{\omega-v_1}{2}\right)};$$

c'est la seconde équation cherchée.

On tire aussi des équations (a) extrêmes, en retranchant les deux membres de la première de ceux de la troisième après les avoir élevés au carré et avoir chassé le dénominateur $1-\mu_1$,

$$(\mathrm{III})\qquad R=\frac{R_1\sin^2\beta_1}{\sin^2\left(\beta_1-\dfrac{\omega-v_1}{2}\right)-(1-\mu_1)\sin^2\dfrac{\omega-v_1}{2}}.$$

Les équations (I), (II), (III) se résolvent par tâtonnements. On

y donne à t_1 une valeur hypothétique au moyen de laquelle on calcule R_1, β_1, v_1, H_1 ; on détermine μ et α par les équations II et III et l'on porte les résultats dans l'équation I. On modifie t_1 jusqu'à ce que les valeurs de μ et de α trouvées satisfassent à cette équation I.

L'exposé plus détaillé des recherches de M. Brédichin sortirait du cadre de cet Ouvrage. Ce qui précède suffira pour donner une idée de la méthode; les notations employées ici sont celles de M. Brédichin lui-même. On pourra trouver dans un Mémoire de M. Socoloff (*Formules exactes de la théorie des queues cométaires*) la solution des autres problèmes qu'offre cette théorie (*Annales de l'Observatoire de Moscou*, 2e série, t. II).

CHAPITRE XII.

MOUVEMENT TROUBLÉ : INTÉGRALES DU PROBLÈME DES $n+1$ CORPS. — MÉTHODE D'APPROXIMATION DE LAGRANGE, DITE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES : APPLICATION AUX INÉGALITÉS SÉCULAIRES DES PLANÈTES PRINCIPALES.

---

185. Intégrales du problème des $n+1$ corps. — Nous avons trouvé, au n° 170, les équations différentielles du mouvement de $n+1$ corps libres s'attirant mutuellement suivant la loi de Newton. En posant

$$U = f\sum \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}$$

et

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2,$$

la sommation s'étendant à toutes les combinaisons de valeurs des nombres i et j, ces nombres n'étant jamais égaux, et variant de o à n, on a trouvé les équations

$$(1) \qquad m_k \frac{d^2\xi_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_k}, \qquad m_k \frac{d^2\eta_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_k}, \qquad m_k \frac{\partial^2\zeta_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_k}.$$

Or, on a

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_k} = f m_k \sum_j \frac{m_j(\xi_j - \xi_k)}{\Delta_{kj}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_k} = f m_k \sum_j \frac{m_j(\eta_j - \eta_k)}{\Delta_{kj}^3}$$

et, par suite,

$$\xi_k \frac{\partial U}{\partial \eta_k} - \eta_k \frac{\partial U}{\partial \xi_k} = f m_k \sum_j \frac{m_j(\xi_k \eta_j - \eta_k \xi_j)}{\Delta_{kj}^3}.$$

Aux seconds membres de ces formules les sommations s'étendent à toutes les valeurs de j autres que k. Si l'on additionne membre à membre toutes les équations analogues qui corres-

pondent aux valeurs o, 1, 2, ..., n de k, on trouve

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_k \frac{\partial U}{\partial \xi_k} = f\sum_k\sum_j m_k m_j \frac{\xi_j - \xi_k}{\Delta_{kj}^3}, \\ \displaystyle\sum_k \left(\xi_k \frac{\partial U}{\partial \eta_k} - \eta_k \frac{\partial U}{\partial \xi_k}\right) = f\sum_k\sum_j m_k m_j \frac{\xi_k\eta_j - \eta_k\xi_j}{\Delta_{kj}^3}. \end{cases}$$

Or, dans les seconds membres, à un terme d'indices k, j correspond toujours un terme d'indices j, k et ces termes sont égaux et de signes contraires. Les seconds membres sont donc nuls.

En tenant compte de ces résultats, les équations (1) donnent

$$(3)\quad \sum m_k \frac{d^2\xi_k}{dt^2} = 0, \qquad \sum m_k \frac{d^2\eta_k}{dt^2} = 0, \qquad \sum m_k \frac{d^2\zeta_k}{dt^2} = 0$$

et

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum m_k \left(\eta_k \frac{d^2\zeta_k}{dt^2} - \zeta_k \frac{d^2\eta_k}{dt^2}\right) = 0, \\ \displaystyle\sum m_k \left(\zeta_k \frac{d^2\xi_k}{dt^2} - \xi_k \frac{d^2\zeta_k}{dt^2}\right) = 0, \\ \displaystyle\sum m_k \left(\xi_k \frac{d^2\eta_k}{dt^2} - \eta_k \frac{d^2\xi_k}{dt^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Ces six équations s'intègrent immédiatement. Les équations (3) donnent

$$(5)\quad \Sigma m_k\xi_k = \alpha t + \alpha', \qquad \Sigma m_k\eta_k = \beta t + \beta', \qquad \Sigma m_k\zeta_k = \gamma t + \gamma',$$

α, β, γ, α', β', γ' désignant des constantes arbitraires. Les équations (4) donnent

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum m_k \left(\eta_k \frac{d\zeta_k}{dt} - \zeta_k \frac{d\eta_k}{dt}\right) = \alpha'', \\ \displaystyle\sum m_k \left(\zeta_k \frac{d\xi_k}{dt} - \xi_k \frac{d\zeta_k}{dt}\right) = \beta'', \\ \displaystyle\sum m_k \left(\xi_k \frac{d\eta_k}{dt} - \eta_k \frac{d\xi_k}{dt}\right) = \gamma''. \end{cases}$$

Les équations (6) sont trois intégrales du système (1). Elles sont connues sous le nom d'*intégrales des aires*. Elles expriment que, *si l'on multiplie la masse de chaque corps par l'aire que décrit sur l'un des plans de coordonnées la projection du rayon vecteur mené de l'origine à ce corps, la somme des produits obtenus est proportionnelle au temps.*

Les équations (5) expriment que le centre de gravité du système a un mouvement rectiligne uniforme. Elles équivalent aux six intégrales suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha = \sum m_k \dfrac{d\xi_k}{dt}, & \alpha' = \sum m_k \xi_k - t \sum m_k \dfrac{d\xi_k}{dt}, \\ \beta = \sum m_k \dfrac{d\eta_k}{dt}, & \beta' = \sum m_k \eta_k - t \sum m_k \dfrac{d\eta_k}{dt}, \\ \gamma = \sum m_k \dfrac{d\zeta_k}{dt}, & \gamma' = \sum m_k \zeta_k - t \sum m_k \dfrac{d\zeta_k}{dt}. \end{cases}$$

Enfin, si l'on multiplie les deux membres des équations (1) respectivement par $2\,d\xi_k$, $2\,d\eta_k$, $2\,d\zeta_k$ et que l'on observe que U ne renferme pas le temps explicitement, on obtient, en additionnant membre à membre toutes les équations ainsi obtenues,

$$\sum m_k \left[\left(\frac{d\xi_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_k}{dt}\right)^2 \right] = 2\frac{dU}{dt},$$

d'où

$$(8)\quad \sum m_k \left[\left(\frac{d\xi_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_k}{dt}\right)^2 \right] = 2U + \text{const.}$$

Cette intégrale est connue sous le nom d'*intégrale des forces vives*.

Si l'on envisage le mouvement relatif des n corps $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par rapport au premier m_0, les dix intégrales que nous venons d'obtenir se réduisent à quatre. La disparition de six intégrales correspond à la suppression des trois équations différentielles du second ordre relatives à m_0. Pour obtenir les quatre intégrales restantes, on tire des intégrales (7) relatives au mouvement du centre de gravité les valeurs ξ_0, η_0, ζ_0, $\frac{d\xi_0}{dt}$, $\frac{d\eta_0}{dt}$, $\frac{d\zeta_0}{dt}$ après avoir remplacé dans ces intégrales ξ_i par $\xi_0 + x_i$, η_i par $\eta_0 + y_i$, ζ_i par $\zeta_0 + z_i$; puis on porte les valeurs ainsi trouvées dans les intégrales (6) et (8) des aires et des forces vives. Nous nous bornerons à cette indication, le calcul n'offrant aucune difficulté.

186. Méthode d'approximation de Lagrange. — Le problème des $n+1$ corps ne pouvant être résolu complètement, même dans le cas de trois corps, on procède pour l'intégration par approximations successives. Nous exposerons dans le présent Chapitre et dans les deux suivants, aussi brièvement, aussi simplement qu'il

nous sera possible de le faire, les principes de la méthode de la variation des constantes arbitraires due à Lagrange, méthode que Le Verrier a appliquée aux planètes principales, ceux de la méthode que Laplace a appliquée à la théorie de la Lune, et les procédés dits *de quadratures mécaniques,* qui sont presque seuls utilisés dans la détermination des orbites des petites planètes.

Nous reprendrons les équations (A) du mouvement relatif, en prenant pour origine le centre du Soleil. Nous n'écrirons pour le moment qu'un seul groupe de trois équations, relatif à l'accélération d'une planète de masse m, dont nous représenterons par x, y, z les coordonnées, et nous poserons $m_0 + m = \mu$. Ces équations deviennent

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f\mu x}{r^3} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,\\ &\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{f\mu y}{r^3} - \frac{\partial R}{\partial y} = 0,\\ &\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{f\mu z}{r^3} - \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

Posant

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w,$$

$$Q = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \frac{f\mu}{r},$$

les équations du mouvement elliptique, obtenues en faisant R nulle, sont remplacées par les six équations

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial u} = 0, \qquad \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\\ &\frac{dy}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial v} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,\\ &\frac{dz}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial w} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right.$$

et les équations (A) par

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} - \frac{dQ}{du} - U = 0, \qquad \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial x} + X = 0,\\ &\frac{du}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial v} - V = 0, \qquad \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y} + Y = 0,\\ &\frac{dz}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial w} - W = 0, \qquad \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial z} + Z = 0, \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -X, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -Y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -Z.$$

X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z et des coordonnées des autres planètes; les quantités U, V, W ont été introduites pour la symétrie du système β; elles devront être remplacées ultérieurement par zéro; nous les regarderons pour l'instant comme étant des fonctions quelconques des mêmes coordonnées dont dépendent X, Y, Z.

La méthode de la variation des constantes arbitraires consiste en ce qui suit :

On suppose que l'on ait intégré les équations (α). Elles ont donné pour x, y, z, u, v, w certaines fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ du temps et de six constantes arbitraires distinctes a, b, c, d, e, f. On peut chercher à satisfaire aux équations β par les mêmes fonctions de a, b, c, d, e, f et du temps; la chose sera possible si l'on regarde a, b, c, d, e, f, non plus comme des constantes, mais comme des fonctions convenablement choisies du temps. En d'autres termes, regardant a, b, c, d, e, f comme des fonctions inconnues du temps, on substitue aux inconnues x, y, z, u, v, w les inconnues a, b, c, d, e, f, ce qui est permis, puisque les premières s'expriment au moyen des dernières et qu'inversement a, b, c, d, e, f s'expriment en fonction de x, y, z, u, v, w. Cela, en effet, a toujours lieu si a, b, c, d, e, f sont les constantes de six intégrales distinctes du système (α).

Proposons-nous d'introduire dans les équations (β) les inconnues a, b, c, d, e, f au lieu des inconnues x, y, z, u, v, w. Observons, à cet effet, que x étant une fonction connue φ_1 de a, b, c, d, e, f, t et a, b, c, ... des fonctions inconnues du temps, on a

$$(10) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial b}\frac{db}{dt} + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f}\frac{df}{dt},$$

et des valeurs semblables pour $\frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{du}{dt}, \ldots$.

La dérivée partielle $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ est la dérivée de x par rapport à t quand on regarde a, b, c, ... comme des constantes. On a donc,

d'après la première équation (α),

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \dfrac{\partial Q}{\partial u}, \qquad \text{et de même} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \dfrac{\partial Q}{\partial v}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

En portant dans les équations (β) les valeurs (10) de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \dots$, tenant compte des conditions (11) et remettant les lettres x, y, z, u, v, w au lieu de $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, on obtient les équations cherchées

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{da}{dt} + \dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{db}{dt} + \dots + \dfrac{\partial x}{\partial f}\dfrac{df}{dt} - U = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial a}\dfrac{da}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial b}\dfrac{db}{dt} + \dots + \dfrac{\partial u}{\partial f}\dfrac{df}{dt} + X = 0, \\ \dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{da}{dt} + \dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{db}{dt} + \dots + \dfrac{\partial y}{\partial f}\dfrac{df}{dt} - V = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial w}{\partial a}\dfrac{da}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial b}\dfrac{db}{dt} + \dots + \dfrac{\partial w}{\partial f}\dfrac{df}{dt} + Z = 0. \end{array} \right.$$

Il reste à résoudre ces équations par rapport à $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots$. Pour y parvenir, additionnons-les membre à membre après avoir multiplié les deux membres de la première, de la troisième, de la cinquième par $-\frac{\partial u}{\partial a}, -\frac{\partial v}{\partial a}, -\frac{\partial w}{\partial a}$; les deux membres de la seconde, de la quatrième, de la sixième par $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$.

Le coefficient de $\frac{da}{dt}$ sera nul; nous désignerons avec Lagrange par $[ab]$ celui de $\frac{db}{dt}$

$$(13) \quad [ab] = -\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial w}{\partial b}.$$

Ce coefficient est connu, puisqu'il est formé au moyen des dérivées partielles des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$. Le coefficient de $\frac{dc}{dt}$ s'en déduit en remplaçant la lettre b par la lettre c, et ainsi des autres. Nous poserons

$$R_a = X\frac{\partial x}{\partial a} + U\frac{\partial u}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + V\frac{\partial v}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a} + W\frac{\partial w}{\partial a}.$$

Nous aurons ainsi l'équation

$$(\gamma) \qquad [ab]\frac{db}{dt} + [ac]\frac{dc}{dt} + \ldots + [af]\frac{df}{dt} + R_a = 0.$$

En prenant pour multiplicateurs les dérivées partielles de $-u$, $-v$, $-w$, x, y, z par rapport à b, on trouvera de même l'équation

$$(\gamma) \qquad [ba]\frac{db}{dt} + [bc]\frac{dc}{dt} + \ldots + [bf]\frac{df}{dt} + R_e = 0,$$

et ainsi de suite. On a ainsi un système de six équations (γ) qui ne sont pas encore résolues, mais dont les coefficients ont des propriétés remarquables qui servent à les former.

Les identités

$$(14) \qquad [aa] = 0, \qquad [ab] = -[ba],$$

sont évidentes, d'après la définition même du symbole (ab).

De plus, *si l'on exprime* $[ab]$ *en fonction de* a, b, c, d, e, f *et* t, *le temps* t *n'y figure pas explicitement.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de prouver que, si l'on regarde a, b, c, …, f comme des constantes, et par suite x, y, z, u, v, w comme satisfaisant aux équations (α), $[ab]$ est aussi une constante, ou, ce qui revient au même, que sa dérivée par rapport à t est nulle. Or on a

$$\frac{d[ab]}{dt} = -\frac{\partial^2 u}{\partial a\,\partial t}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial^2 u}{\partial b\,\partial t}\frac{\partial x}{\partial a} - \ldots.$$

Les termes que l'on n'a pas écrits au second membre se déduisent des premiers en remplaçant x et u d'abord par y et b, puis par z et w.

On vérifie immédiatement que cette formule s'écrit

$$\frac{d[ab]}{dt} = \frac{\partial}{\partial a}\left[-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial b}\right] + \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial a}\right] + \ldots,$$

ou en tenant compte des équations (α)

$$\frac{d[ab]}{dt} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial b}\right] - \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a}\right] + \ldots.$$

Le second membre de cette relation a six termes. Le premier,

le troisième et le cinquième forment la dérivée partielle par rapport à a de $\frac{\partial Q}{\partial b}$; les autres, abstraction faite du signe — qui les précède, forment la dérivée partielle par rapport à b de $\frac{\partial Q}{\partial a}$. On a donc

$$\frac{d[ab]}{dt} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right) = 0.$$

Si l'on résout les six équations (γ), on obtient un système de la forme

$$(\delta) \qquad \begin{cases} \frac{da}{dt} = (aa)R_a + (ab)R_b + \ldots + (af)R_f, \\ \frac{db}{dt} = (ba)R_a + (bb)R_b + \ldots + (bf)R_f, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les coefficients (ab), ... étant des combinaisons des coefficients $[ab]$, ... ne renferment pas le temps explicitement.

Si dans les relations (γ) on remplace $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \cdots$ par les valeurs (δ), les premiers membres devront être nuls quels que soient R_a, R_b, ... Nous ferons la substitution, non pas dans les équations (γ), mais dans la suivante :

$$R_a \frac{da}{dt} + R_b \frac{db}{dt} + \ldots + R_f \frac{df}{dt} = 0,$$

qui s'en déduit immédiatement en tenant compte des relations (13). Nous obtenons ainsi l'identité

$$\begin{aligned} &(aa)R_a^2 + (bb)R_b^2 + \ldots + (ff)R_f^2 \\ &\quad + [(ab)+(ba)]R_a R_b + \ldots + [(ef)+(fe)]R_e R_f = 0. \end{aligned}$$

Cette identité ayant lieu quels que soient R_a, R_b, ..., on a pour toutes les combinaisons de deux lettres a, b, ..., f

$$(15) \qquad (aa) = 0, \qquad (ab) + (ba) = 0.$$

Les parenthèses (ab) ont donc les mêmes propriétés que les crochets $[ab]$ de Lagrange.

187. Expression donnée par Poisson des coefficients (ab). — Les crochets $[ab]$ de Lagrange s'expriment (form. 13) au moyen des dérivées partielles de x, u, y, ... par rapport à a, b, ..., f:

Poisson a exprimé sous une forme analogue les parenthèses (ab) au moyen des dérivées partielles de $a, b, \ldots, f$ par rapport à x, $u, y, \ldots, w$.

Rappelons que l'on a déduit des équations (α) du mouvement elliptique six intégrales

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a = F_1(x, u, y, v, z, w, t), \\ b = F_2(x, u, y, v, z, w, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

que ces intégrales résolues par rapport à $x, u, y, \ldots, w$ ont donné un système équivalent

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x = \varphi_1(a, b, \ldots, f, t), & u = \psi_1(a, b, \ldots, f, t), \\ y = \varphi_2(a, b, \ldots, f, t), & v = \psi_2(a, b, \ldots, f, t), \\ z = \varphi_3(a, b, \ldots, f, t), & w = \psi_3(a, b, \ldots, f, t), \end{array} \right.$$

et que les relations (16) ou (17) satisfont aux équations (β) du *mouvement troublé* aussi bien qu'aux équations (α) du mouvement elliptique. Seulement, dans le premier cas, $a, b, \ldots$ sont des fonctions du temps, dans le second des constantes. Dans ce dernier cas, on déduit de la première équation (16)

$$0 = \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{du}{dt} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

ou, en tenant compte des équations (α),

$$(18) \qquad 0 = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial v} - \ldots - \frac{\partial a}{\partial w}\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial t},$$

et si, dans cette relation, on remplace $x, y, z, \ldots$, par $a, b, \ldots, t$ au moyen des équations (17), elle devient une identité. Les autres équations (16) conduisent à des identités analogues.

Dans le cas du mouvement troublé, les équations (16) donnent

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{du}{dt} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

ou, en tenant compte des équations (β) et de l'identité (18),

$$(19) \qquad \frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial x}U - \frac{\partial a}{\partial u}X + \frac{\partial a}{\partial y}V - \ldots - \frac{\partial a}{\partial w}Z.$$

Si l'on différentie par rapport à x les équations (17) après y

avoir remplacé $a, b, \ldots, f$ par $x, y, \ldots$ au moyen des équations (16), ce qui en fait des identités, on trouve identiquement

$$(20)\quad \begin{cases} 1 = \dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial b}{\partial x} + \ldots + \dfrac{\partial x}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ 0 = \dfrac{\partial u}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial b}\dfrac{\partial b}{\partial x} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = \dfrac{\partial w}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial b}\dfrac{\partial b}{\partial x} + \ldots + \dfrac{\partial w}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial x}, \end{cases}$$

Si l'on additionne membre à membre ces identités (20) après avoir multiplié les deux membres de la première par X, ceux de la seconde par U, ..., on obtient

$$(21)\quad X = \frac{\partial a}{\partial x} R_a + \frac{\partial b}{\partial x} R_b + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x} R_f.$$

On trouve de même

$$U = \frac{\partial a}{\partial u} R_a + \frac{\partial b}{\partial u} R_b + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u} R_f,$$

et ainsi de suite.

En portant ces valeurs dans l'identité (19), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial v} - \ldots - \frac{\partial a}{\partial w}\frac{\partial a}{\partial z}\right) R_a \\ & + \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial v} - \ldots - \frac{\partial a}{\partial w}\frac{\partial b}{\partial z}\right) R_b \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La comparaison de cette valeur de $\frac{da}{dt}$ avec la première équation (δ) donne

$$(22)\quad (ab) = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial v} - \ldots - \frac{\partial a}{\partial w}\frac{\partial b}{\partial z}.$$

Telle est l'expression de (ab) donnée par Poisson.

188. Formation des équations de Lagrange. — La formation effective des équations de Lagrange comprend la détermination des coefficients $[ab]$ et celle des termes connus R_a.

A l'égard de ces termes connus, si l'on se rappelle que

$$U = V = W = 0$$

et que

$$X = -\frac{\partial R}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial R}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial R}{\partial z},$$

on a immédiatement

$$(23) \qquad R_a = X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{\partial R}{\partial a}.$$

Nous trouverons la plupart des crochets $[ab]$ en écrivant qu'une intégrale du mouvement elliptique convient au mouvement troublé.

Rapportons le plan de l'orbite aux axes Ox, y, z. Soit θ la longitude du nœud, c'est-à-dire l'angle compté de Ox vers Oy, que fait avec Ox la direction du nœud ascendant du plan de l'orbite sur le plan xOy; soient φ l'inclinaison de ce plan sur le plan xOy, ϖ la longitude du périhélie, c'est-à-dire la somme de la longitude du nœud et de l'angle que fait la direction du périhélie avec celle du nœud. Soient a et e le demi grand axe et l'excentricité de l'orbite, ε la longitude moyenne à une date donnée, c'est-à-dire la somme de la longitude du périhélie et de l'anomalie moyenne à cette date. Soit n le moyen mouvement lié à a par la relation

$$(24) \qquad n^2 a^3 = f\mu.$$

On voit que dans l'alinéa précédent nous employons, comme déjà plus haut, le mot *longitude,* exactement dans le sens qu'il aurait si le plan xOy était l'écliptique et Ox l'équinoxe; mais nous ne faisons nullement cette hypothèse. Nous supposons seulement que l'origine est au centre du Soleil.

I. L'intégrale des forces vives

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

convient au mouvement troublé.

Exprimons-la au moyen des éléments. A cet effet, différentions les deux membres et remplaçons $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ par les valeurs que donnent les équations (9). Nous trouvons

$$\frac{dx}{dt}\left[-\frac{f\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}\right] + \frac{dy}{dt}\left[-\frac{f\mu y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y}\right] + \frac{dz}{dt}\left[-\frac{f\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}\right]$$
$$= -\frac{f\mu}{r^2}\frac{dr}{dt} + \frac{f\mu}{a^2}\frac{da}{dt},$$

ou

$$(25)\qquad \frac{\partial R}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{f\mu}{a^2}\frac{da}{dt}.$$

R est une fonction de x, y, z et des coordonnées des autres planètes. Le premier membre de la dernière équation est la dérivée de R par rapport au temps prise comme si ces dernières coordonnées ne dépendaient pas du temps. Or x, y, z ne dépendent du temps que sous la forme suivante : ce sont des fonctions de l'anomalie excentrique u qui dépend du temps par l'équation de Képler

$$u - e\sin u = nt + \varepsilon - \varpi,$$

d'après laquelle

$$\frac{du}{dt} = n\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}.$$

De plus, x, y, z ne dépendent de ε que comme fonctions de u, et les coordonnées des autres planètes ne dépendent pas de ε. Donc

$$\frac{\partial R}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{dz}{dt}=n\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

L'équation (25) devient ainsi, en tenant compte de la relation (24),

$$(\gamma^*)\qquad \frac{na}{2}\frac{da}{dt}=\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Cette équation donne donc

$$[\varepsilon a]=\frac{na}{2},\qquad [\varepsilon e]=0,\qquad [\varepsilon\theta]=0,\qquad [\varepsilon\varphi]=0,\qquad [\varepsilon\varpi]=0.$$

II. Les intégrales des aires donnent tous les autres coefficients sauf $[ae]$.

Désignant, comme au Chapitre précédent, par h la constante des aires, par c, c', c'' ses projections sur les trois axes, on a

$$(26)\qquad c = h\sin\theta\sin\varphi,\qquad c' = -h\cos\theta\sin\varphi,\qquad c'' = h\cos\varphi$$

et

$$h = na^2\sqrt{1-e^2}.$$

Différentiant les intégrales des aires, on a

$$\frac{dc}{dt}=y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2},\qquad \frac{dc'}{dt}=z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2},\qquad \frac{dc''}{dt}=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2},$$

ou, en remplaçant les dérivées secondes par les valeurs que donnent les équations (9) du mouvement troublé

$$(27)\qquad \frac{dc}{dt} = y\frac{\partial R}{\partial z} - z\frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{dc'}{dt} = z\frac{\partial R}{\partial x} - x\frac{\partial R}{\partial z}, \qquad \frac{dc''}{dt} = x\frac{\partial R}{\partial y} - y\frac{\partial R}{\partial x}.$$

Les coordonnées x, y, z s'expriment d'ailleurs en fonction du temps par les relations

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\cos(v-\theta) - r\sin\theta\sin(v-\theta)\cos\varphi,\\
y &= r\sin\theta\cos(v-\theta) + r\cos\theta\sin(v-\theta)\cos\varphi,\\
z &= r\sin(v-\theta)\sin\varphi,\\
r &= a(1-e\cos u),\\
&\operatorname{tang}\frac{v-\varpi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{u}{2},\\
&u - e\sin u = nt + \varepsilon - \varpi.
\end{aligned}$$

où v désigne la longitude vraie.

λ. Ces préliminaires posés, on a, en remarquant que R ne dépend des divers éléments que parce qu'il dépend de x, y, z,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial\varphi} &= \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\\
&= \frac{\partial R}{\partial x}z\sin\theta - \frac{\partial R}{\partial y}z\cos\theta + \frac{\partial R}{\partial z}(y\cos\theta - x\sin\theta)\\
&= \sin\theta\left(z\frac{\partial R}{\partial x} - x\frac{\partial R}{\partial z}\right) + \cos\theta\left(y\frac{\partial R}{\partial z} - z\frac{\partial R}{\partial y}\right)\\
&= \sin\theta\frac{dc'}{dt} + \cos\theta\frac{dc}{dt} = h\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}.
\end{aligned}$$

Donc

$$na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial R}{\partial\varphi},$$

de sorte que

$$[\varphi a] = 0, \qquad [\varphi e] = 0, \qquad [\varphi\theta] = na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi, \qquad [\varphi\varpi] = 0,$$

μ. On a aussi, en remarquant que x, y, z et, par suite, R dépendent de θ sous deux formes : par l'argument $l-\theta$ et par l'argument θ,

$$\frac{\partial R}{\partial\theta} = -\frac{\partial R}{\partial(v-\theta)} + \left(\frac{\partial R}{\partial\theta}\right),$$

le dernier terme indiquant la dérivée prise comme si $v-\theta$ ne

dépendait pas de θ. Ce terme est égal à

$$-\frac{\partial R}{\partial x}y+\frac{\partial R}{\partial y}x.$$

Donc

$$\frac{\partial R}{\partial \theta}=-\frac{\partial R}{\partial(v-\theta)}+\frac{dc''}{dt}.$$

D'autre part

$$\frac{\partial R}{\partial(v-\theta)}=\frac{\partial R}{\partial x}(-y\cos\varphi-z\sin\theta\sin\varphi)$$
$$+\frac{\partial R}{\partial y}(x\cos\varphi-z\sin\theta\sin\varphi)+\frac{\partial R}{\partial z}\sin\varphi(x\cos\theta+y\sin\theta).$$

Les relations (27) s'introduisent d'elles-mèmes, et l'on obtient

$$\frac{\partial R}{\partial(v-\theta)}=\frac{1}{h}\left(c\frac{dc}{dt}+c'\frac{dc'}{dt}+c''\frac{dc''}{dt}\right)=\frac{dh}{dt}.$$

On a donc

$$\frac{\partial R}{\partial \theta}=-\frac{dh}{dt}+\frac{dc''}{dt}.$$

Les dérivées qui figurent au second membre résultent immédiatement des relations (26) et l'on a

$$-na\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{da}{dt}+\frac{2na^2e}{\sqrt{1-e^2}}\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{de}{dt}-na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial R}{\partial \theta}.$$

Donc

$$[\theta a]=-na\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2},\qquad [\theta e]=\frac{2na^2e}{\sqrt{1-e^2}}\sin^2\frac{\varphi}{2},\qquad [\theta\varpi]=0,$$

ν. Pour calculer $\frac{\partial R}{\partial \varpi}$ on observe que R ne dépend de ϖ que parce que v en est fonction, mais que v en est fonction pour deux motifs, puisque v est égal à

$$\varpi+2\,\text{arc tang}\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\text{tang}\frac{u}{2}\right],$$

et que u est fonction de ϖ d'après l'équation de Képler.

On a donc

$$\frac{\partial R}{\partial \varpi}=\frac{\partial R}{\partial v}+\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varpi}=\frac{\partial R}{\partial v}-\frac{\partial R}{\partial \varepsilon};$$

puisque $\frac{\partial u}{\partial \varpi}$ est égale à $-\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}$ et que R ne dépend de ε que comme

fonction de u. Or on vient de trouver que

$$\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial(v-\theta)} = \frac{dh}{dt},$$

et plus haut que

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{na}{2}\frac{da}{dt}.$$

On a donc

$$\frac{d(na^2\sqrt{1-e^2})}{dt} - \frac{na}{2}\frac{da}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varpi},$$

ou

$$-\frac{na}{2}(1-\sqrt{1-e^2})\frac{da}{dt} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\frac{de}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varpi}.$$

Donc

$$[\varpi a] = -\frac{na}{2}(1-\sqrt{1-e^2}), \qquad [\varpi e] = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}.$$

III. Il ne reste plus à trouver que le coefficient $[ae]$. Nous le calculerons directement.

On a, en remplaçant u, v, w par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$,

$$[ae] = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial e} - \frac{\partial x}{\partial e}\frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial a} + \ldots,$$

où x, y, z sont liées aux éléments par les équations du mouvement elliptique.

Changeons d'axes de coordonnées : prenons pour axe des ξ la direction du périhélie, pour axe des η une perpendiculaire à $O\xi$ menée dans le plan de l'orbite.

Les formules du changement de coordonnées seront

$$x = A\xi + A'\eta,$$
$$y = B\xi + B'\eta,$$
$$z = C\zeta + C'\eta,$$

où

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$
$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1,$$
$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

On en conclut, en observant que A, A', B, B', C, C' ne dépendent

ni de a, ni de e,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} [ae] = &\left(\mathrm{A}\frac{\partial\xi}{\partial a} + \mathrm{A}'\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)\left(\mathrm{A}\frac{\partial\frac{d\xi}{dt}}{\partial e} + \mathrm{A}'\frac{\partial\frac{d\eta}{dt}}{\partial e}\right) \\ &- \left(\mathrm{A}\frac{\partial\xi}{\partial e} + \mathrm{A}'\frac{\partial\eta}{\partial e}\right)\left(\mathrm{A}\frac{\partial\frac{d\xi}{dt}}{\partial a} + \mathrm{A}'\frac{\partial\frac{d\eta}{dt}}{\partial a}\right) + \ldots \\ = &\frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial\frac{d\xi}{dt}}{\partial e} + \frac{\partial\eta}{\partial a}\frac{\partial\frac{d\eta}{dt}}{\partial e} - \frac{\partial\xi}{\partial e}\frac{\partial\frac{d\xi}{dt}}{\partial a} - \frac{\partial\eta}{\partial e}\frac{\partial\frac{d\eta}{dt}}{\partial a}. \end{aligned}\right.$$

Or, des relations

$$\xi = a\cos u - ae, \qquad \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin u, \qquad u - e\sin u = nt + \varepsilon - \varpi,$$

on déduit

$$\frac{d\xi}{dt} = -a\sin u\frac{du}{dt}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = a\sqrt{1-e^2}\cos u\frac{du}{dt}, \qquad (1 - e\cos u)\frac{du}{dt} = n.$$

Le coefficient $[ae]$ ne renfermant pas t explicitement, on peut, pour le calculer, donner à t une valeur particulière. On fera

$$t = \frac{\varpi - \varepsilon}{n},$$

d'où

$$u = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \frac{d\xi}{dt} = 0,$$

et la valeur particulière donnée ne contenant pas e, $\frac{d\eta}{de}$ et $\frac{\partial\frac{d\xi}{dt}}{\partial e}$ sont aussi nuls pour cette valeur de t.

On a aussi, pour cette valeur de t,

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e}, \qquad \xi = a(1-e),$$

$$\frac{\partial\frac{\partial\eta}{dt}}{\partial e} = \frac{na}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial e} = -a,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial a} = \sqrt{1-e^2}\sin u + a\sqrt{1-e^2}\cos u\frac{\partial u}{\partial a} = a\sqrt{1-e^2}\frac{\partial u}{\partial a},$$

$$\frac{\partial\frac{d\xi}{dt}}{\partial a} = -a\cos u\frac{du}{dt}\frac{\partial u}{\partial a} - \sin u\frac{\partial\left(a\frac{du}{dt}\right)}{\partial a} = -\frac{an}{1-e}\frac{\partial u}{\partial a}.$$

La valeur (28) de $[ae]$ se réduit aux deux termes du milieu et l'on trouve

$$[ae] = 0,$$

Nous avons ainsi tous les coefficients distincts des équations de Lagrange. La résolution de ces équations par rapport aux dérivées des éléments est immédiate et donne

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= +\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= +\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varphi},\\
\frac{d\theta}{dt} &= +\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{\partial R}{\partial \varphi},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varphi},
\end{aligned}\right.$$

équations dans lesquelles il reste à exprimer R en fonction des éléments et du temps par les formules du mouvement elliptique.

189. Remarques générales sur la fonction perturbatrice et ses dérivées partielles. — On a vu que les intégrales premières des équations du mouvement elliptique conviennent aux équations (β) du mouvement troublé. Il s'ensuit que x, y, z et leurs dérivées premières $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont les mêmes fonctions des éléments a, e, θ, φ, ϖ, ε et du temps t dans le mouvement elliptique que dans le mouvement troublé. Seulement, dans le premier cas, les éléments sont constants et dans le second ce sont des fonctions du temps t.

A une date quelconque t_0, ces fonctions ont des valeurs a_0, e_0, θ_0, φ_0, ϖ_0, ε_0; la planète a des coordonnées x_0, y_0, z_0, et sa vitesse a des composantes $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$. Toutes ces quantités sont

reliées par les formules du mouvement elliptique. Si donc, à cette date, la planète n'était plus attirée par les autres, mais seulement par le Soleil, elle décrirait autour de cet astre une ellipse dont les éléments seraient précisément a_0, e_0, θ_0, φ_0, ϖ_0, ε_0. Les valeurs des éléments variables a, e, θ, φ, ϖ, ε à une date quelconque t_0 sont donc les éléments de l'ellipse que la planète décrirait ensuite, si, à partir de cette date, les autres planètes cessaient d'exister et qu'elle restât seule en présence du Soleil. On les appelle *éléments osculateurs* à cette date.

De cette date à une autre date t, ces éléments osculateurs reçoivent des variations δa, δe, ... Ces variations s'appellent *perturbations des éléments*. Ces variations étant dues à l'existence de la fonction R, cette fonction a reçu le nom de *fonction perturbatrice*.

Pour former les équations (δ), il faut exprimer R en fonction des éléments a, e, ..., ε et du temps, après quoi on pourra en calculer les dérivées partielles par rapport aux éléments. En vérité il est impossible d'écrire explicitement, sous forme finie, cette expression de R, à cause de l'impossibilité où l'on est de résoudre l'équation de Képler. On peut bien, en effet, exprimer x, y, z sous forme finie en fonction des éléments et de l'anomalie excentrique; mais on ne peut ensuite remplacer l'anomalie excentrique par l'anomalie moyenne qui, elle, varie proportionnellement au temps.

Il faut remarquer en outre, au point de vue de l'intégration ultérieure, que R ne dépend pas seulement du temps parce que x, y, z en dépendent, mais aussi comme fonction des coordonnées des autres planètes. Les coordonnées x', y', z' de l'une d'elles doivent naturellement être remplacées par leurs valeurs en fonction des éléments a', e', θ', ... de l'orbite de cette planète et du temps.

La fonction R est d'ailleurs formée d'autant de parties distinctes qu'il y a de planètes autres que la planète m : on a

$$R = f\sum m'\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right].$$

Il s'ensuit que dans le calcul de la fonction R et de ses dérivées partielles, on peut s'occuper séparément des parties relatives aux

diverses planètes perturbatrices. Pour ce motif, nous n'écrirons désormais, à moins qu'il ne soit utile de faire autrement, que la partie de R qui correspond à la planète m'.

Cette partie s'exprime, sous forme finie, en fonction des sinus et cosinus de multiples des anomalies excentriques des deux planètes. Elle est donc aussi une fonction périodique des anomalies moyennes M, M', ou, ce qui revient au même, des longitudes moyennes l, l'. (Il s'agit pour chaque planète de la longitude moyenne égale à la longitude du périhélie augmentée de l'anomalie moyenne.)

Une telle fonction, pourvu qu'elle soit finie, peut être développée en une série de termes de la forme

$$A\cos(il + i'l' + B),$$

i et i' désignant des nombres entiers positifs ou négatifs quelconques.

Nous donnerons au nº 191 quelques explications sur ce développement dont l'étude complète sortirait des limites que nous nous sommes imposées, nous bornant pour ce moment à dire que le terme général est, en vérité, de la forme

$$C\cos D,$$

où

$$(\varepsilon)\qquad D = il + i'l' + k\varpi + k'\varpi' + j\theta + j'\theta',$$

i, i', k, k', j, j' étant des nombres positifs ou négatifs quelconques, C une fonction de a, a', e, e', φ, φ'.

Les dérivées partielles de R par rapport aux éléments e, θ, φ, ϖ, ε seront exprimées par des termes de la même forme que ceux de R; seulement dans les dérivées par rapport à ε, θ, ϖ les cosinus seront remplacés par des sinus.

Mais il n'en est pas de même de $\frac{\partial R}{\partial a}$ qui entre dans la sixième équation (δ). En effet, R dépend de a, d'une part parce que les coefficients C en dépendent, mais aussi parce que la longitude moyenne l égale à $nt + \varepsilon$ est fonction de n qui est égal à $\sqrt{f\mu}\,a^{-\frac{3}{2}}$. Si l'on désigne par $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)$ la dérivée partielle de R par rapport à a,

prise comme si a n'entrait que dans les coefficients C, on a

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) + \frac{\partial R}{\partial l} t \frac{dn}{da}.$$

Visiblement $\frac{\partial R}{\partial l}$ est égale à $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, puisque R ne dépend de ε que comme fonction de l et que $\frac{\partial l}{\partial \varepsilon} = 1$.

Donc

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} t \frac{dn}{da}.$$

La première partie $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)$ n'aura que des termes analogues aux termes (ε), mais la seconde renfermera des termes de la forme

$$t \cos(gt + \alpha),$$

qui grandiraient indéfiniment avec t.

On évite cet inconvénient comme il suit :

On observe que $\frac{\partial R}{\partial a}$ n'entre que dans la sixième équation (δ), qui devient

$$(29) \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} t \frac{dn}{da} + \ldots,$$

les termes représentés par des points ne dépendant pas de $\frac{\partial R}{\partial a}$, et, par suite, n'offrant pas l'inconvénient signalé.

Or la première équation (δ) donne

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

L'équation (29) devient donc

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) - t\frac{dn}{da}\frac{da}{dt}$$

ou

$$(30) \qquad \frac{d\varepsilon + t\,dn}{dt} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right).$$

On est naturellement conduit à remplacer l'élément ε par un autre (ε) tel que

$$d\varepsilon + t\,dn = d(\varepsilon),$$

ce qui donne

$$(\varepsilon) = \varepsilon + \int t\,dn = \varepsilon + nt - \int n\,dt$$

ou encore

$$\varepsilon + nt = (\varepsilon) + \int n\,dt.$$

Au second membre la constante d'intégration est quelconque; en la changeant, on modifie d'une constante l'élément nouveau (ε).

Par l'introduction de cette nouvelle inconnue, l'équation (30) devient

$$\frac{d(\varepsilon)}{dt} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right).$$

Elle est de même forme que l'équation initiale

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}.$$

Seulement ε est remplacé par (ε) et dans le calcul de $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)$ on ne tient pas compte de ce que l dépend de a.

Les autres équations (δ) ne sont pas changées, puisque

$$\frac{\partial R}{\partial(\varepsilon)} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

On fait couramment la snbstitution en conservant les notations primitives. Il est bien entendu que $\frac{\partial R}{\partial a}$ signifie la dérivée prise comme si les coefficients C seuls dépendaient de a et que l ne fût pas fonction de a, et que l'élément ε a la signification nouvelle de sorte que la longitude moyenne l n'est pas égale à $\varepsilon + nt$, mais que

$$l = \varepsilon + \int n\,dt. \tag{31}$$

190. Méthodes d'intégration par approximations successives. — Le système d'équations (δ) comprend six fois autant d'équations qu'il y a de planètes. Ces équations n'ont pu être intégrées rigoureusement. On procède par approximations successives.

Pour plus de clarté, supposons que l'on n'envisage que deux planètes m, m'. On a, pour chacune d'elles, un système de six équations (δ), en tout douze équations. Les premiers membres sont, dans les six premières, les dérivées des éléments de l'orbite elliptique de la planète m, dans les six dernières, les dérivées des éléments de l'orbite de la planète m'. Les seconds membres sont des fonctions de tous ces éléments et du temps. On cherche des va-

leurs des éléments de la forme

$$(32)\quad \begin{cases} a = a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0 + \ldots, \\ e = e_0 + \delta_1 e_0 + \delta_2 e_0 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a' = a'_0 + \delta_1 a'_0 + \delta_2 a'_0 + \ldots, \\ e' = e'_0 + \delta_1 e'_0 + \delta_2 e'_0 + \ldots, \end{cases}$$

où a_0, e_0, ..., a'_0, e'_0, ... sont des constantes, et généralement $\delta_i a_0$, $\delta_i e_0$, ..., $\delta_i a'_0$, ... des quantités d'ordre i par rapport aux masses m, m'. Ces développements conduiront d'ailleurs à des expressions analogues pour le moyen mouvement et la longitude moyenne. A cet effet, on posera

$$(33)\quad n = n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 + \ldots,$$

et l'on déterminera la constante n_0 par la relation

$$(34)\quad n_0 = \frac{\sqrt{f(m_0+m)}}{a_0^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme on a aussi

$$n = \frac{\sqrt{f(m_0+m)}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

la comparaison de la première équation (32) et de la formule (33) donne

$$\begin{aligned} &n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 + \ldots \\ &\quad = \sqrt{f(m_0+m)}\, a_0^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\delta_1 a_0}{a_0} - \frac{3}{2}\frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \frac{15}{8}\frac{\delta_1 a_0^2}{a_0^2} \ldots\right). \end{aligned}$$

On est naturellement conduit à faire

$$\delta_1 n_0 = -\frac{3}{2} n_0 \frac{\delta_1 a_0}{a_0},$$

$$\delta_2 n_0 = n_0 \left[-\frac{3}{2}\frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \frac{15}{8}\frac{(\delta_1 a_0)^2}{a_0^2}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On posera ensuite

$$(35)\quad \rho_0 = n_0 t, \qquad \delta_1 \rho_0 = \int \delta_1 n_0\, dt, \qquad \delta_2 \rho_0 = \int \delta_2 n_0\, dt,$$

et si

$$\rho = \int n\, dt,$$

on aura, en remplaçant n par la valeur (33),

$$(36) \qquad \rho = \rho_0 + \delta_1\rho_0 + \delta_2\rho_0 + \ldots,$$

valeur dont les termes après le premier sont successivement du premier ordre, du second, etc.

En accentuant les lettres on aura des formules toutes semblables se rapportant à la planète m'. Les termes $a_0, e_0, \ldots, a'_0, e'_0, \ldots, \rho_0, \rho'_0$ sont les mêmes que si chaque planète était seule en présence du Soleil. Les termes $\delta_1, \delta_2, \ldots$ s'appellent les *perturbations* du premier ordre, du second ordre, etc. Pour trouver ces inégalités, on substitue dans les équations (δ) les valeurs (32), (33), (36) et l'on égale les termes de même ordre dans les deux membres de chacune d'elles.

Si l'on s'en tient aux perturbations du premier ordre, en observant que les seconds membres des équations (δ) sont du premier ordre par rapport aux masses, on voit immédiatement qu'il suffit de remplacer dans ces seconds membres les éléments $a, e, \ldots, a', e', \ldots$ par les constantes $a_0, e_0, \ldots, a'_0, e'_0, \ldots$ et ρ par ρ_0 ou $n_0 t$; aux premiers membres on remplacera les éléments $a, e, \ldots$ par leurs perturbations du premier ordre $\delta a, \delta e, \ldots$. Les seconds membres ne sont des fonctions du temps que parce que les longitudes moyennes l, l' en dépendent. Ces fonctions sont malheureusement très compliquées. Les premiers membres sont les dérivées des éléments par rapport au temps. On est donc immédiatement ramené à des quadratures, qui sont d'ailleurs immédiates si la fonction perturbatrice a été développée en série de termes de la forme (ε), de la forme $C_0 \cos D_0$, où

$$D_0 = i(n_0 t + \varepsilon_0) + i'(n'_0 t + \varepsilon'_0) + k\varpi_0 + k'\varpi'_0 + j\theta_0 + j'\theta'_0,$$

puisque les éléments $\varepsilon, \varepsilon', \varpi, \varpi', \ldots, a, a', \ldots$ ont été remplacés dans les seconds membres des équations δ par des constantes ε_0, $\varepsilon'_0, \ldots$. Il est manifeste en effet que le calcul des dérivées partielles de R par rapport aux éléments n'en modifie pas la forme générale, et que l'on n'aura finalement à calculer que les quadra-

tures

$$\int \sin D_0\, dt, \qquad \int \cos D_0\, dt.$$

Chaque terme $C_0 \cos D_0$ de R donnera pour chaque élément une *inégalité* de la forme

$$H\int \sin D_0\, dt, \qquad H\int \cos D_0\, dt.$$

Au sujet de ces quadratures nous avons à faire quelques remarques qui nous conduiront à classer les *inégalités* du premier ordre en trois sortes :

a. Inégalités périodiques. — A l'ordinaire $in_0 + i'n'_0$ n'est pas nul et l'on a

$$H\int \sin D_0\, dt = -\frac{H \cos D_0}{in_0 + i'n'_0}, \qquad H\int \cos D_0\, dt = \frac{H \sin D_0}{in_0 + i'n'_0},$$

de sorte que le terme $C \cos D$ de la fonction perturbatrice conduit à des inégalités périodiques qui ont le même argument.

b. Inégalités à longue période. — Dans certains cas $in + i'n'$ est très petit. Cela arrive si la valeur absolue du nombre $\frac{i}{i'}$ est une des premières réduites de la fraction continue à laquelle conduit le développement de $\frac{n'}{n}$. Dans ce cas on obtient comme à l'ordinaire une inégalité périodique; seulement elle est à très longue période et son coefficient est très grand, ayant en dénominateur $in + i'n'$.

Il y a lieu surtout, en ce cas, de s'arrêter à la longitude moyenne donnée par la formule

$$l = \varepsilon_0 + \int n\, dt.$$

Si n a le terme

$$\frac{K}{in_0 + i'n'_0} \cos D_0\, dt,$$

l aura le terme

$$\frac{K}{(in_0 + i'n'_0)^2} \sin D_0\, dt,$$

dont le coefficient devient extrêmement grand si $in_0 + i'n'_0$ est très petit.

Les exemples les plus célèbres d'inégalités à longue période se

rapportent aux perturbations de Saturne et de Pallas par Jupiter; on a

Pour Jupiter..... $n = 299'',1284$ $e = \frac{1}{20}$

» Saturne.... $n_1 = 120'',4547$ $e_1 = \frac{1}{20}$

» Pallas...... $n_2 = 770'',4846$ $e_2 = \frac{1}{4}$ $\varphi = \frac{1}{2}$

On a

$$2n - 5n_1 = -4'',0167 = \frac{-1}{50000},$$

$$18n - 7n_2 = -9'',081 = \frac{-1}{22000}.$$

La période de l'inégalité de Saturne est, en jours, $2\pi : \frac{1}{50000}$, ou approximativement 900 ans;

Celle de l'inégalité de Pallas 300 ans.

La première est du troisième ordre par rapport aux excentricités, la seconde du onzième; la longitude héliocentrique de Saturne peut être altérée de $50'$; celle de Pallas, d'après Le Verrier, de $15'$.

c. Inégalités séculaires. — Si i et i' sont nuls, $in + i'n'$ est identiquement nul. Le terme $C \cos D$ ne dépend pas du temps et l'intégration donne, en première approximation, un terme proportionnel au temps, susceptible de grandir indéfiniment. Il est important de remarquer que les grands axes des orbites, en première approximation, n'ont pas d'inégalités séculaires. On a en effet

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Si l'on remplace R par un terme indépendant de l, ce terme est aussi indépendant de ε, et, pour ce terme, $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ est nulle.

Le moyen mouvement n'en a pas non plus, car la relation

$$n^2 a^3 = f(m_0 + m)$$

donne

$$2\frac{\delta_1 n}{n} + 3\frac{\delta_1 a}{a} = 0,$$

de sorte que, $\delta_1 a$ étant nul, $\delta_1 n$ l'est aussi.

C'est l'absence d'inégalités séculaires pour les grands axes et les moyens mouvements, en première approximation, qui constitue le théorème relatif à *l'invariabilité des grands axes et des moyens mouvements;* Poisson a montré que ce théorème est encore vrai en seconde approximation.

191. Développement de la fonction perturbatrice. — Nous nous bornerons aux indications les plus indispensables au sujet de ce développement.

Nous avons donné au n° 90 les développements de r et de $v - \mathrm{M}$ en séries dont les termes sont des sinus ou des cosinus de multiples de l'anomalie moyenne M, désignée ici par $l - \varpi$ et nous avons fait des remarques importantes à l'égard des coefficients de ces termes. Le lecteur verra au Chapitre XIII du *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand comment on utilise avec grand profit, dans ces développements, les fonctions de Bessel.

Envisageons maintenant la partie de la fonction perturbatrice relative à l'action de la planète m'

$$\mathrm{R} = fm'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right).$$

On a

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz').$$

D'autre part x, y, z s'expriment en fonction de la longitude vraie v dans l'orbite et des éléments par les formules

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\cos(v-\theta) - r\sin\theta\sin(v-\theta)\cos\varphi,\\
y &= r\sin\theta\cos(v-\theta) + r\cos\theta\sin(v-\theta)\cos\varphi,\\
z &= r\sin(v-\theta)\sin\varphi,
\end{aligned}$$

qu'il convient, φ étant un petit angle, d'écrire

$$\begin{aligned}
x &= r\cos v + 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\theta\sin(v-\theta),\\
y &= r\sin v - 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\theta\sin(v-\theta),\\
z &= r\sin\varphi\sin(v-\theta);
\end{aligned}$$

x', y', z' ont des expressions analogues, et l'on a

$$xx' + yy' + zz' = rr'\cos(v - v') + \frac{1}{2}\mathrm{Q},$$

Q étant une fonction entière de $\sin v$, $\cos v$, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sin(v-\theta)$, $\cos(v-\theta)$ et des mêmes quantités accentuées. On en conclut

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v-v') - Q = P - Q,$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = P^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}P^{-\frac{3}{2}}Q + \frac{1.3}{2.4}P^{-\frac{5}{2}}Q^2 + \ldots.$$

P ne dépend pas des inclinaisons; au contraire Q est du second ordre par rapport à elles.

Dans ce développement, on néglige d'abord les excentricités, ce qui revient à remplacer r par a, v par l, r' par a', v' par l'. P et Q sont remplacées par des fonctions M et N plus simples. N est une somme limitée de termes périodiques ayant pour arguments des sommes de multiples de l, l', θ, θ'; il en est de même de N^k. M est égal à

$$a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(l-l');$$

on aura

$$M^{-\frac{2k+1}{2}} = \frac{1}{a''^{\frac{2k+1}{2}}}(1 - 2\alpha\cos\lambda + \alpha^2)^{-\frac{2k+1}{2}},$$

où a'' désigne le plus grand des deux axes a, a' et α le rapport du plus petit au plus grand. En décomposant $1 - 2\alpha\cos\lambda + \alpha^2$ en deux facteurs du premier degré sous la forme

$$(1 - \alpha E^{\lambda i})(1 - \alpha E^{-\lambda i}),$$

on trouve immédiatement

$$(1 - 2\alpha\cos\lambda + \alpha^2)^{-s} = \frac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\lambda + b_s^{(2)}\cos 2\lambda + \ldots,$$

où

$$b_s^{(0)} = 2\left\{1 + \left(\frac{s}{1}\right)^2\alpha^2 + \left[\frac{s(s+1)}{1.2}\right]^2\alpha^4\ldots\right\},$$

$$b_s^{(1)} = 2\left[\frac{s}{1}\alpha + \frac{s(s+1)}{1.2}\frac{s}{1}\alpha^3 + \frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\frac{s(s+1)}{1.2}\alpha^5\ldots\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En examinant les valeurs de x, y, z, on voit qu'un argument θ amène toujours un facteur φ et que les exposants de φ s'ajoutent toujours, tandis que deux arguments θ peuvent, en se retranchant, se détruire. Donc l'exposant de φ dans un terme est au moins égal au multiple de θ, et s'il en diffère c'est d'un nombre pair. On voit

aussi que la somme des multiplicateurs de θ et θ' étant, dans un même terme, toujours paire, il en est de même de la somme des exposants de φ et φ'.

Pour rétablir les excentricités on aura

$$r = a(1+X), \qquad V = l + Y, \qquad r' = a'(1+X'), \qquad V' = l' + Y',$$

et l'on appliquera la formule de Taylor. Les termes que l'on obtiendra auront visiblement la forme

$$A \frac{\sin}{\cos}(il + i'l' + j\varpi + j'\varpi' + k\theta + k'\theta').$$

D'après ce qui a été dit, $k+k'$ est un nombre pair; l'exposant de φ dans A sera au moins égal à la valeur absolue de k et la surpassera d'un nombre pair.

ϖ et ϖ' sont introduits par X, Y, X', Y'; en se reportant aux valeurs de ces quantités, on voit que, chaque fois que l'on introduit ϖ dans un argument, on introduit dans le coefficient un facteur e, de sorte que, si l'argument d'un terme contient $j\varpi$, le coefficient aura le facteur e affecté d'un exposant égal à la valeur absolue de j augmentée d'un nombre pair.

On a

$$i + i' + j + j' + k + k' = 0.$$

Cette propriété résulte de ce que la fonction R est indépendante des axes de coordonnées choisis. Or, si l'on fait tourner Ox et Oy d'un angle α autour de Oz; $\theta, \varpi, l, \theta', \varpi', l'$ augmentent de α et l'argument du terme considéré augmente de

$$(i + i' + j + j' + k + k')\alpha.$$

La fonction ne devant pas changer, et cela quel que soit α, la somme $i + i' + j + j' + k + k'$ est nulle.

On voit aussi que le développement ne peut contenir que des cosinus, car, si l'on change les signes de $\theta, \varpi, l, \theta', \varpi', l'$, les coordonnées x, y, z, x', y', z' changent de signe; donc $xx' + yy' + zz'$, r^2, r'^2 ne changent pas : le développement ne doit donc pas changer; il ne peut contenir que des cosinus.

Enfin l'ordre d'un terme est au moins égal à la valeur absolue de $i + i'$ et s'il en diffère c'est d'un nombre pair. En effet, l'ordre étant la somme des exposants de e, φ, e', φ' surpasse d'un nombre

pair (qui peut être zéro) la somme des valeurs absolues de j, j', k, k', et par suite la valeur absolue de $j+j'+k+k'$, qui est la même que celle de $i+i'$.

192. Expressions générales des inégalités séculaires. — Le procédé d'intégration indiqué au paragraphe précédent n'est qu'une approximation grossière et l'obtention d'inégalités proportionnelles au temps tient peut-être au procédé lui-même. Une des questions les plus importantes au point de vue théorique qui aient été résolues est l'intégration des équations δ, en supposant les fonctions R_1, R_2, ... réduites à leurs termes non périodiques. Encore a-t-il fallu négliger ceux de ces termes qui sont du quatrième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, ou d'un ordre supérieur.

En posant

$$(a^2+a'^2-2aa'\cos\lambda)^{-\frac{1}{2}} = A_0 + A_1\cos\lambda + A_2\cos 2\lambda \ldots.$$
$$(a^2+a'^2-2aa'\cos\lambda)^{-\frac{3}{2}} = B_0 + B_1\cos\lambda + B_2\cos 2\lambda \ldots,$$

on trouve

$$R = \Sigma fm' \left\{ \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{8}aa'B_1[e^2+e'^2-\varphi^2-\varphi'^2+2\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')] - \frac{1}{4}aa'B_2 ee'\cos(\varpi-\varpi') \right\}.$$

Si l'on néglige dans les équations en $\frac{de}{dt}$ et $\frac{d\varpi}{dt}$ les quantités dont l'ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons dépasse le troisième, les équations (δ) correspondantes donnent

$$\frac{de}{dt} = \frac{-1}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial\varpi}, \qquad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},$$

ou

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{4}fm'\frac{aa'}{na^2}B_2 e'\sin(\varpi-\varpi') + \ldots,$$
$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{fm'aa'B_1}{4na^2} - \frac{fm'aa'B_2}{4na^2}\frac{e'}{e}\cos(\varpi-\varpi') + \ldots,$$

les points placés après les seconds membres indiquant des termes semblables obtenus en remplaçant dans les premiers e', ϖ' par les éléments e'', ϖ'', $e'''\varpi'''$, ..., relatifs aux $n-2$ autres planètes.

Si l'on pose, pour abréger,

$$(37)\qquad \frac{fm'aa'B_1}{4na^2}=(01),\qquad \frac{fm'aa'B_2}{4na^2}=[01],$$

on a

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{de}{dt}=-[01]e'\sin(\varpi-\varpi')-[02]e''\sin(\varpi-\varpi'')\ldots,\\ \dfrac{d\varpi}{dt}=(01)-[01]\dfrac{e'}{e}\cos(\varpi-\varpi')+(02)-[02]\dfrac{e''}{e}\cos(\varpi-\varpi'')\ldots, \end{cases}$$

et des équations analogues pour e' e ϖ', ...

Il est avantageux de remplacer e et ϖ, e', ϖ', ..., par des inconnues h, l, h', l', ..., définies par les relations

$$(39)\qquad e\sin\varpi=h,\qquad e\cos\varpi=l,\qquad e'\sin\varpi'=h',\qquad \ldots,$$

qui donnent

$$\frac{dh}{dt}=\sin\varpi\frac{de}{dt}+e\cos\varpi\frac{d\varpi}{dt},$$
$$\frac{dl}{dt}=\cos\varpi\frac{de}{dt}-e\sin\varpi\frac{d\varpi}{dt},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le système (38) donne de suite pour déterminer h, l, h', l', ... les équations

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt}=\quad[(01)+(02)+\ldots]l-[01]l'-[02]l''-\ldots,\\ \dfrac{dl}{dt}=-[(01)+(02)+\ldots]h+[01]h'+[02]h''+\ldots,\\ \dfrac{dh'}{dt}=\quad[(10)+(12)+\ldots]l'-[10]l-[12]l''-\ldots,\\ \dfrac{dl'}{dt}=-[(10)+(12)+\ldots]h'+[10]h+[12]h''-\ldots. \end{cases}$$

Pour intégrer ces équations on cherche une solution de la forme

$$h=M\sin(gt+\beta),\qquad l=M\cos(gt+\beta),$$
$$h'=M'\sin(gt+\beta),\qquad l'=M'\cos(gt+\beta),$$

où g, β, M, M', ... désignent des constantes. Si l'on introduit ces valeurs dans les équations (40), les deux membres des équations de rang impair auront le facteur $\cos(gt+\beta)$, les deux membres des

équations de rang pair le facteur $\sin(gt+\beta)$. Les équations devant être satisfaites quel que soit t, on égalera les coefficients de ces facteurs dans les deux membres de chaque équation. Or il arrive que chaque équation de rang pair conduit à la même condition que l'équation de rang impair qui la précède et l'on obtient le système de n conditions

$$(41)\quad \begin{cases} \{g-(0,1)-(0,2)\ldots\}M+[0,1]M'+[0,2]M''\ldots=0, \\ [1,0]M+\{g-(1,0)-(1,2)\ldots\}M'+[1,2]M''\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [n-1,0]M+[n-1,1]M'\ldots+\{g-(n-1,0)-(n-1,1)\ldots\}M^{(n-1)}=0. \end{cases}$$

Ces équations sont homogènes et du premier degré par rapport à M, M', ... Ces quantités ne pouvant être toutes nulles, le déterminant des coefficients devra être égal à zéro, ce qui donne l'équation

$$(42)\quad 0=G=\begin{vmatrix} \{g-(0,1)-0,2\ldots\} & [0,1] & [0,2]\ \ldots & [0,n-1] \\ [1,0] & \{g-(1,0)-(1,2)\ldots\} & [1,2]\ \ldots & [1,n-1] \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots & \ldots\ldots \\ [n-1,0] & [n-1,1] & \ldots\ \ldots & \{g-(n-1,0)-(n-1,1)\ldots-(n-1,n-2)\} \end{vmatrix}.$$

équation du degré n, où ne figure que la seule inconnue g.

Pour chaque valeur g_i de g, les équations (40) permettent d'exprimer les coefficients M, M', ... en fonction de l'un d'eux qui reste arbitraire. La constante β est aussi arbitraire. Si l'équation (41) donne bien, pour g, n valeurs distinctes, on aura l'intégration générale du système (40) sous la forme

$$\begin{aligned} h &= \Sigma M_i \sin(g_i t+\beta_i), & l &= \Sigma M_i \cos(g_i t+\beta_i), \\ h' &= \Sigma M'_i \sin(g_i t+\beta_i), & l' &= \Sigma M'_i \cos(g_i t+\beta_i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

les sommations Σ s'étendant aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$ de i.

Or l'équation (42) a bien ses n racines réelles et inégales. Si en effet on posait

$$g=\zeta+\eta i, \qquad M=\rho+\sigma i, \qquad M'=\rho'+\sigma' i, \qquad \ldots,$$

i étant le symbole $\sqrt{-1}$ des nombres complexes, en égalant à zéro dans les premiers membres des équations (40) les termes indépendants de i et les coefficients de i, chacune de ces équations se dédoublerait. Ainsi la première donnerait

$$\{\zeta-(0,1)-(0,2)\ldots\}\rho-\eta\sigma+[0,1]\rho'+[0,2]\rho''\ldots=0,$$
$$\{\zeta-(0,1)-(0,2)\ldots\}\sigma+\eta\rho+[0,1]\sigma'+[0,2]\sigma''\ldots=0,$$

d'où immédiatement

$$\eta(\rho^2+\sigma^2)+[0,1](\rho\sigma'-\sigma\rho')+[0,2](\rho\sigma''-\sigma\rho'')\ldots=0.$$

Les équations suivantes donnent de même

$$\eta(\rho'^2+\sigma'^2)+[1,0](\rho'\sigma-\sigma'\rho)+[1,2](\rho'\sigma''-\sigma'\rho'')\ldots=0,$$
$$\eta(\rho''^2+\sigma''^2)+[2,0](\rho''\sigma-\sigma''\rho)+[2,1](\rho''\sigma'-\sigma''\rho'')\ldots=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on multiplie les deux membres de la première de ces équations par mna^2, ceux de la seconde par $m'n'a'^2\ldots$, et que l'on tienne compte des conditions

$$mna^2[0,1]=m'n'a'^2[1,0],$$
$$mna^2(0,1)=m'n'a'^2(1,0],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui résultent des définitions (37), on obtient

$$\eta\{mna^2(\rho^2+\sigma^2)+m'n'a'^2(\rho'^2+\sigma'^2)+\ldots\}=0. \tag{43}$$

Les coefficients m, m', ..., a^2, a'^2, ... sont positifs ; il en est de même dans le système planétaire des moyens mouvements n, n', ..., puisque tous les mouvements sont directs. Le coefficient de η ne peut donc être nul, et l'équation (43) donne

$$\eta=0.$$

Les n valeurs de g sont donc réelles.

Laplace démontre que l'équation (41) en g ne peut avoir deux racines égales ; mais sa démonstration prouve seulement que les valeurs de h, k, ..., h', ... ne peuvent renfermer le temps en dehors des signes sinus et cosinus, ce qui, il est vrai, importe le plus pour la stabilité du système solaire.

Nous ajouterons seulement une remarque importante :

Les valeurs trouvées de h, k, ... donnent

$$(44)\qquad \begin{cases} e\sin\varpi = M_1\sin(g_1t+\beta_1)+M_2\sin(g_2t+\beta_2)+\dots, \\ e\cos\varpi = M_1\cos(g_1t+\beta_1)+M_2\cos(g_2t+\beta_2)+\dots. \end{cases}$$

Si l'un M_1 des coefficients surpasse la somme des valeurs absolues des autres M_2, M_3, ..., il existe un angle croissant proportionnellement au temps dont ϖ ne s'écarte jamais de 90°.

On déduit, en effet, des équations (44)

$$e\cos(\varpi - g_1t - \beta_1) = M_1 + M_2\cos[(g_2-g_1)t+\beta_2-\beta_1]+\dots.$$

Le second membre, d'après l'hypothèse, a toujours le signe de M_1. Donc $\cos(\varpi - g_1t - \beta_1)$ ne change jamais de signe et par suite $\varpi - g_1t - \beta_1$ reste entre $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ et $\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi$, et si l'on pose

$$\varpi - g_1t - \beta_1 = k\pi + \psi,$$

d'où

$$\varpi = (k\pi + g_1t + \beta_1) + \psi,$$

ψ reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Cette circonstance se produit pour Mercure, Mars, Jupiter et Saturne.

D'autre part, si l'on additionne les deux membres des équations (44) après les avoir élevés au carré, on trouve

$$e^2 = M_1^2 + M_2^2 + \dots + 2M_1M_2\cos[(g_1-g_2)t+\beta_1-\beta_2]+\dots$$

ou

$$e^2 < (|M_1| + |M_2| + \dots)^2.$$

L'excentricité de la planète m a donc pour maximum la somme des valeurs absolues des constantes M_1, M_2, ... Les calculs numériques donnent, pour ce maximum, les valeurs suivantes :

Mercure.........	0,226	Jupiter..........	0,062
Vénus...........	0,087	Saturne.........	0,085
La Terre........	0,078	Uranus.........	0,064
Mars............	0,142		

Une analyse toute semblable à celle que nous venons de développer s'applique aux inégalités séculaires des inclinaisons et des

longitudes des nœuds. On pose

$$\varphi \sin\theta = p, \qquad \varphi\cos\theta = q, \qquad \varphi'\sin\theta' = p', \qquad \ldots,$$

et les équations en $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ donnent, en négligeant les termes du quatrième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, les suivantes

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -[(0,1)+(0,2)\ldots]q + (0,1)q' + \ldots, \\ \dfrac{dq}{dt} = -[(0,1)+(0,2)\ldots]p + (0,1)p' + \ldots, \\ \dfrac{dp'}{dt} = (1,0)q - [(1,0)+(1,2)\ldots]q' + \ldots. \end{cases}$$

On cherche comme pour les équations (41) une solution de la forme

$$p = \mathrm{M}\sin(gt+\beta), \qquad q = \mathrm{M}\cos(gt+\beta), \qquad p' = \mathrm{M}'\sin(gt+\beta), \qquad \ldots.$$

On a pour déterminer g une équation $\mathrm{G}' = 0$ du degré n, mais qui a la racine 0, à laquelle correspondent des valeurs égales des constantes M, M′, M″, ... L'équation $\mathrm{G}' = 0$, analogue à l'équation (42), a d'ailleurs ses racines réelles; numériquement on les trouve inégales, de sorte que les valeurs de p, q, ... sont

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{M}\sin\beta + \mathrm{M}_1\sin(g_1 t + \beta_1) + \ldots, \\ q &= \mathrm{M}\cos\beta + \mathrm{M}_1\cos(g_1 t + \beta_1) + \ldots, \\ p' &= \mathrm{M}\sin\beta + \mathrm{M}'_1\sin(g_1 t + \beta_1) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

On voit que φ, qui est égal à $\sqrt{p^2+q^2}$, ne peut dépasser la somme des valeurs absolues de M, M_1, M_2, ... Le Verrier, en prenant pour plan des xy l'écliptique de 1800,0, trouve pour ce maximum les nombres suivants :

Mercure..........	9°.17′	Jupiter	2°. 1′
Vénus............	5.18	Saturne..........	2.33
La Terre.........	4.52	Uranus..........	2.33
Mars.............	7. 9		

Si la valeur absolue de l'une des constantes M, M_1, ... surpasse la somme des valeurs absolues des autres, il y a un angle croissant

proportionnellement au temps dont la longitude du nœud ne s'écarte jamais de 90°. Pour Jupiter, Saturne, Uranus, la chose se produit à l'égard de la constante M : la direction moyenne du nœud est alors fixe.

Avant d'abandonner ce sujet, nous remarquerons encore que les fonctions périodiques qui représentent les inégalités séculaires ont des périodes extrêmement longues. Si en effet on reprend les formules

$$[0, 1] = \frac{fm'aa'B_2}{4na^2}, \qquad (0, 1) = \frac{fm'aa'B_1}{4na^2},$$

on voit que tous ces nombres ont une des masses perturbatrices en facteur. Si ces masses devenaient nulles, G se réduirait à g^N, N étant le nombre total des planètes. Toutes les racines de l'équation $G = 0$ sont donc petites. Si l'on remarque que

$$f(m_0 + m) = n^2 a^3,$$

on a

$$[0, 1] = \frac{m'}{m_0 + m} \frac{na^2 a' B_2}{4}, \qquad (0, 1) = \frac{m'}{m_0 + m} \frac{na^2 a' B_1}{4};$$

or B_1 est une fonction homogène de a et a' de l'ordre -3 : donc $\frac{a^2 a' B_1}{4}$ est d'ordre fini. Il s'ensuit que le rapport $\frac{(0, 1)}{n}$ est de l'ordre de $\frac{m'}{m_0 + m}$. C'est au plus 0,001. La période d'une inégalité de la forme $\sin(gt + \beta)$ ou $\cos(gt + \beta)$ est $\frac{2\pi}{g}$. Le nombre g étant de l'ordre des coefficients $(0, 1)\ldots$, cette période est de l'ordre de mille fois la durée $\frac{2\pi}{n}$, de la révolution de la planète. Ainsi les périodes des inégalités séculaires comprennent des milliers de révolutions des planètes considérées.

Nous n'avons plus à nous occuper que de la détermination de ε. La dernière équation (δ) donne

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\tang \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varphi} - \frac{\sqrt{1 - e^2}(1 - \sqrt{1 - e^2})}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = +fm' \left\{ \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{8} aa' B_1 [e^2 + e'^2 - \varphi^2 - \varphi'^2 + 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')] \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} aa' B_2 ee' \cos(\varpi - \varpi') \right\},$$

En négligeant les termes du quatrième ordre on trouve, un résultat de la forme

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathrm{A} + \mathrm{B}e^2 + \mathrm{C}e'^2 + \mathrm{D}ee'\cos(\varpi - \varpi') + \mathrm{E}\varphi^2 + \mathrm{F}\varphi'^2 + \mathrm{G}\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta'),$$

A, B, ... étant des fonctions de a, a'.

On intègre par quadratures. D'après les résultats trouvés ci-dessus, on a

$$e^2 = \mathrm{M}_1^2 + \mathrm{M}_2^2 + \ldots + 2\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\cos[(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2] + \ldots,$$
$$e'^2 = \mathrm{M}_1'^2 + \mathrm{M}_2'^2 + \ldots + 2\mathrm{M}_1'\mathrm{M}_2'\cos[(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2] + \ldots,$$
$$ee'\cos(\varpi - \varpi') = ll' + hh' = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_1' + \ldots + (\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1' + \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2')\cos\xi + \ldots;$$

φ', φ'^2, $\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta')$ ont des formes analogues; en introduisant ces valeurs on trouve pour $\frac{d\varepsilon}{dt}$ une expression de la forme

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathrm{H} + \Sigma\mathrm{I}\cos(rt + \rho).$$

On en déduit

$$\varepsilon = \text{const.} + \mathrm{H}t + \sum\frac{\mathrm{I}}{r}\sin(rt + \rho).$$

Pour la longitude moyenne on a

$$l = \varepsilon + \int n\,dt = \varepsilon + nt = \text{const.} + (n + \mathrm{H})t + \sum\frac{\mathrm{I}}{r}\sin(rt + \rho).$$

Le moyen mouvement tel que le donnera les observations ne sera donc pas $(n) = \sqrt{\frac{f\mu}{a^3}}$, mais $(n) + \mathrm{H}$.

CHAPITRE XIII.

CALCUL DES PERTURBATIONS SPÉCIALES PAR QUADRATURES MÉCANIQUES.

MÉTHODE DE LA VARIATION DES ÉLÉMENTS. — MÉTHODE DES COORDONNÉES RECTANGULAIRES OU MÉTHODE DE BOND ET D'ENCKE. — MÉTHODE DES COORDONNÉES POLAIRES, OU MÉTHODE DE HANSEN, PERFECTIONNÉE PAR TIETJEN. — COMPARAISON DES ÉLÉMENTS PRIMITIFS AUX OBSERVATIONS. — LIEUX NORMAUX.

193. **Aperçu général sur les méthodes de calcul par quadratures mécaniques.** — L'intégration analytique des équations A, B, C permet d'exprimer les coordonnées héliocentriques des planètes en fonction du temps. Laplace dans la *Mécanique céleste,* plus récemment Le Verrier dans les *Annales de l'Observatoire de Paris,* ont constitué ainsi la théorie des planètes principales, dont l'étude a fait l'objet des travaux d'un grand nombre d'astronomes. Mais l'intégration rigoureuse, dans l'état actuel de l'Analyse, n'est pas possible, et les fonctions obtenues ont la forme de séries n'ayant que la valeur d'approximations plus ou moins précises. Dans ces dernières années, M. Poincaré a montré que ces séries ne sont pas convergentes.

D'autre part, la formation de ces suites est très pénible quand les excentricités des orbites sont grandes, ce qui a lieu pour les comètes périodiques et pour un grand nombre des petites planètes. Dans beaucoup de cas, la formation d'une théorie suffisamment exacte est en quelque sorte impraticable. On se borne alors à calculer les perturbations de proche en proche par les formules de quadrature mécanique données au Chapitre VIII du Tome premier de cet Ouvrage (p. 259).

L'application de ces formules peut se faire de diverses manières. Dans tous les cas, on admet que l'on ait obtenu les éléments de l'orbite qui, dans le voisinage d'une date donnée, représentent le plus exactement les observations. Ces éléments, dits *éléments osculateurs,* sont ceux qui, à cette date, conduisent à des valeurs

des coordonnées et de leurs dérivées premières égales à celles qu'avait réellement l'astre à cet instant.

Supposant ces éléments connus, on peut partir des formules de Lagrange qui donnent les dérivées $\frac{dh}{dt}$ des divers éléments (h désignant un élément quelconque) en fonction de ces éléments eux-mêmes et des coordonnées de la planète troublée et des planètes perturbatrices, calculer pour un grand nombre de dates équidistantes et suffisamment rapprochées les valeurs des dérivées $\frac{dh}{dt}$ et, pour les diverses dates considérées, en déduire par les formules de quadratures mécaniques les perturbations des éléments, c'est-à-dire les intégrales $\int_0^t \frac{dh}{dt}\,dt$, l'époque initiale étant l'époque d'osculation des éléments. Nous développerons d'abord cette première méthode, dite *méthode de la variation des éléments*. La longitude moyenne de la planète sera la somme de plusieurs termes dont l'un sera représenté par une quadrature double que les formules de la page 259 du Tome I permettent aussi d'obtenir.

Bond et Encke ont donné le moyen de calculer commodément les perturbations des coordonnées rectangulaires, c'est-à-dire les différences entre les valeurs de ces coordonnées à une date quelconque et celles que donneraient pour cette date les éléments osculateurs relatifs à la date initiale. On obtient des expressions commodes des dérivées secondes de ces différences ξ, η, ζ par rapport au temps et l'on a successivement pour l'une quelconque ξ d'entre elles

$$\frac{d\xi}{dt} = \int_0^t \frac{d^2\xi}{d\tau^2}\,d\tau,$$

$$\xi = \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{d^2\xi}{d\tau^2}\,d\tau,$$

en supposant le temps compté à partir de l'époque d'osculation, puisque, par la définition même des éléments osculateurs, ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sont nulles à cette date.

Hansen a donné une méthode analogue, perfectionnée depuis par Tietjen et fondée sur l'emploi de coordonnées polaires.

Nous exposerons successivement ces trois méthodes en raison des avantages propres à chacune d'elles. Pour en faciliter l'intelligence complète, nous ferons observer que les valeurs des dérivées premières et des dérivées secondes auxquelles on doit appliquer les méthodes de quadratures mécaniques pour obtenir de proche en proche les perturbations des coordonnées, ou des éléments, sont fonctions des coordonnées troublées ou des éléments troublés et par suite ne peuvent être immédiatement calculées d'une façon rigoureuse. Dans les trois méthodes on tourne la difficulté comme il suit. Pendant un intervalle de temps peu étendu, voisin de l'époque d'osculation, on peut regarder les perturbations comme négligeables. On en profite pour calculer, pour un petit nombre d'époques avant et après l'époque d'osculation, les dérivées des perturbations, en remplaçant dans le calcul les coordonnées ou les éléments troublés par les coordonnées non troublées ou les éléments osculateurs primitifs. Ayant quatre valeurs de la dérivée φ soumise à la quadrature, on forme le tableau des différences des trois premiers ordres φ^1, φ^2, φ^3. D'autre part, les intégrales à obtenir devant s'annuler à l'époque d'osculation, les formules limites de la page 259 précitée permettront de calculer les valeurs sommatoires ${}^1\varphi$, ${}^2\varphi$ relatives à l'une des quatre dates, et par suite d'obtenir cinq valeurs de ${}^1\varphi$, et six de ${}^2\varphi$.

Cela fait, si l'on regarde la différence troisième comme demeurant la même pour quelques dates, on pourra, par extrapolation, ajouter quelques nombres à chaque colonne du tableau des différences et calculer la valeur de φ, pour la cinquième date, au moins d'une façon approchée. Par les formules de quadrature, on aura une valeur de la perturbation pour cette cinquième date, et cette valeur grossièrement approchée le sera assez pour servir au calcul définitif de la fonction φ. Nous devons nous borner ici à cette indication. Nous ferons connaître plus loin, pour chacune des trois méthode, quelles formules de la théorie de l'interpolation l'on applique réellement.

Nous reproduisons ici, en remplaçant les coefficients symboliques P_1^1, ... par leurs valeurs, les formules de la page 259 du Tome I que nous appliquerons constamment. Nous placerons toujours l'époque d'osculation au milieu de deux époques consécutives; désignant par ω l'intervalle comprise entre ces époques et

par a l'une d'elles, nos intégrales s'annulant pour $a - \frac{\omega}{2}$, nous aurons

$$ {}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{1}{24}\varphi^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right) + \frac{17}{5760}\varphi^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right) - \frac{367}{967680}\varphi^5\left(a-\frac{\omega}{2}\right)\dots $$

$$ {}^2\varphi(a) = \frac{1}{24}\varphi(a-\omega) - \frac{17}{5760}[2\varphi^2(a-\omega) + \varphi^2(a)] + \frac{367}{967680}[3\varphi^4(a-\omega) + 2\varphi^4(a)] - \dots $$

et pour les intégrales

$$ \frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega} \varphi(x)\,dx = {}^1\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] + \frac{1}{24}\varphi^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - \frac{17}{5760}\varphi^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] + \frac{367}{967680}\varphi^5\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\dots $$

$$ \frac{1}{\omega^2}\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega} dx \int_{a-\frac{\omega}{2}}^{x} \varphi(x)\,dx = {}^2\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - \frac{1}{24}\varphi^0\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] + \frac{17}{1920}\varphi^2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] - \frac{367}{193536}\varphi^4\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\dots $$

$$ \frac{1}{\omega^2}\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+i\omega} dx \int_{a-\frac{\omega}{2}}^{x} \varphi(x)\,dx = {}^2\varphi[a+i\omega] + \frac{1}{12}\varphi^0[a+i\omega] - \frac{1}{240}\varphi^2(a+i\omega) + \frac{31}{60480}\varphi^4[a+i\omega]\dots, $$

$$ \frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+i\omega} \varphi(x)\,dx = {}^1\varphi[a+i\omega] - \frac{1}{12}\varphi^1[a+i\omega] + \frac{11}{720}\varphi^3[a+i\omega] - \frac{191}{60480}\varphi^5[a+i\omega]\dots $$

C'est au fond à la diminution rapide des coefficients de ces

diverses formules qu'est dû le succès des méthodes de calcul des perturbations que nous allons exposer.

Dans l'exposition que nous donnerons de chacune de ces méthodes, nous supposerons le calcul déjà mis en train; nous reviendrons ensuite sur les particularités qu'offre le début de chaque calcul.

194. Méthode de la variation des éléments. Équations. — Nous prendrons pour point de départ les équations (δ) du n° **188** dans lesquelles il reste, pour l'objet que nous nous proposons, à exprimer commodément les dérivées partielles de la fonction perturbatrice en fonction des éléments et des coordonnées de la planète dont on étudie le mouvement et des planètes perturbatrices.

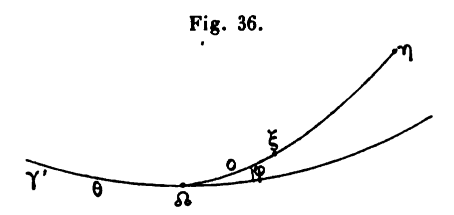
Rappelons, à l'égard de ces dernières que

$$\text{(1)} \qquad R = \sum k^2 m' \left[\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right],$$

la sommation s'étendant aux diverses planètes m'.

Prenons pour plan fondamental le plan de l'écliptique à une date fixe et supposons les éléments de l'orbite rapportés à ce plan. Conservons généralement les notations du Chapitre XII. Soit φ l'in-

Fig. 36.



clinaison de l'orbite; employons le symbole Ω au lieu de θ pour désigner la longitude du nœud. Dans le plan de l'orbite prenons pour axes auxiliaires deux droites rectangulaires, $o\xi$, $o\eta$, dont la première coïncide avec le rayon vecteur. Soit o l'argument de la latitude $\Omega\xi$, $o + \frac{\pi}{2}$ l'arc $\Omega\eta$. Supposons un axe $o\zeta$ perpendiculaire au plan de l'orbite, dans un sens tel que du pôle correspondant le mouvement $\xi\eta$ soit vu dans le sens direct. Par rapport à ces axes ξ, η, ζ soient ξ', η', ζ' les coordonnées d'une planète perturbatrice. Désignant par λ' et β' la longitude et la latitude de

cette planète, par L′ et B′ des coordonnées analogues rapportées au plan de l'orbite avec le nœud ☊ pour origine des L′, le triangle sphérique qui a pour sommets le pôle de l'écliptique, le pôle du plan de l'orbite et la planète m' donne, pour déterminer L′ et B′, les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \cos B'\cos L' = \cos\beta'\cos(\lambda' - \Omega), \\ \cos B'\sin L' = \cos\beta'\sin(\lambda' - \Omega)\cos\varphi + \sin\beta'\sin\varphi, \\ \sin B' = \sin\beta'\cos\varphi - \cos\beta'\sin(\lambda' - \Omega)\sin\varphi, \end{cases}$$

après quoi l'on a

$$(3)\quad \begin{cases} \xi' = r'\cos B'\cos(L' - o), \\ \eta' = r'\cos B'\sin(L' - o), \\ \zeta' = r'\sin B'. \end{cases}$$

Il y a lieu de remarquer expressément que ξ', η' sont fonctions de o qui est l'argument de la latitude de la planète m.

Dans l'expression (1) le terme

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$$

est le cosinus de l'angle formé par le rayon vecteur de la planète troublée et celui de la planète perturbatrice. Ce cosinus évalué au moyen des axes ξ, η, ζ est égal à

$$\frac{\xi'}{r'},$$

et l'expression (1) devient

$$(4)\quad R = \sum k^2 m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{r\xi'}{r'^3}\right),$$

ρ désignant la distance des planètes troublée et perturbatrice. On a d'ailleurs, en désignant par v l'anomalie vraie

$$(5)\quad \begin{cases} \rho^2 = r^2 + r'^2 - 2r\xi', \\ o = \varpi + v - \Omega, \\ r = a(1 - e\cos u), \\ \tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}, \\ u - e\sin u = nt + \varepsilon - \varpi. \end{cases}$$

Ces formules conduisent sans la moindre difficulté au calcul des dérivées partielles de R par rapport aux éléments. En utilisant

quelques autres relations bien connues du mouvement elliptique et la relation

$$n^2 a^3 = k^2,$$

posant

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{K} = \dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{1}{r'^3}, \\ \mathrm{L} = \sum \dfrac{km'}{\sqrt{p}}\left(\xi'\mathrm{K} - \dfrac{r}{\rho^3}\right), \\ \mathrm{M} = \sum \dfrac{km'}{\sqrt{p}}\eta'\mathrm{K}, \\ \mathrm{N} = \sum \dfrac{km'}{\sqrt{p}}\zeta'\mathrm{K}, \end{cases}$$

et se rappelant que dans le calcul de $\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial a}$ on ne doit pas regarder u comme fonction de a, on trouve par de simples différentiations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a} &= \quad k\sqrt{p}\,\frac{r}{a}\,\mathrm{L}, \\ \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial e} &= -k\sqrt{p}\,a\cos v.\mathrm{L} + \frac{k}{\sqrt{p}}\,a(r+p)\sin v.\mathrm{M}, \\ \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varpi} &= -\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varepsilon} + kr\sqrt{p}\,\mathrm{M}, \\ \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \Omega} &= -k\sqrt{p}(1-\cos\varphi)r\,\mathrm{M} - k\sqrt{p}\sin\varphi.r\cos o.\mathrm{N}, \\ \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varphi} &= \quad k\sqrt{p}\sin o.r\mathrm{N}, \\ \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varepsilon} &= \quad ka^{\frac{3}{2}}e\sin v.\mathrm{L} + ka^{\frac{3}{2}}\frac{p}{r}\mathrm{M}. \end{aligned}$$

Le seul calcul qui exige quelque réduction est celui de $\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial \Omega}$. On trouve d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \Omega} = k^2 m_1 r\mathrm{K}[&-\eta' + r'\cos o\cos\beta'\sin(\lambda'-\Omega) \\ &- r\sin o\cos\beta'\cos(\lambda'-\Omega)\cos\varphi]. \end{aligned}$$

En introduisant dans le multiplicateur de $k^2 m_1 r\mathrm{K}$, à la place de β' et λ', les coordonnées B' et L' au moyen des équations (2) résolues par rapport à $\cos\beta'\cos(\lambda'-\Omega)$ et $\cos\beta'\sin(\lambda'-\Omega)$, ce multiplicateur devient

$$-\eta' + \eta'\cos\varphi - \zeta'\cos o\sin\varphi,$$

ce qui donne immédiatement le résultat ci-dessus.

La substitution de ces dérivées partielles dans les équations de Lagrange donne les équations définitives

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dn}{dt} &= 2a^2 e \sin v.\mathrm{L} + 2a^2 \frac{p}{r}\mathrm{M},\\
\frac{d\psi}{dt} &= a\cos\psi \sin v.\mathrm{L} + a\cos\psi(\cos v + \cos \mathrm{E})\mathrm{M},\\
\frac{d\omega}{dt} &= \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\sin o.r\mathrm{N} - \frac{p}{e}\cos v.\mathrm{L} + \frac{\sin v}{e}(r+p)\mathrm{M},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= r\cos o\,\mathrm{N},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r\sin o}{\sin\varphi}\mathrm{N},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \left(-2r\cos\psi - p\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\cos v\right)\mathrm{L}\\
&\quad + \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\sin v\left(1+\frac{p}{r}\right)r\mathrm{M} + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\sin o.r\mathrm{N},
\end{aligned}\right.$$

équations auxquelles il faut adjoindre, pour le calcul des coordonnées, les formules du mouvement elliptique, sauf en ce qui concerne la longitude moyenne. On a, pour cette dernière,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
l &= \varepsilon + \int n\,dt,\\
&= \varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t}\frac{d\varepsilon}{dt}dt + \int_{t_0}^{t}\left[n_0 + \int_{t_0}^{t}\frac{dn}{dt}dt\right]dt\\
&= \varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t}\frac{d\varepsilon}{dt}dt + n_0(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t}\frac{dn}{dt}\,dt.
\end{aligned}\right.$$

195. Méthode de la variation des éléments : marche des calculs numériques une fois mis en train. — Supposons que par l'application des formules ci-dessus on ait réussi à calculer les valeurs des éléments pour un certain nombre de dates $t_1 + i\theta$ équidistantes, $t_1 - \frac{\theta}{2}$ désignant l'époque t_0 d'osculation ; soient ν la dérivée $\frac{dn}{dt}$ du moyen mouvement n, f la dérivée première d'un autre élément quelconque.

Pour chaque élément on a formé un Tableau renfermant dans une colonne les valeurs de f pour toutes les époques depuis t_1

jusqu'à $t_1 + i\theta$, dans d'autres leurs différences successives et aussi les valeurs correspondantes de ${}^1f$.

Les derniers nombres obtenus dans les diverses colonnes sont

$$
(9)\quad \left\{
\begin{array}{llllll}
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
f^4[t_1+(i-3)\theta], & & f^2[t_1+(i-3)\theta], & & f[t_1+(i-3)\theta], & \\
 & f^3\left[t_1+\left(i-\frac{5}{2}\right)\theta\right], & & f^1\left[t_1+\left(i-\frac{5}{2}\right)\theta\right], & & {}^1f\left[t_1+\left(i-\frac{5}{2}\right)\theta\right], \\
f^4[t_1+(i-2)\theta], & & f^2[t_1+(i-2)\theta], & & f[t_1+(i-2)\theta], & \\
 & f^3\left[t_1+\left(i-\frac{3}{2}\right)\theta\right], & & f^1\left[t_1+\left(i-\frac{3}{2}\right)\theta\right], & & {}^1f\left[t_1+\left(i-\frac{3}{2}\right)\theta\right], \\
 & & f^2[t_1+(i-1)\theta], & & f[t_1+(i-1)\theta], & \\
 & & & f^1\left[t_1+\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta\right], & & {}^1f\left[t_1+\left(i-\frac{1}{2}\right)\theta\right], \\
 & & & & f[t_1+i\theta] & \\
 & & & & & {}^1f\left[t_1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\theta\right].
\end{array}\right.
$$

En ce qui concerne le moyen mouvement, ν remplacera f dans le Tableau précédent, mais il faudra ajouter à droite une colonne de sommation double ${}^2\nu$ et les derniers nombres des diverses colonnes seront

$$\nu^4(t_1+\overline{i-2}\,\theta),\quad \nu^3\left(t_1+\overline{i-\frac{3}{2}}\,\theta\right),\quad \nu^2(t_1+\overline{i-1}\,\theta),\quad \nu^1\left(t_1+\overline{i-\frac{1}{2}}\,\theta\right),$$
$$\nu(t_1+i\theta),\quad {}^1\nu\left(t_1+\overline{i+\frac{1}{2}}\,\theta\right),\quad {}^2\nu(t_1+\overline{i+1}\,\theta).$$

Cela étant, on obtiendra la valeur approchée d'un élément quelconque à la date $t_1 + \overline{i+1}\,\theta$ par la formule (¹)

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_{t_1-\frac{\theta}{2}}^{t_1+\overline{i\pm1}\,\theta} &= {}^1f\left(t_1+\overline{i\pm\frac{1}{2}}\,\theta\right) \pm \frac{1}{2}f(t_1+i\theta) \\
&\quad + \frac{1}{24}\left[10f^1\left(t_1+\overline{i\mp\frac{1}{2}}\,\theta\right) \pm 9f^2(t_1+\overline{i\mp1}\,\theta)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 8f^3\left(t_1+\overline{i\mp\frac{3}{2}}\,\theta\right) \pm \ldots\right],
\end{aligned}\right.
$$

où l'on aura pris les signes supérieurs.

(¹) Nous utilisons dans ce numéro et dans les suivants plusieurs formules qui se déduisent immédiatement de la théorie des différences. Celle-ci est la seule dont la démonstration exige quelques efforts. On a en négligeant les termes en f^5,

Pour le calcul de l on aura l'intégrale double par les formules

$$(11)\quad \int_{t_1-\frac{\theta}{2}}^{t_1+\overline{i\pm 1}\theta} dt \int_{t_1-\frac{\theta}{2}}^{t} \frac{dn}{dt}\, dt = {}^2\nu(t_1+\overline{i\pm 1}\theta) + \frac{1}{12}\nu[t_1+(i\pm 1)\theta],$$

et

$$\nu(t_1+\overline{i\pm 1}\theta) = \nu(t_1+i\theta) \pm \nu^1\left(t_1+\overline{i\mp\tfrac{1}{2}}\theta\right) + \nu^2(t_1+\overline{i\mp 1}\theta) + \ldots,$$

où l'on aura encore pris les signes supérieurs.

Par l'application des valeurs trouvées, on aura des éléments approchés à la date $t_1+\overline{i+1}\theta$, au moyen desquels on pourra, par l'application des équations (7) et (8), calculer les valeurs définitives de f et ν et ajouter un terme de plus à chaque colonne des Tableaux d'interpolation.

Dans le cas où le calcul serait fait en remontant vers le passé, on prendrait dans les formules (10) et (11) les signes inférieurs.

Il est encore à remarquer que les équations (7), si l'on y met pour k la valeur 0,017... de la constante de Gauss, supposent que l'unité de temps soit le jour moyen. Il est commode de regarder

---

par la dernière formule du n° 193,

$$\int_{t_1-\frac{\theta}{2}}^{t_1+\overline{i+1}\theta} = {}^1f(t_1+\overline{i+1}\theta) - \frac{1}{12} f^1(t_1+\overline{i+1}\theta).$$

Les relations évidentes

$${}^1f(t_1+\overline{i+1}\theta) = \frac{1}{2}\,{}^1f\left(t_1+\overline{i+\tfrac{1}{2}}\theta\right) + \frac{1}{2}\,{}^1f\left(t_1+\overline{i+\tfrac{3}{2}}\theta\right),$$

$$f^1(t_1+\overline{i+1}\theta) = \frac{1}{2} f^1\left(t_1+i+\tfrac{1}{2}\theta\right) + \frac{1}{2} f^1\left(t_1+i+\tfrac{3}{2}\theta\right),$$

$${}^1f\left(t_1+\overline{i+\tfrac{3}{2}}\theta\right) = {}^1f\left(t_1+\overline{i+\tfrac{1}{2}}\theta\right) + f(t_1+i\theta) + f^1\left(t_1+\overline{i-\tfrac{1}{2}}\theta\right) + f^2(t_1+i-1)\theta + f^3\left(t_1+\overline{i-\tfrac{1}{2}}\theta\right)$$

$$f^1\left(t_1+\overline{i+\tfrac{1}{2}}\theta\right) = f^1\left(t_1+i-\tfrac{1}{2}\theta\right) + f^2(t_1+\overline{i-1}\theta) + f^3\left(t_1+i-\tfrac{3}{2}\theta\right),$$

$$f^1\left(t_1+i+\tfrac{3}{2}\theta\right) = f^1\left(t_1+i-\tfrac{1}{2}\theta\right) + 2f^2(t_1+i-1\theta) + 3f^3\left(t_1+i-\tfrac{3}{2}\theta\right)$$

donnent immédiatement la formule (10) dans le cas des signes supérieurs, et des formules analogues s'appliquent au cas des signes inférieurs.

l'unité de temps comme étant θ; il faut alors multiplier k par θ. Dans le calcul de l'intégrale double il faudra introduire une seconde fois le facteur θ. Dans un grand nombre de cas, pour les petites planètes, on prend $\theta = 40$ jours.

196. Méthode de la variation des éléments. Mise en train du calcul. — Au début du calcul on choisit un nombre limité d'époques, quatre par exemple, séparées par des intervalles égaux à θ et symétriques par rapport à l'époque d'osculation. A ces quatre dates on peut regarder les perturbations comme nulles. En fait, elles sont de petites quantités de deuxième ordre, et en les négligeant dans le calcul des seconds membres des équations (7) on ne produit sur les valeurs qui s'en déduisent que des erreurs du troisième ordre. On obtient pour une dérivée f quatre valeurs dont on forme les différences des trois premiers ordres. On écrit, en outre, que l'intégrale de f s'annule à l'époque de l'osculation par la formule

$$ {}^{1}f\left(t_1-\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{24} f^1\left(t_1-\frac{\theta}{2}\right) + \frac{17}{5760} f^3\left(t_1-\frac{\theta}{2}\right), $$

et de même pour l'intégrale double de ν

$$ {}^{2}\nu(t_1) = \frac{1}{24}\nu(t_1-\theta) - \frac{17}{5760}[2\nu^2(t_1-\theta)+\nu^2(t_1)]. $$

On peut au moyen de ces valeurs initiales calculer cinq valeurs de ${}'f$ et six valeurs de ${}^2\nu$; on obtient aussi les intégrales relatives à ces quatre dates par les formules

$$ \int_{t_1-\frac{\theta}{2}}^{t_1+i\theta} = {}^{1}f(t_1+i\theta) - \frac{1}{12} f'(t_1+i\theta), $$

$$ \int\int_{t_1-\frac{\theta}{2}}^{t_1+i\theta} = {}^{2}f(t_1+i\theta) + \frac{1}{12}\, f(t_1+i\theta). $$

De ces valeurs on déduit des éléments osculateurs suffisamment approchés pour les quatre dates et l'on emploie ces éléments comme bases d'un nouveau calcul définitif. On n'oublie pas de multiplier par θ l'intégrale double qui se trouve dans la longitude moyenne.

197. Méthode d'Encke. — Équations. — Désignons, à une date quelconque, par x, y, z les coordonnées rectangulaires de l'astre, par x_0, y_0, z_0 les coordonnées calculées par les formules du mouvement elliptique au moyen des éléments osculateurs à la date initiale et posons

$$x - x_0 = \xi, \qquad y - y_0 = \eta, \qquad z - z_0 = \zeta;$$

les perturbations ξ, η, ζ des coordonnées rectangulaires satisferont aux équations différentielles

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum\left[k^2 m'\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + k^2(1+m)\left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right)\right],$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum\left[k^2 m'\left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) + k^2(1+m)\left(\frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r_3}\right)\right],$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum\left[k^2 m'\left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) + k^2(1+m)\left(\frac{z_0}{r_3^0} - \frac{z}{r^3}\right)\right],$$

ρ ayant la même signification qu'au n° 194.

Les coordonnées x', y', z', r' se déduiront par des formules connues des données des éphémérides astronomiques.

Les premiers termes des seconds membres sont petits à cause du facteur m', et si, dans ces termes, on remplaçait x, y, z par x_0, y_0, z_0, l'erreur commise serait, à cause du facteur m', de l'ordre du carré des perturbations. Les seconds termes sont également petits et de l'ordre des perturbations; mais si l'on y remplaçait x, y, z par x_0, y_0, z_0, ce qui les ferait disparaître, l'erreur serait de l'ordre des perturbations. Nous désignerons les termes de la première sorte par le symbole (a), ceux de la seconde par le symbole (b). Nous ne négligerons d'ailleurs les perturbations ni dans les termes (b), ni dans les termes (a). Les méthodes de quadrature mécanique ne s'appliquant qu'aux petites planètes, nous remplacerons $1 + m$ par un.

Les termes (b) ne peuvent se calculer commodément sans une transformation qui y introduise un petit facteur; on y parvient comme il suit : on a

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}\left[\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)x - \xi\right].$$

On a aussi

$$r^2 = r_0^2 + (2x_0 + \xi)\xi + (2y_0 + \eta)\eta + (2z_0 + \zeta)\zeta,$$

d'où

$$\frac{r_0^3}{r^3} = (1+2q)^{-\frac{3}{2}},$$

en posant

$$r_0^2 q = \left(x_0 + \frac{\xi}{2}\right)\xi + \left(y_0 + \frac{\eta}{2}\right)\eta + \left(z_0 + \frac{\zeta}{2}\right)\zeta.$$

Si l'on pose encore

$$\frac{1}{3}f = 1 - \frac{5}{2}q + \frac{5.7}{2.3}q^2 - \frac{5.7.9}{2.3.4}q^3 + \ldots;$$

les termes (b) prennent la forme

$$\frac{k^2}{r_0^3}(fqx - \xi), \quad \frac{k^2}{r_0^3}(fqy - \eta), \quad \frac{k^2}{r_0^3}(fqz - \zeta).$$

Encke a publié au t. XXXIV des *Astr. Nachrichten* une Table qui donne avec six décimales pour les valeurs de q de $-0{,}021$ à $+0{,}021$ les valeurs de $\log f$. L'usage de cette Table permet de former commodément les seconds membres des équations différentielles des perturbations qui, si l'on pose

$$\frac{k^2}{r_0^3} = h,$$

$$\sum k^2 m'\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) = \mathrm{X},$$

$$\sum k^2 m'\left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) = \mathrm{Y},$$

$$\sum k^2 m'\left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) = \mathrm{Z},$$

s'écrivent

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + h\xi = \mathrm{X} + hfqx,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + h\eta = \mathrm{Y} + hfqy,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + h\zeta = \mathrm{Z} + hfqz.$$

198. Méthode d'Encke : marche des calculs numériques une fois mis en train. — Les calculs de ξ, η, ζ doivent être menés parallèlement, mais la marche des calculs est la même pour les trois axes de coordonnées ; nous n'expliquerons donc les calculs à faire que pour la perturbation ξ de la coordonnée x.

Supposons, comme nous l'avons fait pour la méthode de la variation des éléments, que le calcul soit déjà en train et que l'on ait obtenu les valeurs f de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ pour toutes les dates t_1, $t_1+\theta$, $t_1+2\theta$, jusqu'à $t_1+i\theta$ et formé en même temps les différences successives $f^1, f^2, \ldots$, ainsi que les valeurs sommatoires ${}^1f$, ${}^2f$. Les derniers termes obtenus dans chaque colonne sont

$$\ldots,\quad f^2(t_1+\overline{i-1}\,\theta),\quad f^1\left(t_1+\overline{i-\tfrac{1}{2}}\,\theta\right),$$
$$f(t_1+i\theta),\quad {}^1f\left(t_1+\overline{i+\tfrac{1}{2}}\,\theta\right),\quad {}^2f(t_1+\overline{i+1}\,\theta).$$

Pour la date $t_1+(i+1)\theta$, on a

$$\begin{aligned}\xi &= \int\!\!\int_{t_1-\frac{\theta}{2}}^{t_1+\overline{i+1}\,\theta}\\ &= {}^2f(t_1+\overline{i+1}\,\theta)+\frac{1}{12}f(t_1+\overline{i+1}\,\theta)-\frac{1}{240}f^2(t_1+\overline{i+1}\,\theta)\ldots.\end{aligned}$$

Or

$$f(t_1+\overline{i+1}\,\theta)=\frac{d^2\xi}{dt^2}=X-h\xi+hfqx,$$

d'où approximativement

$$\xi\left(1+\frac{h}{12}\right)=\frac{1}{12}hfqx+{}^2f(t_1+\overline{i+1}\,\theta)+\frac{1}{12}X-\frac{1}{240}f^2(t_1+\overline{i+1}\,\theta),$$

ou, en posant

$$S_x={}^2f(t_1+\overline{i+1}\,\theta)+\frac{1}{12}X-\frac{1}{240}f^2(t_1+\overline{i+1}\,\theta),$$

$$\xi=\frac{S_x+\frac{h}{12}fqx}{1+\frac{h}{12}}.$$

En portant cette valeur et les valeurs correspondantes de η et ζ dans la valeur de q, on obtient

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{h}{12}\right)r_0^2q &= \left(x_0+\frac{\xi}{2}\right)\left(S_x+\frac{h}{12}fqx\right)\\ &\quad+\left(y_0+\frac{\eta}{2}\right)\left(S_y+\frac{h}{12}fqy\right)+\left(z_0+\frac{\zeta}{2}\right)\left(S_z+\frac{h}{12}fqz\right),\end{aligned}$$

d'où

$$q = \frac{\left(x_0+\frac{\xi}{2}\right)S_x+\left(y_0+\frac{\eta}{2}\right)S_y+\left(z_0+\frac{\zeta}{2}\right)S_z}{\left(1+\frac{h}{12}\right)r_0^2-\left(x_0+\frac{\xi}{2}\right)\frac{h}{12}fx-\left(y_0+\frac{\eta}{2}\right)\frac{h}{12}fy-\left(z_0+\frac{\zeta}{2}\right)\frac{h}{12}fz},$$

ou, en posant, pour abréger,

$$\frac{x_0+\frac{\xi}{2}}{r_0^2\left(1+\frac{h}{12}\right)}=a,\qquad \frac{y_0+\frac{\eta}{2}}{r_0^2\left(1+\frac{h}{12}\right)}=b,\qquad \frac{z_0+\frac{\zeta}{2}}{r_0^2\left(1+\frac{h}{12}\right)}=c,$$

$$q=\frac{aS_x+bS_y+cS_z}{1-\frac{fh}{12}(ax+by+cz)}.$$

Le calcul approché de q par cette formule est aisé. La pratique montre que le logarithme du dénominateur a une marche fort régulière de sorte que ce logarithme se déduit de suite, par extrapolation, des valeurs qu'il avait aux dates précédentes. Le calcul de a, b, c, S_x, S_y, S_z n'est pas moins facile; ${}^2f(t_1+\overline{i+1}\,\theta)$ est connu par les calculs antérieurs; on aura $f^2(t_1+\overline{i+1}\,\theta)$ par une extrapolation sommaire toujours assez précise à cause de la petitesse de f^2 et de celle du facteur $\frac{1}{240}$; le calcul de X, Y, Z, a, b, c exige des valeurs approchées de ξ, η, ζ; on aura celle de ξ par la formule

$$\xi = {}^2f(t_1+\overline{i+1}\,\theta)+\frac{1}{12}\,f(t_1+\overline{i+1}\,\theta)$$

où $f(t_1+\overline{i+1}\,\theta)$ sera donné par extrapolation; on obtiendra η, ζ par des formules analogues.

La valeur de q une fois connue, on en déduit celle de f par la Table d'Encke, après quoi, posant

$$\frac{h}{1+\frac{h}{12}}=h',$$

on a

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=X+hfqx-h\xi=X+hfqx-h'S_x-h\frac{\frac{h}{12}}{1+\frac{h}{12}}fqx,$$

ou, en simplifiant, et écrivant les équations semblables pour η et ζ,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + h'(fqx - S_x).$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + h'(fqy - S_y),$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z + h'(fqz - S_z).$$

Ces formules donneront pour la date $t_1 + \overline{i+1}\,\theta$ les valeurs des dérivées secondes cherchées, au moyen desquelles on ajoutera un nombre à chaque colonne du Tableau des différences relatives à chaque coordonnée.

199. Méthode d'Encke. Mise en train du calcul. — Au début du calcul, on ne peut ni calculer les termes (b), ni évaluer exactement les termes (a). On néglige les termes (b) et dans les termes (a) on remplace x, y, z par x_0, y_0, z_0. On obtient ainsi des valeurs provisoires de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. On calcule de telles valeurs pour un petit nombre d'époques, quatre par exemple, équidistantes et symétriques par rapport à l'époque d'osculation.

On forme le Tableau des quatre valeurs de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, de leurs différences, premières f^1, deuxièmes f^2 et troisième f^3. Comme on veut que $\frac{d\xi}{dt}$ et ξ soient nuls à l'époque d'osculation, on détermine une valeur initiale de ${}^1f$ et une valeur initiale de ${}^2f$ par les formules

$$ {}^1f\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{24} f^1\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right) + \frac{17}{5760} f^3\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right),$$

$$ {}^2f(t_1 - \theta) = \frac{1}{24} f(t_1 - \theta) - \frac{17}{5760}[f^2(t_1) + 2f^2(t_1 - \theta)],$$

et, ces valeurs initiales obtenues, on forme cinq valeurs de ${}^1f$ et six de ${}^2f$.

Ce tableau formé, on calcule pour chacune des quatre dates

$$S_x = {}^2f(t_1 + i\theta) + \frac{1}{12} X - \frac{1}{240} f^2(t_1 + i\theta),$$

le dernier terme s'obtenant, s'il est nécessaire, par extrapolation;

on en fait autant pour η et S_y, ζ et S_z; on calcule a, b, c en y remplaçant ξ, η, ζ par zéro et q en y remplaçant x, y, z par x_0, y_0, z_0. De la valeur de q on déduit celle de f, et on reprend le calcul des dérivées secondes

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + h'(fqx - S_x),$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + h'(fqy - S_y),$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z + h'(fqz - S_y),$$

où l'on remplace encore x, y, z par x_0, y_0, z_0.

Ces nouvelles valeurs étant obtenues pour les quatre dates, on forme de nouveau le tableau des différences f^1, f^2, f^3 et aussi des sommes ${}^1f$, ${}^2f$, en déterminant à nouveau les valeurs initiales de ces dernières sommes, après quoi le calcul est en train.

200. Méthode de Hansen et Tietjen. Point de départ. — Nous prendrons comme point de départ les équations D du Chapitre (XI). Si nous remplaçons dans ces équations Ω par

$$k^2\frac{1+m}{r} + \sum k^2 m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right),$$

nous obtenons immédiatement les dérivées partielles $\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \frac{\partial\Omega}{\partial z}$, et par suite les composantes P, T, S de la force accélératrice sous la forme

$$P = -\frac{k^2(1+m)}{r^3}\rho + \sum k^2 m'\left[\frac{-\rho}{\Delta^3} + (x'\cos v + y'\sin v)\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right],$$

$$T = \sum k^2 m'(y'\cos v - x'\sin v)\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

$$S = -k^2\frac{1+m}{r^3}z + \sum k^2 m'\left[-\frac{z}{\Delta^3} + z'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right].$$

Désignant par r', L', B' les coordonnées polaires d'une planète perturbatrice, nous avons

$$x' = r'\cos B'\cos L', \qquad y' = r'\cos B'\sin L', \qquad z' = r'\sin B',$$

et les équations (D) deviennent

$$\rho^2 \frac{dv}{dt} = \text{const.} + \int \sum k^2 m' \rho r' \cos B' \sin(L' - v) . K\, dt,$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \frac{dv^2}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)\rho}{r^3} = \sum k^2 m' r' \cos B' \cos(L' - v) . K - \sum k^2 m' \frac{\rho}{\Delta^3},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} = \sum k^2 m' r' \sin B' . K - \sum \frac{k^2 m' z}{\Delta^3},$$

où l'on a posé

$$K = \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}.$$

Il reste à éliminer r des équations précédentes. On a à cet effet

$$r^2 = \rho^2 + z^2,$$

d'où

$$r^{-3} = \rho^{-3}\left[1 + \frac{z^2}{\rho^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \rho^{-3} - \frac{3}{2}\frac{z^2}{\rho^5}\frac{f}{3},$$

en posant

$$\frac{z^2}{2\rho^2} = q$$

et désignant par f la même fonction de q que dans le numéro précédent.

D'autre part, si l'on suppose que le plan fondamental soit le plan de l'orbite non troublée et que l'intégrale qui figure à la première équation s'annule à l'époque d'osculation, la constante est égale à $k\sqrt{p_0}$ et les trois équations s'écrivent

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} \rho^2 \dfrac{dv}{dt} = k\sqrt{p_0} + \displaystyle\int U\, dt, \\ \dfrac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \dfrac{dv^2}{dt^2} + \dfrac{k^2}{\rho^2} = \rho H_2, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} + z\left[\dfrac{k^2}{\rho^3} + \displaystyle\sum \dfrac{k^2 m'}{\Delta^3}\right] = W_0, \end{cases}$$

les valeurs de U, H_2, W_0 résultant immédiatement de ce qui précède.

201. Méthode de Hansen et Tietjen. Introduction d'inconnues assimilables à des perturbations. — Nous avons pris comme plan fondamental le plan de l'orbite non troublée. Nous supposerons que l'axe des x passe par le nœud de cette orbite sur l'écliptique

fixe auquel les éléments de cette orbite sont rapportés. L'angle v est alors la longitude dans le plan fondamental; désignons par ω_0 la longitude du périhélie dans l'orbite non troublée et par V une fonction de t satisfaisant à la relation

$$\rho^2 \frac{dV}{dt} = k\sqrt{p_0},$$

d'où

$$V = k\sqrt{p_0}\int \frac{dt}{\rho^2};$$

supposons qu'à l'époque initiale V soit égal à $v - \omega_0$; nous aurons, en intégrant la première équation (E),

$$\text{(I)} \qquad v = V + \omega_0 + \Delta\omega$$

en définissant le symbole $\Delta\omega$, nul à l'époque initiale, par la relation

$$\text{(II)} \qquad \frac{d\,\Delta\omega}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\int U\,dt.$$

Nous conserverons définitivement ces équations (I) et (II).

V a quelque analogie avec une anomalie vraie. Nous déterminerons une inconnue M analogue à l'anomalie moyenne liée à V par les équations ordinaires du mouvement elliptique

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} E - e_0 \sin E = M = M_0 + \mu_0 t + \Delta M, \\ \rho' \sin V = a_0 \cos\psi_0 \sin E, \\ \rho' \cos V = a_0(\cos E - e_0), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$e_0 = \sin\psi_0$$

et désigné par ΔM la différence $M - M_0 - \mu_0 t$, et par ρ' un rayon vecteur qui n'est pas égal à ρ, mais qui n'en diffère que de quantités de l'ordre des perturbations. Pour ce motif, nous poserons encore

$$\rho = \rho'(1 + \nu)$$

et nous allons former les équations différentielles qui feront connaître ΔM et ν.

L'équation en ΔM sera une simple transformation de l'équation (I) ou de la première équation (E).

On a

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 + \frac{d\,\Delta M}{dt},$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dM}\frac{dM}{dt} = \frac{dV}{dE}\frac{dE}{dM}\frac{dM}{dt} = \frac{a_0 \cos\psi_0}{\rho'}\frac{a_0}{\rho'}\left(\mu_0 + \frac{d\,\Delta M}{dt}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\mu_0^2 a_0^3 = k^2.$$

Portant la valeur de $\frac{dV}{dt}$ dans la définition de V, nous trouvons

$$\frac{k\sqrt{p_0}}{\rho'^2(1+\nu)^2} = \frac{k\sqrt{p_0}}{\mu_0 \rho'^2}\left(\mu_0 + \frac{d\,\Delta M}{dt}\right),$$

d'où

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d\,\Delta M}{dt} = \left[\frac{1}{(1+\nu)^2} - 1\right]\mu_0 = -\,\mu_0 \frac{\nu}{1+\nu}\left(1 + \frac{1}{1+\nu}\right).$$

Quant à l'équation en ν, elle doit se déduire de la seconde équation (E).

On a

$$\rho = \frac{p_0(1+\nu)}{1+e_0\cos V},$$

d'où, en observant que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{k\sqrt{p_0}}{\rho^2},$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{1+\nu}\frac{d\nu}{dt} + \frac{k e_0 \sin V}{(1+\nu)\sqrt{p_0}}.$$

Différentiant une seconde fois,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{\rho}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dt^2} - \frac{\rho}{(1+\nu)^2}\frac{d\nu^2}{dt^2}$$
$$+ \frac{1}{1+\nu}\frac{d\nu}{dt}\frac{d\rho}{dt} + \frac{k e_0 \cos V}{(1+\nu)\sqrt{p_0}}\frac{dV}{dt} - \frac{k e_0 \sin V}{(1+\nu)^2\sqrt{p_0}}\frac{d\nu}{dt},$$

ou

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{\rho}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k e_0 \cos V}{(1+\nu)\sqrt{p_0}}\frac{dV}{dt}$$
$$+ \frac{d\nu}{dt}\left[-\frac{\rho}{(1+\nu)^2}\frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{1+\nu}\frac{d\rho}{dt} - \frac{k e_0 \sin V}{(1+\nu)^2\sqrt{p_0}}\right].$$

D'après la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ que l'on vient de trouver, le coefficient de $\frac{d\nu}{dt}$ est nul, et l'on a

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \rho' \frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2}{\rho^2}\left[-\frac{1}{1+\nu} + \frac{p_0}{\rho}\right].$$

Substituant dans la seconde équation (E), où l'on remplacera aussi $\frac{dv}{dt}$ par $\frac{dV}{dt} + \frac{d\Delta\omega}{dt}$, on trouve

$$\text{(V)} \qquad \frac{d^2\nu}{dt^2} + \left(\frac{k^2}{\rho^3} - H_2 - H_1\right)\nu = H_2 + H_1,$$

en posant

$$H_1 = \frac{2k\sqrt{p_0}}{\rho^4}\left[1 + \frac{1}{2k\sqrt{p_0}}\int U\,dt\right]\int U\,dt.$$

A ces équations nous adjoindrons la troisième équation (E),

$$\text{(VI)} \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + \left[\frac{k^2}{\rho^3} + \sum\frac{k^2 m'}{\Delta^3}\right]z = W_0.$$

Les équations (I) à (VI) sont les équations définitives de la méthode de Hansen et Tietjen ([1]).

202. Méthode de Hansen. Marche des calculs numériques une fois mis en train. — Admettons que, jusqu'à la date $t_1 + i\theta$, on ait calculé les valeurs f de $\frac{d\Delta\omega}{dt}$, $\frac{d\Delta M}{dt}$, $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ et formé pour ces quatre séries de valeurs les tableaux des différences, pour les deux premières les valeurs sommatoires ${}^1f$, pour les dernières les valeurs sommatoires ${}^1f$, ${}^2f$. On se propose de calculer les mêmes nombres pour la date $t_1 + (i+1)\theta$.

Nous désignerons, pour abréger, par φ_{i+1} la valeur $\varphi[t_1 + (i+1)\theta]$.

On a approximativement

$$\nu_{i+1} = {}^2f(t_1 + \overline{i+1}\,\theta) + \frac{1}{12}f(t_1 + \overline{i+1}\,\theta) - \frac{1}{240}f^2(t_1 + \overline{i+1}\,\theta)$$

On obtient la valeur du deuxième terme par extrapolation; le troisième est généralement négligeable.

On a z_{i+1} par la même formule.

On a par la formule (10)

$$\Delta M_{i+1} = {}^1f\left(t_1 + \overline{i + \frac{1}{2}}\,\theta\right) + \frac{1}{2}f(t_1 + i\theta)$$
$$+ \frac{1}{24}\left[10f^1\left(t_1 + \overline{i - \frac{1}{2}}\,\theta\right) + 9f^2(t_1 + \overline{i-1}\,\theta) + 8f^3\left(t_1 + \overline{i - \frac{3}{2}}\,\theta\right)\right].$$

([1]) Nous avons adopté la plupart des notations employées dans le *Traité des orbites* d'Oppolzer.

On trouve $\Delta\omega_{i+1}$ par la même formule.

Ayant ces valeurs, on peut appliquer à la date $t_1 + \overline{i+1}\,\theta$ les formules successives (I) à (VI). L'intégrale $\int U\,dt$ s'obtient par la formule

$$\int_{t_1-\frac{\theta}{2}}^{t_1+(i+1)\theta} f(x)\,dx$$
$$= {}^1f(t_1+\overline{i+1}\,\theta) - \frac{1}{12}f^1(t_1+\overline{i+1}\,\theta) + \frac{11}{720}f^3(t_1+\overline{i+1}\,\theta).$$

où les valeurs employées sont des moyennes arithmétiques.

La valeur de f^3 à cause du petit facteur $\frac{11}{720}$ s'obtient par extrapolation à vue; la valeur de f^1 par une des formules suivantes

$$f^1(t_1+\overline{i\pm1}\,\theta)$$
$$= f^1\left(t_1+\overline{i\pm\frac{1}{2}}\,\theta\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left[f^2(t_1+i\theta)\pm f^3\left(t_1+\overline{i\mp\frac{1}{2}}\,\theta\right)+f^4(t_1+\overline{i\mp1}\,\theta)\ldots\right]$$

L'application des autres formules n'exige pas d'explication, sauf en ce qui concerne le calcul de $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ et de $\frac{d^2z}{dt^2}$, dont nous allons nous occuper.

A l'égard de ν et z, observons que ces quantités satisfont à des équations de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}+px = P.$$

On a

$$x_{i+1} = {}^2f(t_1+\overline{i+1}\,\theta) + \frac{1}{12}f(t_1+\overline{i+1}\,\theta) - \frac{1}{240}f^2(t_1+\overline{i+1}\,\theta).$$

Comme on a

$$f(t_1+\overline{i+1}\,\theta) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{i+1} = P - px_{i+1},$$

on a aussi

$$x_{i+1}\left(1+\frac{p}{12}\right) = {}^2f(t_1+\overline{i+1}\,\theta) + \frac{1}{12}P - \frac{1}{240}f^2[t_1+(i+1)\theta].$$

Désignant par S_p le second membre, on aura

$$x_{i+1} = \frac{S_p}{1 + \frac{p}{12}}$$

et, par suite,

$$f(t_1 + \overline{i+1}\,\theta) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{i+1} = P - \frac{p}{1 + \frac{p}{12}} S_p.$$

Cette formule s'applique telle quelle au calcul de $\frac{d^2z}{dt^2}$ et à celui de $\frac{d^2\nu}{dt^2}$.

203. Méthode de Hansen-Tietjen. Mise en train du calcul. — Pour les quatre premières dates on fait $\nu = 0$, $z = 0$, $\Delta\omega = 0$, $\Delta M = 0$.

On calcule d'abord U pour ces quatre dates, et on forme le tableau des différences. On calcule ensuite la quantité sommatoire ${}^1f$ en déterminant les valeurs initiales par la condition que $\int U\,dt$ s'annule à l'époque d'osculation. On a, à cet effet,

$${}^1f\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{24} f^1\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right) + \frac{17}{5760} f^3\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right),$$

puis on a

$$\int_{t_1 - \frac{\theta}{2}}^{t_1 + i\theta} f(x)\,dx = {}^1f(t_1 + i\theta) - \frac{1}{12} f^1(t_1 + i\theta) + \frac{11}{720} f^3(t_1 + i\theta).$$

Les nombres qui figurent au second membre de la dernière formule sont des moyennes arithmétiques; on en trouve la valeur comme au numéro précédent. On s'occupe ensuite du calcul de ν et de celui de z. Reprenons à cet effet l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = P,$$

et ce que nous dirons de x s'appliquera à ν et z.

Soient p_{-2}, P_{-2}; p_{-1}, P_{-1}; p_0, P_0; p_1, P_1 les valeurs de p et P qui correspondent aux quatre dates. Supposons x développé en série de la forme

$$x = \tau + \tau' t + \alpha t^2 + \beta t^3 + \ldots.$$

le temps t étant compté depuis la date moyenne et l'unité de temps étant l'intervalle entre deux dates successives.

Pour $t = 0$, époque d'osculation, x et $\frac{dx}{dt}$ sont nuls puisque les coordonnées et leurs dérivées premières ont les mêmes valeurs dans le mouvement troublé et dans le mouvement elliptique. Donc τ et τ' sont nuls. On a de même

$$P = A + Bt + Ct^2 + \ldots,$$
$$p = a + bt + ct^2 + \ldots;$$

on formera pour P (et de même pour p) le tableau des différences

$$\begin{array}{llll}
P_{-2}, & & & \\
 & f^1\left(t_1 - \frac{3\theta}{2}\right), & & \\
P_{-1}, & & f^2(t_1 - \theta), & \\
 & f^1\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right), & & f^3\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right), \\
P_0, & & f^2(t_1), & \\
 & f^1\left(t_1 + \frac{\theta}{2}\right), & & \\
P_1, & & &
\end{array}$$

et l'on en conclura (t. I, p. 248, form. 34)

$$A = \frac{1}{2}(P_{-1} + P_0) - \frac{1}{16}[f^2(t_1 - \theta) + f^2(t_1)],$$
$$B = f^1\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{24} f^3\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right),$$
$$C = \frac{1}{4}[f^2(t_1 - \theta) + f^2(t_1)],$$
$$D = \frac{1}{6} f^3\left(t_1 - \frac{\theta}{2}\right).$$

En ce qui concerne a, b, ... on aura des formules semblables, mais pratiquement c, d seront négligeables.

En portant les valeurs de x, $\frac{d^2x}{dt^2}$, p, P dans l'équation différentielle, on obtient

$$\alpha = \frac{A}{2}, \quad \beta = \frac{B}{6}, \quad \gamma = \frac{1}{12}\left(C - \frac{aA}{2}\right), \quad \delta = \frac{1}{20}\left(D - \frac{aB}{6} - \frac{bA}{2}\right).$$

Dans la valeur de x ainsi obtenue, on fera $t = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$; on aura ainsi les quatre valeurs de x et l'on en déduira celles de $\frac{d^2x}{dt^2}$ en calculant $P - px$.

On aura ainsi la mise en train du calcul de ν et de z et en outre, pour ces quatre premières dates, les valeurs de ν et de z.

On détermine ensuite les valeurs de

$$\frac{d\,\Delta M}{dt} = -\mu_0 \nu \frac{1}{1+\nu}\left(1+\frac{1}{1+\nu}\right),$$

dont le calcul est bien facilité par l'emploi des logarithmes d'addition. On forme le tableau des différences des quatre valeurs f de $\frac{d\,\Delta M}{dt}$ et aussi le tableau des valeurs sommatoires ${}^1f$ en prenant pour valeur initiale

$${}^1f\left(t_1-\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{24}f^1\left(t_1-\frac{\theta}{2}\right)+\frac{17}{5760}f^3\left(t_1-\frac{\theta}{2}\right).$$

On opère de même pour $\frac{d\,\Delta\omega}{dt}$, en ne négligeant pas d'en diviser la valeur par $\sin 1''$ pour que $\Delta\omega$ soit exprimée en secondes d'arc.

204. Calcul des éléments osculateurs à une date donnée. — Le calcul des perturbations par la méthode de la variation des constantes est assurément plus long que le calcul des perturbations des coordonnées rectangulaires ou des coordonnées polaires. Mais il offre l'avantage de pouvoir être poursuivi en quelque sorte indéfiniment, et la régularité de la marche des résultats obtenus permet de reconnaître presque immédiatement les fautes de calcul que l'on doit regarder comme inévitables. La méthode d'Encke est la plus courte; mais les perturbations grandissent rapidement et la marche des différences devient promptement irrégulière, de sorte que l'on ne peut bientôt plus avoir confiance dans l'exactitude des résultats. Il faut alors déduire des valeurs obtenues de nouveaux éléments osculateurs à une date voisine des dernières dates auxquelles on est parvenu, et, au moyen de ces nouveaux éléments, reprendre l'application de la méthode. C'est un assez grave inconvénient qui se produit aussi, dans l'application de la méthode de Hansen-Tietjen, mais seulement après un intervalle de temps considérable. Cet inconvénient n'existe pas dans la méthode de la variation des constantes.

Les formules à appliquer pour obtenir les éléments osculateurs à une date dans le voisinage de laquelle les perturbations sont

connues résultent de l'application de formules différentes suivant que l'on a calculé les perturbations des coordonnées rectangulaires ou celles des coordonnées polaires. Nous donnerons ici, dans les deux cas, les procédés les plus rapides, tout en avertissant qu'il en est d'autres plus avantageux, dans lesquels on détermine non pas directement les valeurs des nouveaux éléments, mais les différences entre ces valeurs et celles des éléments osculateurs primitifs. Ces différences étant petites, leur calcul n'exige pas l'emploi de Tables à sept décimales.

a. Méthode d'Encke. — En ajoutant, à la date choisie, les perturbations ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ aux coordonnées non troublées x_0, y_0, z_0 et aux composantes $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ de la vitesse non troublée, on obtient les coordonnées troublées x, y, z et les composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de la vitesse troublée. On calcule ensuite la longitude Ω du nœud, l'inclinaison i de l'orbite, le paramètre p par les relations

$$k\sqrt{p}\cos i = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt},$$

$$k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt},$$

$$k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega = x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt},$$

apres quoi, le rayon vecteur r et l'argument u de la latitude sont donnés par

$$r\cos u = x\cos\Omega + y\sin\Omega,$$

$$r\sin u = (y\cos\Omega - x\sin\Omega)\cos i + z\sin i.$$

La dérivée du rayon vecteur est donnée par l'équation

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt};$$

'excentricité arc $\sin\varphi$ et l'anomalie vraie le sont par les équations

$$\sin\varphi\sin v = \frac{\sqrt{p}}{k}\frac{dr}{dt},$$

$$\sin\varphi\cos v = \frac{p}{r} - 1.$$

Ayant v et φ, on détermine l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne par les formules connues, puis l'argument ω de la latitude du périhélie et la longitude de ce périhélie par

$$\omega = u - v, \qquad \varpi = \omega + \Omega.$$

Enfin, le demi grand axe est

$$a = \frac{p}{\cos^2\varphi},$$

et le moyen mouvement μ a la valeur

$$\mu = k'' a^{-\frac{3}{2}},$$

où k'' désigne la constante de Gauss, évaluée en secondes d'arc.

b. Méthode de Hansen-Tietjen. — Dans cette méthode, on a pris pour plan fondamental des coordonnées le plan de l'orbite non troublée, l'axe des x passant par le nœud ascendant de cette orbite sur l'écliptique. Soient i_1 l'inclinaison du plan de l'orbite troublée à la nouvelle date d'osculation sur le plan fondamental et K_0 la distance à l'axe des x du nœud ascendant de l'orbite troublée sur le plan de l'orbite non troublée. Les coordonnées x, y, z de la planète troublée sont respectivement

$$\rho\cos v, \quad \rho\sin v, \quad z,$$

v désignant la longitude de la planète comptée dans le plan fondamental. Par suite, le calcul des projections sur les plans des xy, des yz, des zx du double de l'aire décrite dans l'unité de temps, égales respectivement à

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}, \qquad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}, \qquad x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt},$$

donne les équations

$$k\sqrt{p}\cos i_1 = \rho^2\frac{dv}{dt},$$

$$k\sqrt{p}\sin i_1 \sin K_0 = \rho\sin v\frac{dz}{dt} - z\rho\cos v\frac{dv}{dt} - z\sin v\frac{d\rho}{dt},$$

$$k\sqrt{p}\sin i_1 \cos K_0 = \rho\cos v\frac{dz}{dt} + z\rho\sin v\frac{dv}{dt} - z\cos v\frac{d\rho}{dt}.$$

En tenant, d'autre part, compte de l'équation (I) (n° 201), on

tire de ces équations les suivantes, qui déterminent p, i_1, ω_1

$$k\sqrt{p}\cos i_1 = k\sqrt{p_0} + \int \mathrm{U}\,dt,$$

$$k\sqrt{p}\sin i_1 \sin(\mathrm{K}_0 - v) = -\frac{z}{\rho}\left(k\sqrt{p_0} + \int \mathrm{U}\,dt\right),$$

$$k\sqrt{p}\sin i_1 \cos(\mathrm{K}_0 - v) = \rho\frac{dz}{dt} - z\frac{d\rho}{dt}.$$

Dans la dernière de ces équations, figure la dérivée de ρ dont on obtient la valeur par l'équation (p. 319)

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho'\frac{dv}{dt} + \frac{ke_0 \sin \mathrm{V}}{(1+\nu)\sqrt{p_0}}.$$

Considérons le triangle sphérique qui a pour sommets les nœuds ascendants des orbites troublée et non troublée sur l'écliptique et le nœud ascendant de l'orbite troublée sur l'orbite non troublée; désignons par K la distance des nœuds ascendants de l'orbite troublée sur l'écliptique et sur l'orbite non troublée, par Ω et Ω_0 les longitudes des nœuds, par i et i_0 les inclinaisons des plans des deux orbites sur l'écliptique. Les formules de Delambre donnent, pour déterminer Ω, i, K,

$$\cos\frac{i}{2}\sin\frac{\Omega - \Omega_0 + \mathrm{K}}{2} = \sin\frac{\mathrm{K}_0}{2}\cos\frac{i_1 - i_0}{2},$$

$$\cos\frac{i}{2}\cos\frac{\Omega - \Omega_0 + \mathrm{K}}{2} = \cos\frac{\mathrm{K}_0}{2}\cos\frac{i_1 + i_0}{2},$$

$$\sin\frac{i}{2}\sin\frac{\Omega - \Omega_0 - \mathrm{K}}{2} = \sin\frac{\mathrm{K}_0}{2}\sin\frac{i_1 - i_0}{2},$$

$$\sin\frac{i}{2}\cos\frac{\Omega - \Omega_0 - \mathrm{K}}{2} = \cos\frac{\mathrm{K}_0}{2}\sin\frac{i_1 + i_0}{2}.$$

On trouve l'excentricité et l'anomalie vraie v' par les mêmes formules que dans la méthode d'Encke, en y calculant $\frac{dr}{dt}$, qui y figure, par la relation

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\rho}{r}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dt}.$$

On a ensuite l'argument de la latitude de l'astre dans le plan de l'orbite troublée, compté à partir du nœud ascendant de ce plan sur l'orbite non troublée par la formule

$$\operatorname{tang} u' = \operatorname{tang}(v - \mathrm{K}_0)\,\mathrm{séc}\, i_1.$$

puis la longitude du périhélie

$$\varpi = \Omega + K + u' - v'.$$

L'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne à la nouvelle date d'osculation, le demi grand axe et le moyen mouvement se calculent comme dans la méthode d'Encke.

205. Comparaison d'une éphéméride aux observations. — Quelle que soit la méthode de calcul des perturbations employée, on obtient finalement pour chacune des dates équidistantes les coordonnées géocentriques de la planète dans le mouvement troublé rapportées au plan fondamental, généralement l'écliptique du commencement d'une certaine année. On en conclut les coordonnées rapportées à l'équinoxe vrai pour ces mêmes dates. Le tableau de ces coordonnées est l'éphéméride de l'astre.

Il importe de comparer cette éphéméride aux résultats des observations. Si l'on trouve des différences, on devra en conclure que les éléments osculateurs primitifs, pris pour base de tout le travail, ne sont pas suffisamment exacts et doivent être corrigés. En général, les corrections seront petites et l'on pourra admettre qu'elles ne modifieraient pas les valeurs des perturbations.

S'il en est ainsi, il suffira, pour obtenir les corrections des éléments, d'utiliser les relations (41) du Chapitre VII

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} d\lambda = \mathcal{A}\, dM_0 + \mathcal{B}\, dn + \mathcal{C}\, d\varphi + \mathcal{D}\, d\varpi + \mathcal{E}\, di + \mathcal{F}\, d\Omega, \\ d\beta = \mathcal{A}'\, dM_0 + \mathcal{B}'\, dn + \mathcal{C}'\, d\varphi + \mathcal{D}'\, d\varpi + \mathcal{E}'\, di + \mathcal{F}'\, d\Omega, \end{cases}$$

dont on calculera les coefficients comme il a été indiqué dans ce Chapitre et dont les premiers membres sont les différences (observation—éphéméride). Si l'on veut éviter de déduire $d\lambda$ et $d\beta$ de $d\alpha$ et $d\delta$, il est aisé de déduire des équations (E) des équations analogues donnant directement $d\alpha$ et $d\delta$ en fonction des variations des éléments. Chaque observation donnera ainsi pour déterminer dM_0, dn, $d\varphi$, $d\varpi$, di, $d\Omega$ deux équations linéaires. On résoudra l'ensemble de toutes ces équations par la méthode des moindres carrés. Il conviendra préalablement de multiplier les différences de longitude $d\lambda$ par $\cos\beta$ en raison de ce que la différence de longitude de deux points de la sphère qui, ayant même latitude, sont à une distance constante, est en raison inverse du cosinus

de leur latitude. Si l'équation donnait $d\alpha$, on en multiplierait les deux membres par $\cos\delta$.

Il convient de remarquer aussi que l'éphéméride donne le lieu géocentrique vrai de l'astre, et l'observation (corrigée de la parallaxe), le lieu géocentrique apparent.

D'après le théorème du n° 52, on doit comparer les coordonnées observées au temps t, non pas à la position donnée par l'éphéméride au temps t, mais à la position que donne l'éphéméride pour l'instant $t-\tau$, τ désignant le temps d'aberration, c'est-à-dire le temps que la lumière a mis à venir de l'astre.

Le calcul des coordonnées à la date $t-\tau$ se fait par interpolation. Si θ désigne comme ci-dessus l'intervalle de temps qui sépare les dates consécutives de l'éphéméride, a celle de ces dates qui est la plus voisine de $t-\tau$, et que l'on pose

$$t-\tau = a \pm n\theta,$$

n étant moindre que $\frac{1}{2}$, on a

$$f(a \pm n\theta) = f(a) \pm nf^1\left(a \pm \frac{\theta}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2} f^2(a) \pm \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} f^3\left(a \pm \frac{\theta}{2}\right)\cdots,$$

les signes supérieurs se correspondant, ainsi que les signes inférieurs.

206. Lieux normaux. — Pour diminuer le nombre des équations E à résoudre par la méthode des moindres carrés, nombre qui s'élève souvent à plusieurs centaines, on groupe préalablement les observations voisines par des moyennes, comme il suit.

L'intervalle de temps qui comprend ces observations étant assez court, la différence (observation—éphéméride) relative à l'une d'elles, de date t, peut être développée en série sous la forme

$$\Delta = x + y(t-t_0) + z(t-t_0)^2 + \ldots,$$

t_0 désignant une date comprise dans l'intervalle considéré.

Si l'éphéméride est suffisamment exacte et l'intervalle des observations assez resserré, les termes qui suivent les deux premiers sont insensibles, et la détermination des coefficients x, y résulte

de la résolution des équations

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= x + y(t_1 - t_0),\\ \Delta_2 &= x + y(t_2 - t_0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \Delta_n &= x + y(t_n - t_0),\end{aligned}$$

t_1, t_2, ..., t_n étant les dates des diverses observations, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n les différences (observation—calcul) relatives à chacune d'elles. Si l'on suppose

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n},$$

la résolution des équations par la méthode des moindres carrés conduit à

$$x = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n}{n},$$

la première équation normale s'obtenant en additionnant membre à membre les équations après les avoir multipliées respectivement par leurs coefficients de x, et le coefficient de y s'annulant dans cette combinaison.

x est la valeur la plus probable de Δ à la date moyenne t_0. On remplacera pour la formation des équations (E) les n observations par une seule supposée faite à la date t_0 et conduisant pour la différence (observation—calcul) à une valeur x égale à la moyenne des différences Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n. Cette observation fictive est un lieu normal.

Si les observations avaient des poids différents p_1, p_2, ..., p_n, on aurait visiblement, pour la date t_0 donnée par la formule

$$t_0 = \frac{\Sigma p_i t_i}{\Sigma p_i},$$

la valeur suivante de la différence fictive x (observation—calcul)

$$x = \frac{\Sigma p_i \Delta_i}{\Sigma p_i}.$$

CHAPITRE XIV.

DE LA LUNE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT D'UN SATELLITE. — RÉDUCTION DES ÉQUATIONS QUI DONNENT LA LATITUDE ET LE RAYON VECTEUR A UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES. — INTÉGRATION APPROCHÉE DE CETTE ÉQUATION; APPLICATION AU CAS DE LA LUNE. — EXPRESSION DU TEMPS EN FONCTION DE LA LONGITUDE. — EXPRESSION DE LA LONGITUDE, DE LA LATITUDE ET DU RAYON VECTEUR EN FONCTION DU TEMPS. — VALEURS NUMÉRIQUES DES PRINCIPALES INÉGALITÉS OBTENUES. — INÉGALITÉ PARALLACTIQUE; INÉGALITÉ SÉCULAIRE DU MOYEN MOUVEMENT.

---

207. Apparences qu'offre le mouvement de la Lune. — Abstraction faite des variations d'aspect qu'offre le disque même de la Lune, dont nous parlerons au Chapitre XIX, une comparaison sommaire des observations de la Lune conduit immédiatement à des résultats analogues à ceux que nous a donnés l'étude des observations du Soleil. Cependant, il est impossible de ne pas apercevoir, même dans le cours d'une même révolution, que l'orbite n'est pas plane. Quand la Lune revient à son nœud ascendant sur l'équateur, ce nœud s'est déplacé de plus d'un degré. Les lois de Képler ne représentent donc pas, même grossièrement, les observations de la Lune et ne peuvent être vraiment regardées comme une approximation. Nous nous proposons d'intégrer les équations du mouvement de la Lune autour de la Terre en conservant les termes principaux de la fonction perturbatrice. Les formules que nous obtiendrons représentent ce que M. Gyldén a appelé l'*orbite intermédiaire;* l'analyse tout élémentaire exposée dans le présent Chapitre est tirée d'un Mémoire publié en 1887 par M. Tisserand à la suite des premiers travaux de M. Gyldén sur ce sujet.

208. Examen des diverses forces qui produisent le mouvement d'un satellite autour de sa planète. — Le mouvement d'un satel-

lite S d'une planète P résulte des actions qu'exercent sur ce satellite le Soleil, la planète elle-même, les autres satellites de la même planète, les autres planètes du système solaire. Le mouvement relatif du satellite S par rapport au centre de gravité de la planète P est donné par l'intégration du premier système d'équations (A) (n° **171**), où l'on doit supposer que m_0 désigne la masse de la planète P, m_1 celle du satellite S, x_1, y_1, z_1 les coordonnées rectangulaires de ce satellite par rapport à des axes passant par le centre de gravité de la planète P, R_1 la fonction perturbatrice

$$R_1 = \sum f m_i \left(\frac{1}{\Delta_{1,i}} - \frac{x_1 x_i + y_1 y_i + z_1 z_i}{r_i^3} \right).$$

Dans cette expression m_i est la masse de l'un des corps célestes énumérés ci-dessus : Soleil, satellite autre que S de la planète P, planète autre que P. x_i, y_i, z_i, r_i représentent les coordonnées rectangulaires et le rayon vecteur de ce corps céleste rapportés au centre de la planète P.

La masse du satellite S étant toujours petite par rapport à celle de la planète P, l'accélération donnée au satellite S par l'action de la planète P est de l'ordre de

$$\frac{f m_0}{r_1^2}.$$

Celle qui résulte de l'action du corps céleste de masse m_i a pour composantes suivant les trois axes

$$\frac{\partial R_1^{(i)}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial R_1^{(i)}}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial R_1^{(i)}}{\partial z_1},$$

$R_1^{(i)}$ désignant le terme de R_1 qui correspond à la planète m_i. Ces composantes sont du même ordre de grandeur. La première est

$$f m_i \left[\frac{x_i - x_1}{\Delta_{1i}^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right].$$

Si m_i désigne la masse du Soleil, le satellite S étant toujours beaucoup plus près de la planète P que du Soleil, r_i est à peu près égal à Δ_{1i} et r_1 est très petit par rapport à Δ_{1i}. Si l'on désigne par V_i l'angle sous lequel de la planète P on voit le satel-

lite S et le Soleil, on a

$$\Delta_{1i}^2 = r_i^2 + r_1^2 - 2 r_i r_1 \cos V_i,$$

d'où

$$\Delta_{1i}^{-3} = r_i^{-3}\left(1 + 3\frac{r_1}{r_i}\cos V_i + \ldots\right).$$

On en conclut

$$x_i\left(\frac{1}{\Delta_{1i}^3} - \frac{1}{r_i^3}\right) = 3 x_i \frac{r_1}{r_i^4}\cos V_i + \ldots,$$

de sorte que $x_i \cos V_i$ étant du même ordre de grandeur que r_i, l'accélération relative du satellite S due à la présence du Soleil est de l'ordre de

$$\frac{f m_i r_1}{r_i^3}.$$

Il en est de même si m_i désigne une planète autre que P.

Si m_i désigne un autre satellite de P, les coordonnées x_i, x_1, les distances r_i, Δ_i sont toutes du même ordre de grandeur et l'accélération due à la présence de ce satellite est de l'ordre de

$$\frac{f m_i}{\Delta_{1i}^2}.$$

Nous appliquerons ces considérations au quatrième satellite de Jupiter et à la Lune.

Nous considérons le quatrième satellite de Jupiter comme soumis à l'influence de Jupiter, du Soleil et du troisième satellite.

Les masses de ces quatre astres sont proportionnelles aux nombres

$$0{,}00004, \quad 1, \quad 1047{,}2, \quad 0{,}00009.$$

Les distances à Jupiter sont

$$0{,}013, \quad 5{,}2, \quad 0{,}007;$$

par suite, l'action de Jupiter sur le quatrième satellite est de l'ordre de

$$\frac{f_1}{0{,}013^2};$$

celle du Soleil de l'ordre de

$$\frac{f_1\, 1047{,}2 . 0{,}013}{5{,}2^3};$$

celle du troisième satellite de l'ordre de

$$\frac{f_1\, 0,00009}{0,013^2},$$

f_1 désignant une constante.

Divisant ces trois nombres par $\frac{f_1}{0,013^2}$, on les trouve proportionnels aux nombres

$$1, \quad 0,000002, \quad 0,00009.$$

L'action du troisième satellite est environ la dix-millième partie de celle de la planète. Dans le cours d'une demi-révolution elle peut produire sur la position du satellite un déplacement de l'ordre des minutes d'arc. Le satellite faisant vingt-deux révolutions par an, un tel déplacement, s'il se produit toujours dans le même sens, atteindra un degré au bout d'une année. C'est bien l'ordre de grandeur des inégalités de ce satellite. L'action du Soleil est beaucoup moindre; celles des planètes sont insensibles.

En ce qui concerne la Lune, nous considérerons seulement les actions de la Terre et du Soleil, dont nous supposerons les masses concentrées en leurs centres de gravité. Les masses de la Lune, de la Terre, du Soleil sont inversement proportionnelles aux nombres

$$25858000, \quad 324439, \quad 1.$$

Les moyennes distances de la Lune et du Soleil à la Terre sont proportionnelles à

$$0,0026, \quad 1.$$

L'action de la Terre sur la Lune étant donc de l'ordre de

$$\frac{f_2}{0,0026^2.324439},$$

celle du Soleil sur la Lune est de l'ordre de

$$\frac{f_2\, 0,0026}{1^3},$$

f_2 désignant une constante.

Le rapport de l'action du Soleil à l'action de la Terre est donc de l'ordre de

$$0,0026^3.324439 = 0,006.$$

Au bout d'une demi-révolution de la Lune, l'effet de la Terre ayant été un déplacement de 180°, celui de la Lune sera de l'ordre de un degré. C'est bien, comme on verra, l'ordre des écarts entre le mouvement elliptique et les résultats des observations.

Dans le présent Chapitre nous rechercherons les lois du mouvement de la Lune en tenant compte de la partie principale de l'action du Soleil. En ce qui concerne les satellites de Jupiter, nous nous bornerons, au Chapitre suivant, à donner les résultats essentiels de leur théorie.

209. Équations du mouvement du centre de la Lune autour du centre de la Terre. — Nous prendrons comme point de départ, pour déterminer le mouvement du centre de gravité de la Lune autour du centre de gravité de la Terre, les équations (C), n° 173, du Chapitre XI :

$$(C)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2u}{dv^2}+u\right)\left(1+\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{dv}{u^2}\right) \\ \qquad +\dfrac{1}{h^2u^2}\dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{du}{dv}-\dfrac{1}{h^2}\dfrac{\partial Q}{\partial u}-\dfrac{s}{h^2u}\dfrac{\partial Q}{\partial s}=0, \\ \left(\dfrac{d^2s}{dv^2}+s\right)\left(1+\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{dv}{u^2}\right) \\ \qquad +\dfrac{1}{h^2u^2}\dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{ds}{dv}-\dfrac{s}{h^2u}\dfrac{\partial Q}{\partial u}-\dfrac{1+s^2}{h^2u^2}\dfrac{\partial Q}{\partial s}=0, \\ dt=\dfrac{dv}{hu^2\sqrt{1+\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{dv}{u^2}}}. \end{cases}$$

Dans ces équations u désigne l'inverse de la projection sur le plan de l'écliptique du rayon vecteur mené du centre de la Terre au centre de la Lune, v la longitude géocentrique et s la tangente de la latitude géocentrique du centre de la Lune, Q la fonction des forces.

Nous supposerons que les seules forces en jeu soient les actions mutuelles de la Lune, du Soleil et de la Terre; que l'on ait pris pour unité de masse la somme des masses de la Terre et de la Lune, et, pour simplifier les écritures, que les unités de temps et de distances soient tellement choisies que la constante f de l'attraction universelle soit égale à un. Dans ces conditions, si m' désigne la

masse du Soleil, x, y, z les coordonnées rectangles de la Lune, x', y', z' celles du Soleil, r' son rayon vecteur mené du centre de la Terre, Δ la distance de la Terre au Soleil, on a

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right).$$

On développe Q en série en profitant de ce que le rapport $\frac{r'}{r}$ est toujours extrêmement petit. On a, à cet effet, en désignant par θ la distance angulaire du Soleil à la Lune, vue de la Terre,

$$\frac{1}{\Delta} = (r'^2 - 2r'r\cos\theta + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r'}\left(1 - 2\frac{r}{r'}\cos\theta + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le développement de $\frac{r'}{\Delta}$ suivant les puissances de $\frac{r}{r'}$ s'obtient immédiatement par l'application de la formule du binôme à chacun des facteurs

$$\left(1 - \frac{r}{r'}e^{\theta i}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \left(1 - \frac{r}{r'}e^{-\theta i}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

dans lesquels se décompose $\frac{r'}{\Delta}$. En multipliant par la règle ordinaire les séries ainsi obtenues, on trouve

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'}\left[1 + P_1\frac{r}{r'} + P_2\frac{r^2}{r'^2} + P_3\frac{r^3}{r'^3} + \ldots\right]$$

où

$$P_1 = \cos\theta, \qquad P_2 = \frac{8\cos^2\theta - 1}{2}, \qquad P_3 = \frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2}, \qquad \ldots.$$

On a d'ailleurs

$$\cos\theta = \frac{xx'+yy'+zz'}{rr'},$$

de sorte que

$$Q = \frac{1}{r'} + \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\frac{r^2}{r'^3} + \frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2}\frac{r^3}{r'^4} + P_4\frac{r^4}{r'^5} + \ldots.$$

Si u', v', s' désignent les coordonnées du Soleil analogues à u, v, s, les formules du changement de variables

$$x = \frac{\cos v}{u}, \qquad y = \frac{\sin v}{u}, \qquad z = \frac{s}{u}, \qquad ru = \sqrt{1+s^2},$$

$$x' = \frac{\cos v'}{u'}, \qquad y' = \frac{\sin v'}{u'}, \qquad z' = \frac{s'}{u'}, \qquad r'u' = \sqrt{1+s'^2}$$

donnent

$$\cos\theta = \frac{\cos(v - v') + ss'}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+s'^2}}.$$

La substitution de cette valeur de θ dans le développement de Q donne en négligeant s'^2

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} Q &= \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{m'u'}{\sqrt{1+s'^2}} \\ &+ \frac{m'u'^3}{4u^2}[1 + 3\cos(2v - 2v') - 2s^2 + 12ss'\cos(v - v')] \\ &+ \frac{m'u'^4}{8u^3}\{5\cos(3v - 3v') \\ &\qquad + 3(1 - 4s^2)\cos(v - v') + 12ss'[\cos(2v - 2v') - s^2]\} \\ &+ m'f_4\frac{r^4}{r'^5} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Le terme $\frac{m'u'}{\sqrt{1+s'^2}}$ peut être supprimé puisqu'il ne dépend pas des coordonnées de la Lune et que les équations du mouvement troublé ne renferment pas la fonction Q elle-même, mais ses dérivées par rapport aux coordonnées de la Lune. Le terme en $\frac{m'u'^3}{u^2}$ donne les *principales* inégalités du mouvement de la Lune, le terme en $\frac{u'^4}{u^3}$ les *inégalités parallactiques,* lesquelles dépendent de $\frac{a}{a'}$ et peuvent servir à déterminer ce rapport dont la connaissance équivaut à celle de la parallaxe de la Lune. Le terme en $\frac{r^4}{r'^5}$ et les suivants sont très petits et nous les négligerons ici, notre objet étant seulement de faire connaître avec quelque approximation les lois du mouvement de la Lune. Nous négligerons aussi pour la même raison les termes qui ont s' en facteur. D'autre part, comme il a été expliqué au Chapitre XII, nous considérerons séparément les divers termes de Q, ce qui est permis en première approximation.

210. Cas où la fonction perturbatrice est réduite aux termes en $\frac{u'^3}{u^2}$. — Nous ferons d'abord

$$(3)\qquad Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{m'u'^3}{4u^2}[1 - 2s^2 + 3\cos(2v - 2v')],$$

qui donne

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial v} = -\dfrac{3m'u'^3}{2u^2}\sin(2v-2v'), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}} - \dfrac{m'u'^3}{2u^3}[1-2s^2+3\cos(2v-2v')], \\ \dfrac{\partial Q}{\partial s} = -\dfrac{us}{\sqrt{1+s^2}^3} - \dfrac{m'u'^3 s}{u^2}. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans les deux premières équations (1), elles deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^2 s}{dv^2} + s - \dfrac{3m'}{h^2}\left(\dfrac{d^2 s}{dv^2}+s\right)\displaystyle\int \dfrac{u'^3}{u^4}\sin(2v-2v')\,dv \\ \quad -\dfrac{3m'}{2h^2}\dfrac{u'^3}{u^4}\sin(2v-2v')\dfrac{ds}{dv} + \dfrac{3m'u'^3 s}{2h^2u^4}[1+\cos(2v-2v')]. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^2 u}{dv^2} + u - \dfrac{3m'}{h^2}\left(\dfrac{d^2 u}{dv^2}+u\right)\displaystyle\int \dfrac{u'^3}{u^4}\sin(2v-2v')\,dv \\ \quad -\dfrac{3m'}{2h^2}\dfrac{u'^3}{u^4}\sin(2v-2v')\dfrac{du}{dv} \\ \quad -\dfrac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{m'u'^3}{2h^2u^3}[1+3\cos(2v-2v')]. \end{cases}$$

Nous simplifierons ces équations en y négligeant les termes du quatrième ordre. Si nous faisions abstraction de l'action du Soleil, nous obtiendrions les équations du mouvement elliptique.

Soient dans cette hypothèse :

a le demi grand axe;
e l'excentricité;
n le moyen mouvement de la Lune;
ε la longitude moyenne dans l'écliptique à l'origine du temps.
a', e', n', ε' les quantités analogues relatives au Soleil.

Nous regarderons s, e, $\dfrac{n'}{n}$ comme de petites quantités du premier ordre, et le rapport des actions du Soleil et de la Terre sur la Lune comme étant du second ordre. Ce rapport est sensiblement $m'\dfrac{u'^3}{u^3}$. Dans ces conditions, $\dfrac{d^2 s}{dv^2}+s$ est du second ordre et le terme de

l'équation (5) qui renferme une intégrale est du quatrième ordre; nous négligerons ce dernier terme.

D'après le choix particulier d'unités qui a été fait, on a

$$h^2 = a\sqrt{1-e^2},$$

et dans l'équation (5) on pourra remplacer h^2 par a. On a aussi, d'après le n° 166,

$$\frac{n'^2 a'^3}{n^2 a^3} = m'.$$

Nous poserons

$$\frac{n'}{n} = m,$$

d'où, en négligeant e^2, ce qui est évidemment permis dans l'équation (5),

$$\frac{m'}{h^2} = \frac{m^2 a'^3}{a^4}.$$

Enfin, négligeant toujours les quantités du quatrième ordre, nous remplacerons, dans l'argument $2v - 2v'$, v et v' par les longitudes moyennes

$$v = nt + \varepsilon, \qquad v' = n't + \varepsilon',$$

ce qui donne

$$v' = mv + \varepsilon_1,$$

en posant

$$\varepsilon' - m\varepsilon = \varepsilon_1.$$

L'équation (5) devient ainsi, en désignant par λ la constante $2(1-m)$:

$$(\alpha) \quad \frac{d^2 s}{dv^2} - \frac{3}{2} m^2 \sin(\lambda v - 2\varepsilon_1)\frac{ds}{dv} + s\left[1 + \frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{2} m^2 \cos(\lambda v - 2\varepsilon_1)\right] = 0.$$

Nous simplifierons l'équation (6) par des considérations analogues. Nous poserons d'abord

$$u = \frac{1+\rho}{a}, \qquad u' = \frac{1+\rho'}{a'},$$

où ρ, ρ' désignent des quantités du premier ordre. A cause du terme $\frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d^2 u}{dv^2} + u$ est d'ordre zéro, et le terme qui renferme une intégrale doit être conservé; il est du second ordre, ainsi que les autres termes de l'équation. On pourra dans le calcul des divers facteurs de ces termes, négliger les quantités dont

les rapports à ces termes ont avec l'unité des différences du second ordre. On remplacera $(1+s^2)^{-\frac{3}{2}}$ par $1-\frac{3}{2}s^2$, $\frac{m'}{h^2}$ par $m^2\frac{a'^3}{a^4}$. L'équation devient ainsi

$$\frac{d^2\rho}{dv^2}+1+\rho-\frac{a}{h^2}+\frac{3}{2}\frac{a}{h^2}s^2+\frac{m^2}{2}[1+3\cos(2v-2v')]\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^3}$$
$$-\frac{3}{2}m^2\frac{d\rho}{dv}\sin(2v-2v')\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4}$$
$$-3m^2\left(1+\rho+\frac{d^2\rho}{dv^2}\right)\int\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4}\sin(2v-2v')\,dv=0.$$

Nous supprimerons le terme constant du second ordre $1-\frac{a}{h^2}$, ce qui revient à changer la définition de la valeur moyenne a de u. Le binome $\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho$ est du second ordre et peut être supprimé dans le dernier terme. On ne peut plus remplacer v et v' par les longitudes moyennes, qui en diffèrent de quantités du premier ordre; on posera

$$nt+\varepsilon=v-2e\sin(v-\varpi),$$
$$n't+\varepsilon'=v'-2e'\sin(v'-\varpi'),$$

d'où

$$\varepsilon_1=\varepsilon'-m\varepsilon=v'-2e'\sin(v'-\varpi')-mv+2em\sin(v-\varpi),$$

et, em étant du second ordre,

$$v'=mv+2e'\sin(v'-\varpi')+\varepsilon_1.$$

On a, de même, avec une précision suffisante,

$$\rho'=e'\cos(v'-\varpi')=e'\cos(mv+\varepsilon_1-\varpi').$$

On obtient ainsi, en effectuant des intégrations immédiates,

$$0=\frac{d^2\rho}{dv^2}-\frac{3}{2}m^2\sin(\lambda v-2\varepsilon_1)\frac{d\rho}{dv}+\left[1-\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{2}m^2\cos(\lambda v-2\varepsilon_1)\right]\rho$$
$$+\frac{3}{2}s^2+\frac{1}{2}m^2+\left(3m^2+\frac{3}{2}m^3\right)\cos(\lambda v-2\varepsilon_1)+\frac{3}{2}m^2e'\cos(mv+\varepsilon_1-\varpi')$$
$$-\frac{3}{2}m^2e'\cos[(\lambda+m)v-\varepsilon_1-\varpi']+\frac{21}{2}m^2e'\cos[(\lambda-m)v-3\varepsilon_1+\varpi']$$
$$+12m^4\int\rho\sin(\lambda v-2\varepsilon_1)\,dv-30m^2\int\rho^2\sin(\lambda v-2\varepsilon_1)\,dv.$$

Le dernier terme est du quatrième ordre. Quand on y remplacera ρ par une valeur approchée, on obtiendra un terme dont

l'argument sera de la forme $2mv$. L'intégration conduira à diviser ce coefficient par $2m$; ce terme sera donc réellement du troisième ordre et non du quatrième.

On fait disparaître l'intégrale de l'avant-dernier terme ainsi : on a identiquement, en remplaçant provisoirement $\lambda v - 2\varepsilon_1$ par λv,

$$\int \rho \sin\lambda v \, dv = -\int \frac{d^2\rho}{dv^2} \sin\lambda v \, dv + \int \left(\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho\right) \sin\lambda v \, dv.$$

Le second terme du second membre est du second ordre. D'autre part, on obtient, en intégrant par parties deux fois de suite

$$\int \frac{d^2\rho}{dv^2} \sin\lambda v \, dv = \frac{d\rho}{dv} \sin\lambda v - \lambda \int \frac{d\rho}{dv} \cos\lambda v \, dv$$
$$= \frac{d\rho}{dv} \sin\lambda v - \rho\lambda \cos\lambda v - \lambda^2 \int \rho \sin\lambda v \, dv.$$

Portant cette valeur dans l'identité précédente on trouve

$$\int \rho \sin\lambda v \, dv$$
$$= \frac{1}{\lambda^2 - 1} \sin\lambda v \frac{d\rho}{dv} - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \rho \cos\lambda v - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \int \left(\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho\right) \sin\lambda v \, dv.$$

Dans le dernier terme qui, dans l'équation différentielle, deviendra du quatrième ordre, on peut remplacer $\frac{1}{\lambda^2 - 1}$ par $\frac{1}{3}$ puisque

$$\lambda^2 - 1 = (3 - 2m)(1 - 2m).$$

Par ces substitutions cette équation devient

$$(\beta) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dv^2} + m^2 \left(\frac{12}{\lambda^2 - 1} - \frac{3}{2}\right) \sin(\lambda v - 2\varepsilon_1) \frac{d\rho}{dv} \\ &\quad + \left[1 - \frac{3}{2} m^2 - m^2 \left(\frac{12\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{9}{2}\right) \cos(\lambda v - 2\varepsilon_1)\right] \rho \\ &= -\frac{3}{2} s^2 - \frac{1}{2} m^2 - \left(3 m^2 + \frac{3}{2} m^3\right) \cos(\lambda v - 2\varepsilon_1) \\ &\quad - \frac{3}{2} m^2 e' \cos(mv + \varepsilon_1 - \varpi') \\ &\quad + \frac{3}{2} m^2 e' \cos[(\lambda + m) v - \varepsilon_1 - \varpi'] \\ &\quad - \frac{21}{2} m^2 e' \cos[(\lambda - m) v - 3\varepsilon_1 + \varpi'] \\ &\quad + 30 m^2 \int \rho^2 \sin(\lambda v - 2\varepsilon_1) \, dv + 4 m^2 \int \left(\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho\right) \sin(\lambda v - 2\varepsilon_1) \, dv. \end{aligned} \right.$$

Nous désignerons, pour abréger, par U ce second membre.

L'équation (α) est une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques et sans second membre. L'équation (β), si l'on y remplace s par la valeur résultant de l'intégration de l'équation (α), est, aux deux derniers termes près, qui sont du quatrième ordre, une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques, avec second membre. L'intégration d'une telle équation est aisée quand on sait intégrer l'équation obtenue en remplaçant le second membre par zéro. L'équation (α) et l'équation (β) après la suppression du second membre appartiennent à un même type

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2x}{dv^2} + A\sin(\lambda v - 2\varepsilon_1)\frac{dx}{dv} + [B + C\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1)]x = 0,$$

que nous allons d'abord simplifier.

211. Simplification de l'équation différentielle du second ordre sans second membre. — Soit généralement une équation différentielle linéaire du second ordre, sans second membre,

$$(7) \qquad \frac{d^2x}{dv^2} + L\frac{dx}{dv} + Mx = 0.$$

Si l'on pose

$$x = zE^{\int N\,dv},$$

z désignant une nouvelle fonction inconnue, substituée à x, E la base des logarithmes népériens et N une fonction de v convenablement choisie, on a

$$\frac{dx}{dv} = E^{\int N\,dv}\left(\frac{dz}{dv} + Nz\right),$$

$$\frac{d^2x}{dv^2} = E^{\int N\,dv}\left(\frac{d^2z}{dv^2} + 2N\frac{dz}{dv} + z\frac{dN}{dv} + N^2z\right),$$

et l'équation (7) est remplacée par une nouvelle équation linéaire sans second membre dans laquelle le coefficient de $\frac{dv}{dz}$ est

$$2N + L.$$

Si l'on prend $N = -\frac{L}{2}$, la nouvelle équation en z est

$$\frac{d^2z}{dv^2} + z\left(M - \frac{1}{4}L^2 - \frac{1}{2}\frac{dL}{dv}\right) = 0.$$

Si l'on applique ces considérations à l'équation (γ), on est conduit à poser

$$x = z\mathrm{E}^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{A}\sin(\lambda v+\varepsilon_1)dv},$$

et l'équation en z est

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + z\left[\mathrm{B} + \left(\mathrm{C} - \frac{\mathrm{A}\lambda}{2}\right)\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1) - \frac{1}{4}\mathrm{A}^2\sin^2(\lambda v - 2\varepsilon_1)\right] = 0.$$

Dans les équations (α) et (β) A est du second ordre et l'on peut négliger le terme en A^2; B est, au reste, positif; nous sommes donc ramené à une équation de la forme

$$(\delta) \qquad \frac{d^2 z}{dv^2} + z[q^2 + 2\alpha\cos(\lambda v + \beta)] = 0.$$

Nous observerons que, dans l'application de ces principes à l'équation avec second membre (β), il faudra multiplier U par $\mathrm{E}^{\frac{1}{2}\int \mathrm{A}\sin(\lambda v - 2\varepsilon_1)dv}$; mais, U étant du second ordre et l'exponentielle ne différant de l'unité que par des termes du second ordre, on peut remplacer cette exponentielle par l'unité, en ne négligeant toujours que des termes du quatrième ordre.

L'application de ces principes à l'équation (α) la ramène à la forme

$$(\alpha^*) \qquad \frac{d^2 z}{dv^2} + z\left[1 + \frac{3}{2}m^2 + 3m^2\left(1 - \frac{m}{2}\right)\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1)\right] = 0$$

avec

$$s = z\left[1 + \frac{3}{8}m^2(1+m)\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1)\right];$$

l'équation (β) se ramène à

$$(\beta^*) \qquad \frac{d^2 z'}{dv^2} + z'\left[1 - \frac{3}{2}m^2 - \frac{3}{2}m^2\left(3 - \lambda + \frac{12\lambda}{\lambda^2 - 1}\right)\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1)\right] = \mathrm{U},$$

avec

$$\rho = z'\left[1 + \left(\frac{5}{8}m^2 + \frac{79}{24}m^3\right)\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1)\right].$$

212. Intégration approchée de l'équation sans second membre (δ). — Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$(\delta) \qquad \frac{d^2 z}{dv^2} + z[q^2 + 2\alpha\cos(\lambda v + \beta)] = 0,$$

où q^2 est un nombre positif fini, voisin de un, α un nombre petit, du second ordre.

Posant

$$\lambda v + \beta = 2 v',$$

cette équation devient

$$(\delta') \qquad \frac{d^2 z}{dv'^2} + z(q'^2 + 2\alpha' \cos 2v') = 0,$$

où l'on a

$$(8) \qquad q' = \frac{2q}{\lambda}, \qquad \alpha' = \frac{4\alpha}{\lambda^2}.$$

On peut satisfaire à l'équation (δ'), *aux termes près de l'ordre* $p+1$ *par rapport à* α', *par une expression de la forme*

$$(9) \qquad z = z_0 + \alpha' z_1 + \alpha'^2 z_2 + \ldots + \alpha'^p z_p,$$

où

$$(10) \qquad z_i = \sum_{h=-i}^{h=+i} B_i^{(h)} \cos(w + 2hv'),$$

les coefficients $B_i^{(h)}$ *n'étant fonctions que de* q', *et l'arc* w *étant de la forme*

$$(11) \qquad w = \mu' v' + \psi',$$

ψ' *désignant une constante arbitraire et* μ' *étant de la forme*

$$(12) \qquad \mu' = q' + \alpha' \mu_1 + \alpha'^2 \mu_2 + \ldots + \alpha'^p \mu_p,$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots$ *étant des fonctions de* q'. Nous supposerons en outre B_i^0 nul, excepté B_0^0 qui demeurera arbitraire, ce qui revient à réunir à z_0 tous les termes en $\cos w$ de $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

On a en effet, dans ces conditions,

$$(13) \qquad \frac{d^2 z}{dv'^2} = \mathop{\mathrm{S}}_{i=0}^{i=p} \alpha'^i \frac{d^2 z_i}{dv'^2}$$

et

$$(14) \qquad \frac{d^2 z_i}{dv'^2} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial v'^2} + 2\mu' \frac{\partial^2 z_i}{\partial v' \, \partial w} + \mu'^2 \frac{\partial^2 z_i}{\partial w^2}.$$

De plus

$$(15) \qquad \mu'^2 = q'^2 + C_1 \alpha' + C_2 \alpha'^2 + C_3 \alpha'^3 + \ldots,$$

et nous retiendrons que dans ce développement le coefficient C_k est le premier qui renferme μ_k et que le coefficient de μ_k dans C_k est $2q'\alpha'^k$.

Si nous substituons dans le premier membre de l'équation (δ') ces diverses valeurs (14), (15), (16), le coefficient A de α'^i dans ce premier membre sera, au signe près,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} A = &-\sum_{h=-i}^{h=+i} (4h^2+4q'h)B_i^h \cos(\varpi+2hv') \\ &-\sum_{h=-(i-1)}^{h=+(i-1)} \Big\{(4\mu_1 h + C_1)B_{i-1}^h \cos(\varpi+2hv') \\ &\qquad\qquad - B_{i-1}^h \cos[\varpi+(2h+2)v'] \\ &\qquad\qquad - B_{i-1}^h \cos[\varpi+(2h-2)v']\Big\} \\ &-\sum_{h=-(i-2)}^{h=+(i-2)} (4\mu_2 h + C_2)B_{i-2}^h \cos(\varpi+2hv') \\ &-\sum_{h=-(i-3)}^{h=+(i-3)} (4\mu_3 h + C_3)B_{i-3} \cos(\varpi+2hv') \\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Nous égalerons ce coefficient à zéro pour les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p$ de i, et comme il est une combinaison linéaire de cosinus d'arguments de la forme

$$\varpi - 2iv', \quad \varpi-(2i-2)v', \quad \varpi-(2i-4)v', \quad \ldots, \quad \varpi+2iv',$$

nous égalerons à zéro, pour une valeur donnée de i, les coefficients des cosinus de ces divers arguments.

Pour $i=0$, A est identiquement nul.

Pour $i=1$, il est égal à

$$\begin{aligned} &[(-4+4q')B_1^{-1}+B_0^0]\cos(\varpi-2v') \\ &\quad + 2q'\mu_1\alpha' B_0^0 \cos\varpi + [(-4-4q')B_1^1+B_0^0]\cos(\varpi+2v'). \end{aligned}$$

Annulant successivement le terme en $\cos\varpi$ et les deux autres, nous trouvons

$$\mu_1 = 0, \qquad B_1^{-1} = \frac{B_0}{4(1-q')}, \qquad B_1^1 = \frac{B_0^0}{4(1+q')}.$$

Si l'on fait $i = 2$, on trouve de même

$$B_2^{-1} = 0, \qquad B_2^{+1} = 0,$$

$$\mu_2 = \frac{B_1^1 + B_1^{-1}}{2q' B_0^0} = \frac{1}{4q'(1-q'^2)},$$

$$B_2^{-2} = \frac{B_1^{-1}}{16 - 8q'} = \frac{B_0^0}{32(1-q')(2-q')},$$

$$B_2^2 = \frac{B_1^1}{16 + 8q'} = \frac{B_0^0}{32(1+q')(2+q')}.$$

Nous ne pousserons pas plus loin le calcul, constatant seulement que, pour une valeur quelconque de i, le coefficient de $\cos w$ donne μ_i qui ne s'introduit dans ce coefficient qu'au dernier terme avec le coefficient $2q'$. On obtient B_i^h en égalant à zéro le terme en $\cos(w + 2hv')$; le coefficient de B_i^h dans ce terme est $4h^2 + 4hq'$; il n'est jamais nul, h n'étant pas nul. On voit aussi aisément que les conditions

$$B_1^0 = 0, \qquad B_2^0 = 0, \qquad \ldots$$

donnent successivement le Tableau

		$B_2^{-1} = 0$		$B_2^1 = 0$		
	$B_3^{-2} = 0$		$B_3^0 = 0$		$B_3^2 = 0$	
$B_4^{-3} = 0$		$B_4^{-1} = 0$		$B_4^1 = 0$		$B_4^3 = 0$

de sorte que dans une expression de z_i les arguments successifs ont des différences égales, non pas à $2v'$, mais à $4v'$.

213. Intégration approchée de l'équation avec second membre. — Si nous nous en tenons aux termes en α'^2 et que nous remplacions $2v'$ par $\lambda v + \beta$, nous obtenons pour l'intégrale approchée de l'équation (δ)

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} z &= B_0^0 \cos w + \frac{B_0^0 \alpha}{\lambda}\left[\frac{\cos(w - \lambda v - \beta)}{\lambda - 2q} + \frac{\cos(w + \lambda v + \beta)}{\lambda + 2q}\right] \\ &\quad + \frac{B_0^0 \alpha^2}{2k^2}\left[\frac{\cos(w - 2\lambda v - 2\beta)}{(\lambda - 2q)(2\lambda - 2q)} + \frac{\cos(w + 2\lambda v + 2\beta)}{(\lambda + 2q)(2\lambda + 2q)}\right], \end{aligned}\right.$$

où

$$w = \mu v + \psi,$$

B_0^0 et ψ étant des constantes arbitraires et la valeur de μ étant

(19) $$\mu = q\left[1 + \frac{\alpha^2}{q^2(\lambda^2 - 4q^2)}\right].$$

Si nous donnons à l'équation (δ) un second membre Z périodique, de la forme

$$Z = \Sigma A_i \cos V_i,$$

où

$$V_i = \lambda_i v + \beta_i,$$

l'intégrale de l'équation

(ε) $$\frac{d^2 z}{dv^2} + z[q^2 + 2\alpha\cos(\lambda v + \beta)] = Z$$

s'obtiendra en ajoutant à l'intégrale générale (18) de l'équation (δ) une intégrale particulière de l'équation (ε) avec second membre. L'application de la méthode bien connue de variation des constantes arbitraires $B_0^0\cos\psi$, $B_0^0\sin\psi$ de l'intégrale (18) donne la solution particulière suivante

(20) $$\left\{\begin{aligned} S = \frac{1}{2q}\sum A_i\cos V_i \Bigg\{ & \left[\frac{1}{\mu+\lambda_i} + \frac{1}{\mu-\lambda_i}\right]\left[1 - \alpha^2\frac{\lambda^4 - 10q^2\lambda^2 + 8q^4}{q^2\lambda^2(\lambda^2-4q^2)^2}\right] \\ & + \frac{\alpha^2}{\lambda^2(\lambda+2q)^2}\left[\frac{1}{\mu+\lambda+\lambda_i} + \frac{1}{\mu+\lambda-\lambda_i}\right] \\ & + \frac{\alpha^2}{\lambda^2(\lambda-2q)^2}\left[\frac{1}{\mu-\lambda+\lambda_i} + \frac{1}{\mu-\lambda-\lambda_i}\right]\Bigg\} \\ + \frac{\alpha}{2q\lambda}\sum A_i\cos(V_i + \lambda v + \beta)\Bigg\{ & \frac{1}{\lambda+2q}\left(\frac{1}{\mu+\lambda+\lambda_i} + \frac{1}{\mu-\lambda_i}\right) \\ & + \frac{1}{\lambda-2q}\left(\frac{1}{\mu-\lambda-\lambda_i} + \frac{1}{\mu+\lambda_i}\right)\Bigg\} \\ + \frac{\alpha}{2q\lambda}\sum A_i\cos(V_i - \lambda v - \beta)\Bigg\{ & \frac{1}{\lambda+2q}\left(\frac{1}{\mu+\lambda-\lambda_i} + \frac{1}{\mu+\lambda_i}\right) \\ & + \frac{1}{\lambda-2q}\left(\frac{1}{\mu+\lambda+\lambda_i} + \frac{1}{\mu-\lambda_i}\right)\Bigg\}; \end{aligned}\right.$$

cette fonction, ajoutée à la valeur (18) de Z, représente une valeur de z qui, substituée dans l'équation (ε), ne laisse comme résidus que des termes de l'ordre de α^2.

214. Latitude de la Lune. — Nous appliquerons d'abord les résultats de l'article précédent à l'équation α relative à la latitude de

la Lune. L'équation n'a pas de second membre. On l'identifie avec l'équation (δ) en faisant

$$q = 1 + \frac{3}{4} m^2, \qquad q^2 = 1 + \frac{3}{2} m^2,$$
$$\alpha = \frac{3}{2} m^2 \left(1 - \frac{m}{2}\right), \qquad \beta = -2\varepsilon_1, \qquad \lambda = 2 - 2m.$$

On obtient ainsi par les équations (19), en s'en tenant dans la valeur de z aux termes en α,

$$z = B_0^0 \cos w + \frac{3}{2} \frac{m^2\left(1 - \frac{m}{2}\right) B_0^0}{2 - 2m} \times \left[\frac{\cos(w - \lambda v + 2\varepsilon_1)}{-2m - \frac{3}{2} m^2} + \frac{\cos(w + \lambda v - 2\varepsilon_1)}{4 - 2m + \frac{3}{2} m^2}\right],$$

ou, négligeant les termes qui, par rapport à B_0^0 et m, sont d'ordre supérieur au second,

$$z = B_0^0 \cos w - \frac{3}{8} m B_0^0 \cos(w - \lambda v + 2\varepsilon_1),$$

et par suite

$$s = B_0^0 \cos(\mu v + \psi) - \frac{3}{8} B_0^0 m \cos[(\mu - 2 + 2m) v + \psi + 2\varepsilon_1],$$

ou, aux termes près du quatrième ordre,

(21) $$\mu = \left(1 + \frac{3}{4} m^2 - \frac{9}{32} m^3\right).$$

La valeur de μ ainsi trouvée est exacte à $\frac{1}{50}$ près de sa valeur.
Nous poserons

$$\psi = -90° - \gamma, \qquad B_0^0 = \varkappa, \qquad = g,$$

et nous aurons, suivant les notations ordinaires,

(22) $$s = \varkappa \sin(g v - \gamma) + \frac{3}{8} m \varkappa \sin[(2 - 2m - g) v + \gamma - 2\varepsilon_1].$$

Nous reviendrons au n° 217 sur la signification des formules (21) et (22).

215. Rayon vecteur de la Lune. — L'application des formules (18), (19), (20) à l'équation (β) donne de même, en s'en tenant

aux termes du premier et du second ordre, un résultat de la forme

$$\rho = e\cos(cv - \varpi) + \frac{15}{8} me \cos[(\lambda - c)v + \varpi]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum A_i \cos V_i\left(\frac{1}{1+k_i} + \frac{1}{1-k_i}\right).$$

Pour obtenir les expressions de A_i et k_i il faut remplacer dans l'expression de U, formule (β), s par la valeur (21).

Pour appliquer les formules (18), (19), (20) à l'équation (β), on fait

$$q = 1 - \frac{3}{4}m^2, \qquad \alpha = -\frac{3}{4}m^2\left[3 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{12\lambda}{\lambda^2 - 1}\right], \qquad \beta = -2\varepsilon_1.$$

On obtient ainsi, par les équations (18) et (19), en s'en tenant aux termes en α,

$$z' = B_0^0 \cos w - \frac{3}{4} B_0^0 \frac{m^2}{2 - 2m}$$
$$\times\left[3 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{12\lambda}{\lambda^2 - 1}\right]\left[\frac{\cos(w - \lambda v + 2\varepsilon_1)}{-2m + \frac{3}{2}m^2} + \frac{\cos(w + \lambda v - 2\varepsilon_1)}{4 - 2m - \frac{3}{4}m^2}\right] + S$$

ou, en négligeant les termes d'ordre supérieur au second,

$$z' = B_0^0 \cos(\mu v + \psi) + \frac{15}{8} B_0^0 m \cos[(\mu - \lambda)v + \psi + 2\varepsilon_1] + S,$$

S étant donné par la formule (20). La valeur de μ est

(23) $$\mu = q\left[1 + \frac{\alpha^2}{q^2(\lambda^2 - 4q^2)} + \ldots\right].$$

La valeur de S, si l'on s'en tient aux termes du second ordre, est

(24) $$\frac{1}{2}\sum A_i \cos(\lambda_i v + \beta_i)\left(\frac{1}{1+\lambda_i} + \frac{1}{1-\lambda_i}\right)$$

en posant

$$U = \Sigma A_i \cos(\lambda_i v + \beta_i).$$

Pour obtenir les divers termes du second ordre de U il suffit de remplacer dans le second membre de l'équation (β), n° **210**, s par la valeur (22). On trouve ainsi, en ne conservant que les termes du second ordre et ceux des termes du troisième ordre dans l'argument

desquels v est multiplié par un petit coefficient de l'ordre de m,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} U = &-\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{4}\varkappa^2 - 3m^2\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1) \\ &+\frac{3}{4}\varkappa^2\cos(2gv - 2\gamma) - \frac{3}{2}m^2 e'\cos(mv + \varepsilon_1 - \varpi') \\ &-\frac{9}{16}m\varkappa^2\cos[(\lambda - 2g)v + 2\gamma - 2\varepsilon_1] \\ &+30m^2\int \rho^2\sin(\lambda v - 2\varepsilon_1)\,dv \\ &+4m^2\int\left(\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho\right)\sin(\lambda v - 2\varepsilon_1)\,dv. \end{aligned}\right.$$

Si l'on s'en tient aux termes du second ordre, on trouve immédiatement

$$S = -\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{4}\varkappa^2 + m^2\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1) - \frac{1}{4}\varkappa^2\cos(2gv - 2\gamma).$$

D'autre part, aux termes près du quatrième ordre,

$$\rho = z'.$$

En posant, suivant l'usage,

$$\mu = c, \qquad \psi = -\varpi, \qquad B_0^0 = e,$$

on trouve, toujours aux termes près du troisième ordre,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \rho = &-\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{4}\varkappa^2 + e\cos(cv - \varpi) \\ &+ m^2\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1) - \frac{1}{4}\varkappa^2\cos(2gv - 2\gamma) \\ &+\frac{15}{8}me\cos[(c - \lambda)v - \varpi + 2\varepsilon_1]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on veut obtenir les termes de ρ, du troisième ordre, dans l'argument desquels v a un petit multiplicateur de l'ordre de m, il faut dans les deux derniers termes de U remplacer ρ par la valeur (26). Les termes en α de la formule (20) ne donnent aucun terme du troisième ordre de la forme en question. Les termes de cette sorte seront donc donnés par la formule (24) dans laquelle on introduira les termes du troisième ordre de U. Le calcul n'offre pas de difficultés. On trouve ainsi pour la partie cherchée $\delta\rho$

de ρ

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\rho = &-\frac{3}{2}m^2 e' \cos(mv+\varepsilon_1-\varpi') \\ &+\frac{15}{4}me^2\cos[(\lambda-2c)v-2\varepsilon_1+2\varpi] \\ &+\frac{3}{16}m\varkappa^2\cos[(\lambda-2g)v-2\varepsilon_1+2\gamma]. \end{aligned}\right.$$

Le résultat numérique le plus important de ce paragraphe est la valeur de c. Si l'on pousse les calculs du n° **212** jusqu'à obtenir la valeur de μ_3, on trouve

$$c = q\left[1+\frac{\alpha^2}{q^2(\lambda^2-4q^2)}+\alpha^4\frac{-2\lambda^4+35\lambda^2q^2-60q^4}{4q^4(\lambda^2-q^2)(\lambda^2-4q^2)^3}\right].$$

Si l'on fait, avec Laplace,

$$m = 0,074\,8013,$$

on trouve

$$c = 1-0,008\,438.$$

La valeur exacte est

$$c = 1-0,008\,452.$$

La valeur trouvée de $1-c$ est donc exacte à $\frac{1}{600}$ près de sa valeur.

216. Expression de t en fonction de v. — Si dans la troisième équation (C) on remplace $\frac{\partial Q}{\partial v}$ par la valeur que donne la première formule (4) et qu'on en néglige le carré, qui est du quatrième ordre, on trouve

$$h\frac{dt}{dv} = \frac{1}{u^2}+\frac{3m'}{2h^2}\int\frac{u'^3}{u^4}\sin(2v-2v')\,dv.$$

Il suffit, pour calculer le second membre, de remplacer u et u' par les valeurs

$$u = \frac{1+\rho+\delta\rho}{a},$$

$$u' = \frac{1+\rho'}{a'},$$

de développer suivant les puissances de ρ, ρ', $\delta\rho$, et de remplacer

ces quantités par les valeurs trouvées ci-dessus en s'en tenant aux termes du second ordre et à ceux du troisième ordre dans l'argument desquels v a un petit multiplicateur de l'ordre de m, pour trouver

$$\frac{h}{a^2}\frac{dt}{dv} = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}\varkappa^2 + m^2 - 2e\cos(cv - \varpi) + \frac{3}{2}e^2\cos(2cv - 2\varpi)$$
$$+ \frac{1}{2}\varkappa^2\cos(2gv - 2\gamma) - \frac{11}{4}m^2\cos(\lambda v - 2\varepsilon_1)$$
$$- \frac{15}{4}me\cos[(\lambda - c)v - 2\varepsilon_1 + \varpi] + 3m^2e'\cos(mv + \varepsilon_1 - \varpi'),$$

d'où, en posant,

$$\frac{h}{a^2(1 + m^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}\varkappa^2} = n,$$

$$(26)\quad \begin{cases} nt = v - 2e\sin(cv - \varpi) + \frac{3}{4}e^2\sin(2cv - 2\varpi) \\ \quad + \frac{1}{4}\varkappa^2\sin(2gv - 2\gamma) - \frac{11}{8}m^2\sin(\lambda v - 2\varepsilon_1) \\ \quad - \frac{15}{4}me\sin[(\lambda - c)v - 2\varepsilon_1 + \varpi] + 3me'\sin(mv + \varepsilon_1 - \varpi'). \end{cases}$$

217. Expressions de u, v, s, en fonction de t. — Il est commode, pour l'interprétation des résultats, d'obtenir v, u, s en fonction du temps t. A cet effet on résout d'abord l'équation (26) par rapport à v par approximations successives, ce qui donne

$$(H)\quad \begin{cases} v = nt + 2e\sin(cnt - \varpi) \\ \quad + \frac{5}{4}e^2\sin(2cnt - 2\varpi) - \frac{1}{4}\varkappa^2\sin(2gnt - 2\gamma) \\ \quad + \frac{11}{8}m^2\sin[2(n - n')t - 2\varepsilon_1] \\ \quad + \frac{15}{4}me\sin[(2n - 2n' - cn)t - 2\varepsilon_1 + \varpi] \\ \quad - 3me'\sin(n't + \varepsilon_1 - \varpi'). \end{cases}$$

La substitution de cette valeur dans celles de u et s donne

$$(K)\quad \begin{cases} s = \varkappa\sin(gnt - \gamma) \\ \quad + \varkappa e\sin[(g + c)nt - \gamma - \varpi] - \varkappa e\sin[(g - c)nt - \gamma + \varpi] \\ \quad + \frac{3}{8}km\sin[(2n - 2n' - ng)t - 2\varepsilon_1 + \gamma], \end{cases}$$

et

$$
(\mathrm{L})\quad \left\{
\begin{aligned}
au = {} & 1 - \frac{1}{2}m^2 - e^2 - \frac{3}{4}\varkappa^2 + e\cos(cnt - \varpi) \\
& + e^2\cos(2cnt - 2\varpi) - \frac{1}{4}\varkappa^2\cos(2gnt - 2\gamma) \\
& + m^2\cos[2(n - n')t - 2\sigma] \\
& + \frac{15}{8}me\cos[(2n - 2n' - cn)t - 2\sigma + \varpi]
\end{aligned}
\right.
$$

et l'on a

$$c = 1 - 0{,}008\,452,$$
$$g = 1 + 0{,}004\,022.$$

Si l'on néglige les termes du second ordre, l'équation (K), où s désigne la tangente de la latitude de la Lune, indique que cette latitude varie périodiquement. On en obtient la valeur

$$s = \varkappa\sin(gnt - \gamma),$$

qui indique que la Lune se meut dans un plan dont l'inclinaison sur l'écliptique a constamment $\varkappa$ pour tangente. Le nœud ascendant de ce plan sur l'écliptique n'est pas fixe. Si l'on compte le temps à partir d'une époque où la longitude moyenne l de la Lune dans l'écliptique est nulle, on a

$$l = nt$$

et

$$gnt - \gamma = l - [\gamma - (g - 1)l].$$

On voit que la longitude du nœud à la date t est

$$\gamma - (g - 1)l.$$

Le nœud rétrograde donc uniformément et fait une révolution complète dans un nombre de révolutions lunaires égal à

$$\frac{1}{g - 1}.$$

De même la formule (L), si l'on s'en tient au terme du premier ordre, montre que la longitude du périgée est

$$\varpi + (1 - c)l.$$

Le périgée a donc un mouvement direct dont la période est, en ré-

volutions lunaires,

$$\frac{1}{1-c}.$$

La période exacte de la révolution des nœuds est 6793 jours, soit environ 18 ans et 7 mois; celle de la révolution du périgée 3232 jours, soit environ 8 ans et 11 mois.

La formule (H) donne une représentation approximative du mouvement de la Lune dans son orbite.

Les trois premiers termes ne diffèrent que par le coefficient c des premiers termes du développement de la longitude dans le mouvement elliptique. Le terme nt correspond à l'anomalie moyenne; les deux suivants à l'équation du centre.

Le quatrième terme, qui, si l'on y remet v à la place de nt, devient

$$-\frac{1}{4}x^2\cos 2(gv-\gamma),$$

est la *réduction à l'écliptique*. C'est la différence entre la longitude moyenne l_1 de la Lune dans son orbite et la longitude moyenne l dans l'écliptique. On a, en effet, en désignant par γ_1 la longitude du nœud égale à $\gamma+(1-g)l$,

$$\text{tang}(l-\gamma_1)=\text{tang}(l_1-\gamma_1)\cos i,$$

où i désigne l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'écliptique. On en conclut

$$l_1-l=-\text{tang}^2\frac{i}{2}\sin 2(l-\gamma_1)$$
$$=-\frac{x^2}{4}\sin 2(gl-\gamma).$$

Les termes suivants sont des inégalités proprement dites de la longitude de la Lune. La plus anciennement connue est l'*évection*, découverte par Ptolémée, dont l'expression est

$$\frac{15}{4}me\sin[2(l-l')-(cl-\varpi)].$$

Son argument est sensiblement égal au double de la distance angulaire de la Lune au Soleil diminué de l'anomalie moyenne de la

Lune. Sa période est

$$\frac{2\pi}{n(2-2m-c)} = \frac{\text{un mois lunaire}}{2-2m-c} = \frac{27^j\frac{1}{2}}{1-2m} = 32^j,$$

et son coefficient est

$$1^\circ 16'.$$

Les deux autres inégalités ont été découvertes par Tycho Brahé. La *variation*

$$\frac{11}{8}m^2\sin(2l-2l'),$$

nulle dans les syzygies et les quadratures, maxima ou minima dans les octants, a pour période

$$\frac{2\pi}{2(n-n')} = \frac{1}{2}\text{ mois lunaire synodique} = 14^j\frac{3}{4}$$

et pour coefficient

$$39'\frac{1}{2}.$$

L'équation annuelle

$$-3me'\sin(l'-\varpi')$$

se comporte comme l'équation du centre du Soleil et a pour coefficient

$$11'9''.$$

La théorie complète de la Lune met en évidence un nombre énorme d'autres inégalités sensibles; nous citerons d'abord l'*inégalité parallactique* dont le premier terme peut aisément être obtenu; ce terme est

$$-\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}\sin(v-v').$$

Elle a pour période le mois lunaire synodique; son coefficient dont la valeur est $125'',5$ permet, s'il est déterminé par les observations, d'obtenir le rapport $\frac{a}{a'}$ et par suite, a étant bien connu, la distance a' ou, ce qui revient au même, la parallaxe du Soleil.

Nous citerons en outre la présence d'un terme en t^2 dans le développement de la longitude moyenne, produisant une inégalité séculaire du moyen mouvement. Laplace, en tenant compte des

termes du second ordre par rapport aux excentricités, a trouvé

$$v = nt + \varepsilon - \frac{3}{2} m_1^2 \int (e'^2 - e_0'^2) n\, dt + \text{des termes périodiques},$$

où

$$m_1^2 = m' \frac{a^3}{a'^3}.$$

L'excentricité e' ayant une inégalité séculaire, il en résulte pour v un terme en t^2 dont le coefficient est l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune; le coefficient de t dans le moyen mouvement en est la moitié.

Laplace trouva le coefficient de l'accélération séculaire de 11″,135, puis de 10″,18 par siècle. La détermination précise de ce coefficient est encore un des desiderata de la *Mécanique céleste* : il n'y a pas parfaite concordance entre les théories actuelles de la Lune et les observations anciennes, ni même avec les observations modernes.

218. Éléments de l'orbite de la Lune. — D'après Hansen, les éléments de l'orbite de la Lune au 0 janvier 1850 étaient :

	j h m s
Révolution sidérale	27. 7.43.11,5
» tropique	27. 7.43. 4,7
» anomalistique	27.13.18.37,4
» draconitique	27. 5. 5.36
» synodique	29.12.44. 2,9
Longitude moyenne	122°.59′.55″,0
» du périgée	99.51.52,1
» du nœud ascendant	146.13.40,0
Inclinaison de l'orbite	5. 8.47,9
Excentricité	0,0549080 7
Moyenne distance à la Terre, en rayons terrestres	60,2745

CHAPITRE XV.

SATELLITES DE JUPITER.

REPRÉSENTATION APPROCHÉE DE LEURS MOUVEMENTS. — EXPLICATION DE LEURS PRINCIPALES INÉGALITÉS. — ÉCLIPSES DES SATELLITES. — VITESSE DE LA LUMIÈRE.

219. **Mouvements des satellites de Jupiter.** — Les mouvements des satellites de Jupiter ne sont pas moins complexes que celui de la Lune. La théorie de ces satellites est évidemment simplifiée par ce fait que leurs excentricités sont faibles et même, pour les deux premiers, insensibles; mais elle est singulièrement compliquée par les rapports presque commensurables qui existent entre les moyens mouvements des trois premiers. Nous nous bornerons à faire connaître les circonstances les plus importantes de leurs mouvements.

Nous ne nous occuperons pas du cinquième satellite, ainsi nommé, bien qu'il soit le plus voisin de la planète, parce qu'il a été découvert le dernier. La découverte de ce satellite est trop récente et les observations en sont trop peu nombreuses pour qu'il soit possible de donner des indications un peu précises sur les inégalités de son mouvement. Nous nous bornerons à signaler un déplacement rapide du périjove, indiqué par M. Tisserand, et dû à l'action du renflement équatorial de Jupiter. Ce périjove ferait une révolution, dans le sens direct, en cinq mois.

Les excentricités des orbites du premier et du deuxième satellite sont insensibles; celle du troisième est environ 0,0013 : en secondes $4'37''$. Celle du quatrième atteint 0,0072 ou $24'54''$.

On peut regarder, sans erreur appréciable, l'orbite du premier satellite comme située dans le plan de l'équateur de Jupiter. Le plan de l'orbite de chacun des trois autres fait un angle constant avec un plan fixe qui passe constamment entre l'équateur et l'orbite de Jupiter par leur intersection mutuelle. Les nœuds de

l'orbite de chaque satellite sur le plan fixe correspondant ont, sur ce plan fixe, un mouvement rétrograde.

Les plans fixes relatifs au deuxième, au troisième, au quatrième satellite font avec l'équateur de Jupiter des angles de 65″, 5′, 24′; les orbites sont inclinées sur les plans fixes correspondants de 28′, 12′, 15′; les périodes des révolutions tropiques des nœuds sur les plans fixes sont 29^{ans},9142; 141^{ans},739; 531 ans.

Il importe de remarquer que les plans des orbites ne font pas des angles constants avec l'équateur de Jupiter.

Les longitudes vraies v_1, v_2, v_3, v_4 des satellites s'expriment sensiblement en fonction de leurs longitudes moyennes l_1, l_2, l_3, l_4, par les formules suivantes données par Laplace au Tome IV de la *Mécanique céleste*,

$$v_1 = l_1 + 27' \sin 2(l_1 - l_2),$$
$$v_2 = l_2 + 1^\circ 4' \sin 2(l_2 - l_3),$$
$$v_3 = l_3 + 9' \sin(l_3 - \varpi_3) + 4' \sin(l_3 - \varpi_4) - 4' \sin(l_2 - l_3)$$
$$v_4 = l_4 + 50' \sin(l_4 - \varpi_4).$$

On comprendra pourquoi nous nous en tenons aux minutes d'arc en observant que, le demi grand axe de l'orbite du quatrième satellite n'étant que vingt-six fois le rayon de Jupiter qui nous apparaît sous un angle de 25″, un arc d'orbite de 1° ne nous apparaît que sous un angle de 10″.

Le deuxième terme de v_4 en est l'équation du centre. Chacune des autres inégalités données par Laplace pour le quatrième satellite n'atteint pas une minute d'arc.

Le deuxième terme de v_3 en est l'équation du centre; le troisième est une inégalité provenant en quelque sorte de l'équation du centre du quatrième, puisque son argument $l_3 - \varpi_4$ est compté du périjove du quatrième satellite au rayon vecteur moyen du troisième.

Les deuxièmes termes de v_1 et de v_2 et le dernier terme de v_3 ne correspondent pas aux inégalités à longue période sur lesquelles l'attention a été attirée au n° 190; il se produit ici une circonstance toute spéciale à laquelle il est d'autant plus nécessaire de s'arrêter, que ces termes sont les seules inégalités sensibles dans les mouvements du premier et du second satellite.

220. Explication des inégalités du premier et du second satellite. — Les moyens mouvements des trois premiers satellites sont, d'après les observations,

$$n_1 = 3,551\,548, \qquad n_2 = 1,769\,323, \qquad n_3 = 0,878\,208.$$

De ces valeurs on conclut

$$n_1 - 2n_2 = 0,012\,902,$$
$$n_2 - 2n_3 = 0,012\,907$$

et

$$n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0,$$

à une demi-unité près du cinquième ordre décimal, ou à une seconde près.

L'observation a montré que les longitudes moyennes satisfont à la relation

$$l_1 - 3l_2 + 2l_3 = 180°.$$

A l'égard des deux dernières relations qui ne se présentent dans la théorie des satellites qu'au second ordre d'approximation par rapport aux masses, nous nous bornerons à énoncer que la théorie prouve qu'elles ont lieu rigoureusement.

Les deux premières relations sont l'origine des inégalités du premier et du deuxième satellite et des trois derniers termes de la longitude v_3 du troisième.

Le mouvement d'un satellite résulte de l'attraction de la planète, de celle du Soleil et des attractions des autres satellites. Nous proposant seulement d'obtenir la forme des inégalités principales des trois premiers satellites, nous négligerons l'action du Soleil, qui, ainsi que cela a été dit au nº 208, est beaucoup moindre que celle des satellites; nous regarderons aussi la masse de Jupiter comme concentrée en son centre de gravité, tout en avertissant que le renflement équatorial de Jupiter est sensible et produit des effets peu importants, mais non négligeables, sur le mouvement des quatre satellites.

Nous ne nous occuperons que de la longitude vraie v, qui, en négligeant les carrés des inclinaisons, se déduit de la longitude moyenne par la série

$$v = l + 2e\sin(l - \varpi) + \frac{5}{4}e^2\sin(2l - 2\varpi)\ldots,$$

de sorte que les inégalités δv, du premier ordre par rapport aux masses, se déduisent de celles de l, e, ϖ par la formule

$$\begin{aligned}\delta v = \quad & \delta l\left[1 + 2e\cos(l-\varpi) + \frac{5}{2}e^2\cos(2l-2\varpi)\ldots\right]\\ + & \delta e\left[\quad 2\sin(l-\varpi) + \frac{5}{2}\; e\sin(2l-2\varpi)\ldots\right]\\ + & \delta\varpi\left[\;-2e\cos(l-\varpi) - \frac{5}{2}e^2\cos(2l-2\varpi)\ldots\right].\end{aligned}$$

Nous nous bornerons d'ailleurs à la partie de δv qui ne dépend ni des excentricités, ni des inclinaisons. Elle sera donnée par

$$\delta v = \delta l + 2\sin(l-\varpi)\,\delta e - 2\cos(l-\varpi)\,e\,\delta\varpi.$$

On a

$$l = \varepsilon + \rho,$$

en posant

$$\rho = \int n\,dt,$$

et, par les formules du n° 177, on a, en négligeant les excentricités et les inclinaisons,

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a},\\ \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\ \frac{de}{dt} &= -\frac{1}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \varpi},\\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{1}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}.\end{aligned}$$

On devra dans le calcul de R s'en tenir aux termes du premier ordre par rapport aux excentricités et négliger les inclinaisons.

Désignons par m' la masse d'un satellite perturbateur, celle de la planète étant prise pour unité. Choisissons les unités de temps et de distance de telle manière que le coefficient de l'attraction soit égal à l'unité. On a alors

$$R = \Sigma R_{1,0}$$

où

$$R_{1,0} = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\widehat{rr'}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r'\cos\widehat{rr'}}{r^2}.$$

En posant

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos V)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} A^i \cos iV$$

et

$$A_1^i = a \frac{\partial A^i}{\partial a},$$

on trouve, aux termes près du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons,

$$\begin{aligned}
&\left(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \widehat{rr'}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} A^i \cos(il' - il) - \frac{e}{2}(2iA^i + A_1^i) \cos[il' - (i-1)l - \varpi] \\
&\quad + \frac{e'}{2}[(2i+1)A^i + A_1^i] \cos[(i+1)l' - il - \varpi']
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\frac{r' \cos \widehat{rr'}}{r^2} &= -\frac{a}{a'^2} \cos(l' - l) + \frac{3}{2} e \cos(l' - \varpi) \\
&\quad - \frac{1}{2} e \cos(l' - 2l + \varpi) - 2e' \cos(2l' - l - \varpi').
\end{aligned}$$

Pour l'action du satellite m sur m', il faut prendre la même valeur pour la première partie de R_{10} et dans la seconde permuter a et a'; l, l'; e, e'; ϖ, ϖ'.

D'après cela, on a

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{+1}{2na^2}(2iA^i + A_1^i) \sin[il' - (i-1)l - \varpi] \\
&\quad - \frac{1}{na^2}\left[\frac{3}{2} \sin(l' - \varpi) - \frac{1}{2} \sin(l' - 2l + \varpi)\right], \\
e\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{-1}{2na^2}(2iA^i + A_1^i) \cos[il' - (i-1)l - \varpi] \\
&\quad + \frac{1}{na^2}\left[\frac{3}{2} \cos(l' - \varpi) - \frac{1}{2} \cos(l' - 2l + \varpi)\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\delta e = \frac{-1}{2na^2}\frac{2iA^i + A_1^i}{in' - (i-1)n}\cos[il' - (i-1)l - \varpi]$$

$$+ \frac{1}{2na^2}\left[\frac{3}{n'}\cos(l' - \varpi) - \frac{1}{n' - 2n}\cos(l' - 2l + \varpi)\right],$$

$$e\,\delta\varpi = \frac{-1}{2na^2}\frac{2iA^i + A_1^i}{in' - (i-1)n}\sin[il' - (i-1)l - \varpi]$$

$$+ \frac{1}{2na^2}\left[\frac{3}{n'}\sin(l' - \varpi) - \frac{1}{n' - 2n}\sin(l' - 2l + \varpi)\right],$$

et

$$2\sin(l - \varpi)\,\delta e - 2\cos(l - \varpi)\,e\,\delta\varpi$$

$$= \frac{1}{na^2}\frac{2iA^i + A_1^i}{in' - (i-1)n}\sin(il' - il)$$

$$+ \frac{1}{2na^2}\left[\frac{3}{n'}\sin(l' - l) - \frac{1}{n' - 2n}\sin(l' - 3l + 2\varpi)\right].$$

On a aussi

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{A_1^i}{na^2}\cos(il' - il) + \frac{2}{naa'^2}\cos(l' - l),$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = +\frac{3iA^i}{2a^2}\sin(il' - il) - \frac{3}{a'^2a^2}\sin(l' - l),$$

d'où

$$\delta\varepsilon = -\frac{A_1^i}{n(in' - in)a^2}\sin(il' - il) - \frac{2}{n(n' - n)aa'^2}\sin(l' - l),$$

$$\delta\rho = \frac{3iA^i}{2(in' - in)^2a^2}\sin(il' - il) - \frac{3}{(n' - n)^2a'^2a^2}\sin(l' - l).$$

La valeur de δv, abstraction faite des excentricités et des inclinaisons, est donc ΣI, où

$$I = \frac{m'}{\mu}\sin(il' - il)\left[\frac{2niA^ia + A_1^i an}{in' - (i-1)n} - \frac{naA_1^i}{in' - in} + \frac{3n^2A^ia}{2i(n' - n)^2}\right] + \dots$$

Nous ne retiendrons de cette formule que le premier terme et, du coefficient de ce premier terme, que la première partie dont le dénominateur est

$$in' - (i-1)n.$$

Si l'on suppose que les lettres sans accents se rapportent au

premier satellite et les lettres accentuées au deuxième et que l'on donne à i la valeur 2, on obtient pour le mouvement du premier satellite l'inégalité

$$\frac{m_2}{\mu_2}\,\frac{4n_1a_1A^2+n_1a_1A_1^2}{n_1-2n_2}\sin(2l_1-2l_2).$$

On trouve de même, dans le mouvement du deuxième satellite, une inégalité résultant de l'action du premier, pour $i=-1$, égale à

$$\frac{m_1}{\mu_1}\,\frac{3n_2a_2A^{-1}+n_2a_2A_1^{-1}}{n_1-2n_2}\sin(l_2-l_1),$$

et une inégalité provenant de l'action du troisième de la forme

$$\frac{m_3}{\mu_3}\,\frac{4n_2a_2B^2+n_2a_2B_1^2}{n_2-2n_3}\sin(2l_2-2l_3).$$

Enfin, dans le mouvement du troisième satellite, on aura une inégalité provenant de l'action du deuxième et de la forme

$$\frac{m_2}{\mu_2}\,\frac{3n_3a_3B^{-1}+n_3a_3B_1^{-1}}{n_2-2n_3}\sin(l_3-l_2),$$

la lettre B désignant des constantes analogues à celles que représente A, relatives à a_2 et a_3 au lieu de l'être à a_1 et a_2.

La relation

$$l_1-3l_2+2l_3=\pi$$

donne

$$\sin(l_2-l_1)=\sin(2l_2-2l_3),$$

de sorte que les deux inégalités du mouvement du deuxième satellite ont un même argument $2l_2-2l_3$.

On voit, et c'est le résultat sur lequel nous voulions attirer l'attention, que *les inégalités trouvées, dont les coefficients sont devenus sensibles à cause des petits diviseurs* $2n_3-n_2$, $2n_2-n_1$ *ne sont pas à longues périodes.* Les inégalités dont les arguments dépendent de $2l_2-l_1$ ou de $2l_3-l_2$ dont les coefficients auraient les très petits diviseurs $(2n_2-n_1)^2$, $(2n_3-n_2)^2$ sont du premier ordre par rapport aux excentricités et disparaissent dans les mouvements des deux premiers satellites. Elles n'atteignent pas une minute d'arc dans la longitude du troisième.

221. Fréquences des éclipses des satellites de Jupiter. — La distance du Soleil à Jupiter est d'environ 11000 fois le rayon de Jupiter, qui est, à peu près, le dixième de celui du Soleil. Il s'ensuit que le cône d'ombre projeté par le Soleil derrière Jupiter est fort allongé, son sommet étant à une distance de Jupiter égale à plus de 1200 fois le rayon de la planète. Les distances des cinq satellites V, I, II, III, IV à Jupiter étant respectivement représentées par les nombres $2\frac{1}{2}$, 6, 9, 15, 26 quand on prend le rayon de Jupiter pour unité, et les inclinaisons i des orbites de ces satellites sur l'orbite de Jupiter étant fort petites, on peut prévoir qu'ils sont éclipsés à chaque révolution. Il y a pourtant exception à l'égard du satellite IV dont la distance à l'orbite de Jupiter et par suite à l'axe du cône d'ombre peut atteindre $26 \tang i$. L'inclinaison i de l'orbite étant environ $2°,5$, la distance minimum de ce satellite à l'axe du cône d'ombre peut dépasser un. S'il en est ainsi au moment d'une opposition du satellite par rapport au Soleil, le satellite n'est pas éclipsé.

Les inclinaisons des orbites des autres satellites sur l'orbite de Jupiter étant beaucoup plus faibles, ainsi que les distances à la planète, ces satellites sont éclipsés à chacune de leurs oppositions par rapport au Soleil. Rappelons que les durées des révolutions sont approximativement, pour les cinq satellites,

$$0^j,5, \quad 1^j,8, \quad 3^j,5, \quad 7^j,2, \quad 16^j,6.$$

222. Importance des observations d'éclipses des satellites de Jupiter. — Nous ne parlerons ici que des satellites I, II, III, IV. Le satellite V, à cause de son extrême proximité de la planète, n'est guère visible que dans les plus puissantes lunettes et vers ses élongations. Les quatre autres, au contraire, sont des astres brillants qui ont été découverts dès que la première lunette a été dirigée vers le ciel.

Dès le début les astronomes en ont observé les éclipses, adoptant pour l'heure à laquelle le satellite a entièrement pénétré dans le cône d'ombre l'instant auquel l'observateur a cessé d'en percevoir la lumière. Il est assez clair qu'il y a là une cause d'erreur, une partie de la lumière émise par le satellite étant absorbée par l'atmosphère ou par la lunette, et l'œil de l'observateur n'ayant

pas une sensibilité sans limite. Il est clair que ces causes d'erreur disparaissent en grande partie dans les observations des éclipses du troisième et du quatrième, quand on peut observer successivement la disparition et la réapparition.

Le demi-diamètre apparent de Jupiter vu de la Terre, même dans ses oppositions, ne dépasse guère 25″. Le rayon apparent de l'orbite du premier satellite ne dépasse donc guère 150″. La durée de la révolution de ce satellite étant à peu près 153000 secondes, l'arc apparent décrit par le satellite en une seconde ne dépasse pas

$$\frac{150'' \times 2\pi}{153000}$$

ou environ un deux-centième de seconde d'arc. Pour le quatrième satellite, un calcul semblable donne un quatre-centième de seconde; pour les autres des nombres intermédiaires entre les deux précédents.

Les observations des éclipses de ces satellites paraissant exactes à un petit nombre de secondes de temps près, on voit que ces observations sont plus précises que ne pourraient l'être les mesures micrométriques les plus soignées.

Ajoutons, pour montrer à quel degré de précision peut prétendre la comparaison de la théorie et des observations, que l'incertitude d'une seconde de temps correspond pour le premier satellite à un déplacement jovicentrique de huit secondes d'arc, d'une seconde d'arc pour le quatrième.

223. Inégalité à longue période des éclipses des trois premiers satellites. — Dans les arguments

$$2(l_1 - l_2), \qquad l_1 - l_2, \qquad l_2 - l_3$$

des inégalités principales des trois premiers satellites, on peut remplacer les longitudes moyennes l_1, l_2, l_3 par les longitudes synodiques l'_1, l'_2, l'_3, respectivement égales à

$$\begin{aligned}&(n_1 - N)t + \varepsilon_1 - E,\\ &(n_2 - N)t + \varepsilon_2 - E,\\ &(n_3 - N)t + \varepsilon_3 - E,\end{aligned}$$

où $Nt + E$ désigne la longitude moyenne jovicentrique du Soleil.

Désignons par ω les différences $n_1 - 2n_2$, $n_2 - 2n_3$ égales, en vertu de la relation

$$n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0.$$

Nous aurons

$$n_1 - N - 2(n_2 - N) = \omega + N,$$
$$n_2 - N - 2(n_3 - N) = \omega + N,$$

et par suite

$$2(n_1 - N) - 2(n_2 - N) = \omega + N + (n_1 - N),$$
$$(n_1 - N) - \quad (n_2 - N) = \omega + N + (n_2 - N),$$
$$(n_2 - N) - \quad (n_3 - N) = \omega + N + (n_3 - N).$$

Les arguments des inégalités principales des trois satellites sont donc respectivement

$$(n_1 - N)t + (\omega + N)t + 2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2,$$
$$(n_2 - N)t + (\omega + N)t + \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$
$$(n_3 - N)t + (\omega + N)t + \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Dans les éclipses de l'un quelconque de ces satellites, le premier terme de l'argument correspondant est égal à la valeur qu'a eue ce terme à l'une d'entre elles, augmentée d'un nombre entier de circonférence; l'argument a donc la forme

$$(\omega + N)t + \text{const.}$$

Si donc on ne compare que des observations d'éclipses, les inégalités dont nous nous occupons sembleront avoir toutes trois pour période

$$\frac{2\pi}{\omega + N} \quad \text{ou} \quad 437^j,79;$$

N, le moyen mouvement du Soleil autour de Jupiter, étant égal à 0,00145.

224. Vitesse de la lumière. — Les éclipses du premier satellite de Jupiter ont donné la première détermination précise de la vitesse de la lumière. Les dates auxquelles nous percevons ces phénomènes sont postérieures aux dates auxquelles ils se produisent du temps que met la lumière à venir des satellites jusqu'à nous. Or la distance des satellites à la Terre dans les éclipses varie très notablement à cause du mouvement de la Terre autour du

Soleil qui peut réduire à 4, ou porter à 6,4 les distances de la Terre à Jupiter, le demi grand axe de l'orbite terrestre étant pris pour unité.

C'est de 1672 à 1676 que l'astronome danois Rœmer fit à l'Observatoire de Paris, sur le premier satellite de Jupiter, les observations d'où il conclut que la lumière met 22 minutes à traverser l'orbite terrestre. Delambre reprit l'application de la méthode de Rœmer à la discussion des éclipses observées dans une période de 140 années et trouva $8^m 13^s$ pour le temps que la lumière met à parcourir le demi grand axe de l'orbite terrestre.

La découverte de l'aberration par Bradley eut lieu de 1725 à 1728; elle fut donc postérieure de 50 ans aux travaux de Rœmer.

CHAPITRE XVI.

LA TERRE.

APERÇU HISTORIQUE CONCERNANT L'ÉTUDE DE SA FORME ET DE SES DIMENSIONS.

225. Forme de la Terre. Développement historique des idées sur la forme de la Terre. — Ptolémée (*Syntaxe,* Chap. II) admet que la Terre est, dans son ensemble, sensiblement sphérique. Pour justifier ce postulat, il dit que la Terre n'est ni plate, ni creuse, ni polyédrique, ni cylindrique. Cette argumentation, donnée déjà deux siècles auparavant par Posidonius, est manifestement insuffisante.

Les remarques classiques que Ptolémée reproduit sur la façon dont on aperçoit en mer les hauteurs situées au delà du cercle de l'horizon ne constitueraient une démonstration que si elles étaient liées à des mesures qui ne peuvent être assez précises. Cependant Ptolémée ne signale pas l'argument le plus probant que l'antiquité ait connu, la forme constamment circulaire de la limite de l'ombre de la Terre dans les éclipses de Lune. Il dit en vérité que les différences des heures observées pour une même éclipse sont proportionnelles aux distances; mais il est bien peu probable que cette assertion fût alors justifiée, les mesures de longitudes ayant été assurément fort rares dans l'antiquité.

Posidonius avait signalé un argument d'ordre physique, fondé sur les conditions d'équilibre de la masse terrestre. Regardant la Terre comme immobile, il considérait que la figure d'équilibre doit dépendre de la direction de la pesanteur, et, admettant que la verticale passe par un point fixe, le centre du monde, il concluait à la sphéricité de la surface.

De Ptolémée jusqu'à la fin du moyen âge la question ne fit aucun progrès.

Dans la seconde moitié du XVI[e] siècle, les découvertes de Co-

pernic, de Galilée et de Képler renouvelèrent les doctrines astronomiques. En 1602, Galilée trouvait les lois de la chute des corps, celles du pendule, et fondait la Mécanique. En 1666, Newton découvrait la gravitation universelle. Peu après l'astronome Picard (*Mesure de la Terre,* Paris, 1671) soupçonnait que la sphère n'est qu'une première approximation de la forme de la Terre. Huygens étudiait (1673) le pendule composé, le mouvement produit par une force centrale, et signalait l'influence de la pesanteur sur la forme de la Terre. Il admettait encore un seul centre d'attraction et, adoptant $\frac{1}{289}$ pour le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, trouvait l'aplatissement égal à $\frac{1}{576}$, de moitié trop faible. En 1686, Newton (*Principes,* Liv. III, prop. 19) jetait les premiers fondements de la vraie théorie de la figure de la Terre. Supposant le sphéroïde homogène, et regardant l'attraction sur un point comme émanée de tous les autres, il trouvait comme forme du sphéroïde l'ellipsoïde de révolution aplati, et comme valeur de l'aplatissement $\frac{1}{230}$. Dans la proposition 10 du même Livre des *Principes* il conjecture que la densité moyenne est cinq ou six fois celle de l'eau. Nous parlerons plus loin des immenses travaux par lesquels, depuis, l'aplatissement a été constaté et mesuré. Disons ici que les idées de Newton ne furent pas immédiatement admises sans conteste. Elles expliquaient cependant pourquoi Richer, à Cayenne (1672), dut, pour avoir un pendule à secondes, raccourcir d'une ligne $\frac{3}{4}$ celui qu'il avait apporté de Paris, et il n'y avait guère d'erreur possible, Richer, de retour à Paris, ayant dû allonger de nouveau son pendule. Mais les doutes ne pouvaient être aisément levés, la prolongation de l'arc de méridien de Picard, d'Amiens à Dunkerque par La Hire, de Paris à Collioure par Cassini, ayant donné pour le degré moyen des valeurs décroissantes avec la distance au pôle :

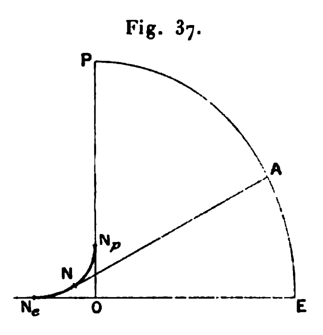
Entre Bourges et Paris	57097
» Paris et Amiens	57060
» Paris et Dunkerque	56960

Dans la *fig.* 37 la courbe N_eNN_p représente l'enveloppe des normales aux divers points d'un quart de méridien EAP, de centre O, EN_e étant la normale à l'équateur, PN_p la normale au pôle, AN la normale en un point quelconque A. Si la longueur

de l'arc de méridien correspondant à une petite différence donnée de latitude décroît de l'équateur au pôle, le rayon de courbure décroît en même temps et la courbe N_eNN_p tourne sa convexité vers OE. Par une propriété intuitive de la développée, on a

$$N_eNN_p + N_pP = N_eO + OE.$$

Fig. 37.



On a aussi

$$ON_p + N_eO > N_eNN_p,$$

d'où, par addition,

$$OP > OE.$$

La diminution, de l'équateur au pôle, de la longueur d'un arc de méridien correspondant à une même différence de latitude supposerait donc la Terre allongée au pôle.

Les doutes furent définitivement levés au milieu du XVIII[e] siècle par la mesure, dont nous parlerons plus loin, d'arcs de méridien en Laponie et au Pérou; la comparaison des valeurs obtenues pour le degré moyen : 56775 toises au Pérou, 57070 en France, 57419 en Laponie, prouva d'une manière incontestable que la Terre est aplatie au pôle, et confirma les idées de Newton.

En 1774, Maskelyne, au mont Shehallien en Écosse, détermina par une triangulation la distance de deux points situés de part et d'autre de la montagne; il calcula aussi cette distance en partant des valeurs admises pour les dimensions de la Terre et de la différence des latitudes des deux points déterminée astronomiquement. La comparaison des résultats mit en évidence une déviation de la verticale due à l'attraction de la montagne. La masse de la montagne étant connue par des considérations géologiques, la déviation mesurée pouvait donner le rapport de la masse de la Terre à celle de la montagne. La discussion des observations conduisit

Hutton (*Trans. phil.*, 1778) à attribuer à la Terre une densité moyenne égale à 4,95, conforme aux conjectures de Newton. Ces travaux de Maskelyne et Hutton sont les premiers qui aient laissé entrevoir la complication des problèmes de la Géodésie.

226. Indications sommaires concernant les recherches mathématiques relatives à la forme de la Terre. — L'exposé des recherches mathématiques concernant la figure de la Terre, c'est-à-dire la figure d'équilibre d'une masse fluide dont les éléments s'attirent suivant la loi de Newton, sortirait entièrement du cadre de cet Ouvrage. Il est essentiel pourtant de rappeler que la pesanteur en un point de la surface est la résultante des forces attractives provenant des autres points et de la force centrifuge au point considéré. C'est Huygens qui, le premier, a déterminé la force centrifuge en chaque point de la Terre et a montré qu'à l'équateur elle est $\frac{1}{289}$ de l'intensité de la pesanteur; en tout point de la Terre elle est dirigée suivant le rayon du parallèle de ce point et son intensité est proportionnelle au carré du cosinus de la latitude.

Clairaut, dans son admirable Ouvrage *Figure de la Terre*, a donné les conditions d'équilibre d'une masse fluide hétérogène animée d'un mouvement de rotation lent et formée de couches ellipsoïdales concentriques dont chacune est homogène, dont les éléments sont d'ailleurs soumis à leurs attractions mutuelles, suivant la loi de Newton; Clairaut a montré qu'une telle masse peut être en équilibre si toutefois on néglige les carrés des ellipticités et celui de la vitesse de rotation. Des nombreux résultats trouvés par Clairaut, nous signalerons les suivants : Dans la figure d'équilibre, toutes les surfaces limitant les couches sont de révolution autour de l'axe de rotation, sont aplaties suivant cet axe et tous les points ont la même vitesse angulaire. Les ellipticités et leurs rapports aux cubes des petits axes vont en augmentant de la surface au centre.

Soient e l'ellipticité de la surface extérieure (rapport de la différence des axes au plus petit), g la pesanteur en un point de cette surface de latitude ψ, g' et $g'\varphi$ les valeurs de g et de la force centrifuge à l'équateur; on a la relation

$$\frac{g-g'}{g'} = \left(\frac{5}{2}\varphi - e\right)\sin^2\psi,$$

connue sous le nom de *théorème de Clairaut*. De plus e est compris entre $\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{5\varphi}{4}$.

Laplace a donné, dans la *Mécanique céleste*, une théorie analytique très différente de celle de Clairaut, dont il a retrouvé d'ailleurs les résultats.

Ajoutons que M. Hamy a démontré récemment qu'une masse fluide en équilibre relatif, dans laquelle la densité croît de la surface au centre, ne peut rigoureusement admettre des ellipsoïdes comme surfaces de séparation des couches successives.

En fait, il semble bien que la constitution des corps célestes ne soit pas fort régulière, si du moins l'on en juge par ce que l'on constate dans les régions de la Terre voisines de la surface. La Géodésie montre qu'il est impossible de représenter la surface de la Terre par une équation simple : Gauss remarque qu'eu égard aux irrégularités constatées de la distribution de la densité, on doit non pas être surpris de ce résultat, mais bien plutôt s'étonner que les irrégularités de la surface ne soient pas plus grandes.

De plus, la masse terrestre n'est pas simplement une masse fluide en équilibre relatif; on ne peut affirmer que la masse fluide interne soit rigoureusement en équilibre, et il est incontestable qu'il y a un reste de mobilité de la croûte solide. Seulement les écarts dont il s'agit sont presque insensibles.

Sans insister davantage sur les développements de la théorie mathématique de la figure de la Terre, nous poursuivrons l'exposé historique des principaux travaux de mesure exécutés en vue d'en déterminer la forme et les dimensions.

227. Indication des mesures successives d'arcs de méridien. — Les anciens ont laissé diverses évaluations de la circonférence de la Terre : Aristote, Archimède, Eratosthène, Posidonius, Ptolémée. De ces mesures, celle d'Eratosthène paraît seule fondée sur des mesures sérieuses. Le Soleil, le jour du solstice, était au zénith de Syène; à Alexandrie, le même jour il en était à $7°12'$. La distance des deux villes avait été mesurée peut-être par des *bématistes* dont la profession était la mesure des distances d'après le compte des pas. Eratosthène trouva pour la circonférence de la Terre, d'après Cléomède, 250000 stades, d'après Hipparque

252000. M. P. Tannery, dans ses *Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne*, estime qu'Eratosthène a pu prendre, pour l'évaluation de la différence de latitude et pour tenir compte de la différence (3 degrés) de longitude, plus de précautions que ne l'indiquent les auteurs qui ont rapporté sa mesure. Discutant suivant les idées de Fr. Hultsch (*Grieschische und römische Metrologie*) les diverses valeurs du stade, M. P. Tannery trouve comme valeur probable du stade d'Eratosthène $157^{m},50$, ce qui, pour 252000 stades, donne 39690^{km}.

Vers 833, des astronomes arabes, sur l'ordre du Kalife Al-Mamoun, mesurèrent un arc d'un degré dans le désert de Sandgiar, entre Racca et Palmyre, et trouvèrent 56 milles arabes $\frac{2}{3}$, ou 58700 toises. Il est d'ailleurs impossible d'attacher grande confiance à cette mesure.

En 1528, un médecin français, Fernel, s'avança au nord de Paris, vers Amiens, en comptant le nombre de tours de roue de sa voiture. Il trouva pour l'arc d'un degré 56746 $\frac{2}{3}$ toises anciennes ou 57077 toises nouvelles (la toise ayant été raccourcie de 5 lignes en 1668). Lalande, reprenant les calculs, trouva 57070 toises, nombre d'une exactitude surprenante eu égard à l'imperfection du procédé de mesure.

Snellius, mathématicien hollandais, eut l'idée de déterminer par une triangulation (1615) la distance méridienne des parallèles de deux points, Alkmaer et Bergen-op-Zoom, et par des mesures astronomiques la différence des latitudes de ces points. Il poussa ensuite cette triangulation jusqu'à Malines. Cette dernière mesure, recalculée par Musschenbrœk en 1729, donna pour l'arc d'un degré 57033 toises; Snellius avait trouvé d'abord 55100 toises.

Cette méthode, la seule qui soit appliquée aujourd'hui, ne fut pas adoptée de suite, car en 1636, un marin anglais, Norwood, détermina la différence de latitude de Londres et York par les hauteurs du Soleil, les 11 juin 1633 et 1635. Il mesura la route à la chaîne en tenant compte des déviations du méridien mesurées à la boussole et des différences de niveau. Il trouva 57424 toises. En 1645, Riccioli et Grimaldi trouvèrent 62650 toises en mesurant les distances zénithales mutuelles de deux points situés à des altitudes connues, très inégales, d'où ils déduisirent l'angle des verticales de ces deux points; la distance horizontale de ces deux

points avait été mesurée par une triangulation. Ce procédé était gravement affecté par les réfractions.

Nous avons mentionné au n° 225 l'Ouvrage où Picard a donné la longueur de l'arc de méridien compris entre Paris et Amiens. Picard est le premier qui ait pris les précautions nécessaires. Il effectua une triangulation; il employait des lunettes à réticule, mesurait les angles avec un quart de cercle à lunette, prenait les distances zénithales avec un grand secteur zénithal construit tout exprès, calculait la réduction des angles au centre de la station. Il avait mesuré une base avec une toise étalonnée. Il trouva 57060 toises. La discussion des observations de Picard fut reprise au siècle suivant. On reconnut que sa toise était plus courte de 0,001 que celle de l'Académie; Lemonnier appliqua à ses observations astronomiques l'aberration et la nutation, Lacaille tint compte de la réfraction et trouva finalement une valeur du degré très voisine de celle donnée par Picard. Les erreurs inévitables commises par Picard s'étaient presque entièrement compensées.

Au milieu du XVIIIe siècle, l'Académie des Sciences, comme il a été dit, fit mesurer deux arcs de méridien, l'un près du pôle, l'autre à l'équateur, et fit reprendre par Cassini de Thury la mesure de la méridienne de France. Ce dernier travail fut exécuté, en grande partie, par La Caille qui en publia les résultats dans la *Méridienne vérifiée,* Ouvrage qui servit de fondement à la première Carte de France, dite *Carte de Cassini,* publiée par souscription nationale au nom de l'Académie des Sciences, de 1744 à 1793.

Godin, Bouguer, La Condamine allèrent au Pérou où, après neuf années d'efforts extraordinaires, de 1735 à 1743, ils parvinrent à mesurer un arc de $3°7'3''$, dans la vallée formée entre Quito et Cuença par les deux chaînes de la Cordillère des Andes. L'extrémité nord était à la station de Cotchesqui, non loin de Quito, à $0°2'31'',22$ de latitude nord (d'après une revision des observations faite par Delambre), l'extrémité sud à Tarqui, par $3°4'31'',9$ de latitude sud. On mesura une base de 6 milles, 7, vers l'extrémité nord, à l'altitude 7850 pieds; la base sud, de 4 milles, 6, était à 1000 pieds plus haut que la première. Les sommets de certains triangles étaient à 14000 pieds. La mesure de la base nord prit vingt-cinq jours, celle de la base sud dix. Chaque base était me-

surée deux fois simultanément, les savants qui composaient l'expédition s'étant divisés en deux groupes qui mesuraient en sens inverse. On employait des règles à bout que l'on comparait chaque jour à une règle de fer poli de 17 lignes de largeur sur 4,50 d'épaisseur connue depuis sous le nom de *toise du Pérou,* que Godin avait ajustée sur la toise étalon fixée, en 1668, au pied de l'escalier du grand Châtelet de Paris. Godin en avait fait faire une seconde (nommée depuis *toise du Nord*), aussi identique que possible à la première, qui devait être conservée à l'Académie, et qui fut emportée par l'expédition chargée de mesurer un arc en Laponie. La Condamine étudia soigneusement les divisions des quarts de cercle très défectueux qui servirent à la mesure des angles, ce qui permit de réduire, sauf dans quatre cas, à moins de 10″, l'erreur de la somme des angles de chaque triangle. La détermination des latitudes avec des secteurs de 12 ou 18 pieds de rayon coûta plusieurs années de travail; nombre d'observations furent rejetées et finalement l'amplitude de l'arc mesuré fut conclue d'observations simultanées de ε Orion faites du 29 novembre 1742 au 15 janvier 1743 par Bouguer à Cotchesqui et La Condamine à Tarqui. Bouguer, La Condamine et les officiers espagnols publièrent de ce voyage trois relations distinctes : Bouguer, la *Figure de la Terre,* La Condamine, *Les trois premiers degrés de l'hémisphère austral;* les Espagnols, *Voyage historique dans l'Amérique méridionale.*

En juillet 1736, Maupertuis, Clairaut, Camus, Lemonnier, l'abbé Outhier et Celsius, professeur à Upsal, se rendirent à Tornea, ville située à l'embouchure de la rivière du même nom, au nord du golfe de Botnie. La rivière court sensiblement du nord au sud entre de hautes montagnes. L'arc mesuré s'étendit entre Tornea au sud et Kittis au nord. La triangulation comprenait, outre les observations extrêmes, sept stations situées sur le sommet de montagnes préalablement défrichées, où l'on employait comme signaux des cônes formés de grands arbres dépouillés de leur écorce et peints en blanc. En outre, on avait rattaché à la triangulation les deux extrémités d'une base située vers le milieu de la suite des triangles et mesurée sur la rivière gelée elle-même. La mesure de la base fut faite, comme celle du Pérou, par deux groupes, au moyen de huit règles de 5 toises comparées à la *toise*

du Nord. La double mesure de la base, de 8,9 milles, occupa sept jours, du 21 au 28 décembre, en pleine nuit. Les deux mesures concordèrent, à 4 pouces près. Au Pérou, les écarts n'avaient pas dépassé 3 pouces. On mesura les angles des triangles au moyen d'un quart de cercle de 2 pieds de rayon pourvu d'un micromètre. Le centre de l'instrument était toujours placé au centre de la station. La mesure des angles avait duré soixante-trois jours. On détermina l'amplitude de l'arc par des observations de δ Dragon, faites près du zénith d'abord à Kittis, puis à Tornea, au moyen d'un secteur zénithal de 9 pieds de rayon et 5°30′ d'amplitude. L'arc fut trouvé de 57′26″,93. L'azimut fut mesuré à Kittis par les passages du Soleil aux plans verticaux des deux stations les plus voisines, Niemi et Pullingi.

Le degré ayant été trouvé bien plus grand qu'à Paris, on détermina une seconde fois l'amplitude et l'azimut à Tornea, en mesurant α Dragon. On obtint l'azimut à Tornea en observant un jour l'angle entre le Soleil levant et l'un des signaux voisins, Niwa, le lendemain l'angle entre le Soleil couchant et un autre signal, Kakama. On trouva, entre l'azimut ainsi déterminé et celui qu'avait donné le calcul de la triangulation en partant de l'azimut déterminé à Kittis, un écart de 34″. L'écart entre les déterminations astronomiques et les calculs géodésiques semblait indiquer que l'arc était trop long de 200 toises, ou l'amplitude trop faible de 12″. La relation du voyage a été publiée par l'abbé Outhier, en 1736-37, sous le titre : *Journal d'un voyage au nord.* En 1801, une expédition suédoise, organisée sous la direction de Svanberg pour reprendre la mesure du même arc, trouva 220 toises de moins pour le degré. Svanberg avait retrouvé à peu près les stations de Maupertuis; mais il n'établit pas ses observatoires extrêmes aux mêmes points, de sorte que l'amplitude de l'arc de Maupertuis n'a pas été vérifiée (Svanberg, *Exposition des opérations faites en Laponie;* Stockholm, 1805).

Depuis la fin du xviiie siècle des travaux géodésiques considérables ont été conduits à bonne fin.

En 1783, la Société royale de Londres chargea le général Roy de relier Paris à Greenwich, de concert avec Cassini, Méchain et Delambre. Les astronomes français employèrent pour la première fois, dans cette opération, le cercle répétiteur inventé par Borda;

les Anglais se servirent de théodolites de Ramsden de 3 pieds de diamètre. Pour la mesure de la base on employa des tubes de verre de 20 pieds de long dont la dilatation avait été étudiée, et dont la température était donnée par deux thermomètres. Le degré moyen fut 27404,0 pieds anglais.

En mars 1791, la Convention ayant, sur la proposition d'une commission formée de Borda, Lagrange, Laplace, Monge et Condorcet, défini l'unité de longueur légale, *le mètre,* comme étant la 40000e partie de la longueur d'un méridien terrestre, décida la mesure de l'arc de méridien compris entre Dunkerque et Barcelone. Delambre mesura la partie située au nord du 45e degré de latitude, Méchain la partie sud. Leurs travaux, commencés en juin 1792, furent continués au milieu des plus grands dangers. Deux bases furent mesurées, à Melun et à Carcassonne, au moyen de quatre règles construites par Borda, dont l'une fut comparée à la toise du Pérou. Les angles furent mesurés au moyen de quatre cercles répétiteurs de Lenoir. On détermina astronomiquement cinq azimuts, à Watten, Paris, Bourges, Carcassonne, Montjouy. Les écarts entre les azimuts mesurés et calculés atteignirent 39″. Delambre ne put les expliquer. La comparaison des résultats avec des valeurs de l'arc du Pérou donna pour le mètre $443^l,298$. Le travail de Delambre et Méchain fut publié, en 1806, dans l'Ouvrage intitulé : *Base du système métrique décimal.* L'arc français fut prolongé par Biot et Arago jusqu'à l'île de Formentera.

228. Travaux géodésiques modernes. — Récemment, les officiers du *Dépôt de la Guerre,* actuellement *Service géodésique de l'Armée,* notamment le général Perrier, MM. Bassot et Desforges, ont repris toute la triangulation française; la *Commission de la Carte d'Espagne,* aujourd'hui *Institut de Géographie et de Statistique,* sous la direction du général Ibañez, a poursuivi la triangulation en Espagne et les officiers des deux nations ont opéré la jonction de l'Espagne à l'Algérie. Ces travaux ont été exécutés au moyen d'instruments construits par Brunner père et par ses fils, appareils dont nous indiquerons plus loin les principes; nous nous bornerons à dire ici que la méthode de la répétition des angles a été abandonnée et remplacée par la méthode de la réitération, imaginée, en 1867, par le général, alors capitaine Perrier.

En 1838, Bessel et Bæyer publièrent l'Ouvrage intitulé : *Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung,* etc.; ils avaient employé pour la mesure des angles deux théodolites, l'un de 15 pouces, l'autre de 12 pouces de diamètre, le second répétiteur; pour celle du temps et des latitudes un instrument des passages de 1 pouce $\frac{3}{4}$ d'ouverture et 21 pouces de distance focale, et pour la mesure de la base (935 toises) un instrument combiné par Bessel, analogue à celui de Borda. Les observations furent discutées par la méthode des moindres carrés. Bessel et Bæyer avaient mesuré une chaîne de triangles orientée du nord-est au sud-ouest, destinée à relier les triangulations de l'Europe occidentale avec celle de la Russie. Le degré mesuré n'était ni un degré de méridien, ni un degré de parallèle, et la détermination des latitudes et azimuts extrêmes permettait de déduire les deux demi-axes de l'ellipsoïde terrestre.

Des travaux importants ont été exécutés aux Indes par des officiers anglais; ces travaux ont été commencés de 1808 à 1823, successivement par les colonels Lambton et Everett, au moyen de deux chaînes d'acier, un secteur zénithal de Ramsden, un théodolite de 18 pouces et un autre de 36 pouces. Ce dernier avait été faussé, en 1808, par accident et plus ou moins insuffisamment réparé; vers 1830, tous ces instruments furent remplacés par deux théodolites de 36 pouces, deux cercles verticaux de même diamètre, et les chaînes pour la mesure des bases par un appareil de Colby; les travaux ont été poursuivis depuis par Waugh, puis par Walker. Dix bases ont été mesurées; les déterminations de Lambton s'étendant du cap Comorin (lat. 8°) à Damargida (18°3′) ont été reprises et poussées jusqu'à la latitude de 32°. L'influence de l'Himalaya s'est manifestée nettement, produisant sur la latitude de la station de Takalkhera une déviation d'environ 5″. Les travaux exécutés aux Indes ont été publiés, par Everett, dans les Ouvrages suivants : *An account of the measurement of an arc of the meridian between the parallels of* 18° 3′ et 24° 7′, Londres, 1830; et *An account of the measurement of two sections of the meridional arc of India,* 1847, et, depuis, par Walker.

W. Struve a publié, en 1868, deux Volumes intitulés : *Arc du méridien de* 25° 20′ *entre le Danube et la mer Glaciale, mesuré depuis* 1816 *jusqu'à* 1855. La triangulation comprend 158 tri-

angles sans compter ceux qui ont servi au rattachement des dix bases; la latitude et l'azimut ont été déterminés en treize stations. Les mesures ont été effectuées de 45°20′ à 56°30′ de la latitude par le général de Tenner, de 56°30′ à 65°50′ par W. Struve, de 65°50′ à 68°54′ par Selander, de 68°54 à 70°40′ par Hansteen.

En Angleterre, le capitaine Clarke a publié, en 1858, dans l'Ouvrage intitulé : *Account of the observations and calculations of the principal triangulation,* etc., les travaux commencés, en 1783, par le général Roy, continués de 1809 à 1846 par le colonel Colby et terminés sous la direction du général James. La contrée est couverte d'un vaste réseau de Scilly aux Shetland. La triangulation du nord de la France a été reliée à celle d'Angleterre par la Belgique. L'arc français primitif de Paris à Amiens est donc remplacé par une vaste triangulation s'étendant de l'Algérie aux Shetland.

Au Cap de Bonne-Espérance, Sir Thomas Mac-Lear a vérifié et étendu, entre les latitudes 29°44′ et 34°31′, un arc de méridien primitivement mesuré par La Caille (*Verification and extension of La Caille's arc of meridian at the Cape of Good Hope,* by Sir Thomas Mac-Lear; London, 1866).

En Europe, les arcs français et russes ont été reliés par les soins de l'Association géodésique internationale. Une triangulation commencée en 1857 par W. Struve a été effectuée sur le parallèle de 52° de latitude de l'Oural à l'Irlande sur 68°31′ de différence de longitude.

Des travaux importants, publiés dans les rapports annuels de *The United States Coast and Geodetic Survey,* sont exécutés aux États-Unis; d'autres l'ont été au Brésil et au Chili.

Nous n'avons, dans ce qui précède, insisté que sur les travaux relatifs aux territoires les plus étendus; nous devons cependant rappeler la triangulation du Hanovre par Gauss, antérieurement aux travaux de Baeyer et Bessel.

CHAPITRE XVII.

FORME DE LA TERRE : INSTRUMENTS ET MODES DE MESURE.

MESURE DES BASES ET DES ANGLES : RÈGLES, ALTAZIMUT, SIGNAUX. DÉTERMINATION, DANS UN OBSERVATOIRE OU EN VOYAGE, DE L'HEURE, DE LA LATITUDE, DE LA LONGITUDE; AZIMUT D'UN SIGNAL GÉODÉSIQUE.

---

229. Instruments de mesure des bases. — La mesure d'une base de quelques kilomètres de longueur est une opération difficile qui exige les instruments les plus précis et les précautions les plus minutieuses.

Nous supposerons d'abord, pour la facilité de l'exposition, que l'on ait réussi à tracer sur le sol, dans un plan vertical, une ligne horizontale et qu'on en veuille mesurer directement la longueur.

On a longtemps employé un procédé consistant à placer l'une à la suite de l'autre des règles de longueurs connues, et à mesurer les intervalles qui séparent les extrémités successives de ces règles. Les règles sont à bouts ou à traits. Dans le dernier cas, les traits sont tracés sur des lames d'argent, d'or ou de platine, incrustées dans les règles. Dans le premier les bouts sont des cylindres terminés par des disques plans ou convexes en métal poli.

La longueur comprise entre les traits et les bouts de chaque règle est déterminée une fois pour toutes par une comparaison avec une règle étalon. L'unité universellement adoptée est la toise *du Pérou*. Il résulte des recherches de M. C. Wolf, *que cette toise et la toise du Nord existent à l'Observatoire de Paris, avec des caractères irrécusables d'authenticité et dans un état de conservation qui permet de les considérer comme identiques à ce qu'elles étaient à l'époque même de leur construction*.

Lenoir construisit, dès 1792, un grand comparateur en cuivre de 13 pieds de long, pourvu d'un curseur sur lequel sont tracées des divisions en $\frac{1}{10000}$ de toise; des verniers tracés d'espace en es-

pace sur la grande règle permettent de diviser chaque $\frac{1}{10000}$ de toise en dix parties. C'est au moyen de cet instrument, qui est conservé à l'Observatoire de Paris, que furent comparées la toise du Pérou, la toise du Nord, les règles de Borda dont nous allons parler dans un instant, le mètre provisoire, en cuivre, construit avant l'achèvement des opérations de Méchain et Delambre et dont la longueur devait être 3 pieds 11 lignes, 44 de la toise du Pérou et enfin le mètre définitif en platine, construit par Jannetti et déposé aux Archives, auquel ont été comparés depuis, directement ou indirectement, toutes les unités de longueur. Disons seulement qu'il existe cinq copies directes de la toise du Pérou, comparées et certifiées par Arago : l'une construite en 1821, pour Struve, est conservée à Poulkova; une autre, en 1823, pour Bessel, à Königsberg; deux en 1821 et 1831 pour le Danemark sont à Copenhague; enfin, la toise des États-Unis, déclarée exacte par Arago et Bouvard en 1813, se trouve à Washington.

Les règles usitées en Géodésie, étant d'abord comparées à une règle étalon, à une température connue, les lois de la dilatation des métaux font connaître leur longueur à toute température donnée. A cet effet, ces règles sont pourvues de thermomètres très sensibles, étudiés avec le plus grand soin, dont on lit la température pendant les opérations. Il est indispensable de faire tout ce qui est possible pour que la température de la règle soit la même que celle des thermomètres dont la règle est pourvue; l'essentiel à cet égard est d'éviter les variations brusques de température, et, à cet effet, on surmonte les règles d'un petit toit en bois qui les abrite des rayons du Soleil.

Borda a imaginé de faire de la règle elle-même un appareil thermométrique en la composant de deux règles parallèles, placées l'une au-dessus de l'autre, reliées par une extrémité; la règle inférieure, en platine, de 6 lignes de largeur et une d'épaisseur, porte vers son extrémité libre, un vernier qui sert à subdiviser à peu près au $\frac{1}{100000}$ de toise, des divisions tracées sur la règle supérieure, en cuivre. La lecture de ce vernier dépend de la température, en raison de la différence de dilatation des métaux qui constituent les deux règles. Borda avait construit ainsi pour Delambre et Méchain quatre règles bimétalliques en platine et cuivre, qui avaient, comme nous l'avons dit plus haut, été directement comparées à la toise du

Pérou. Colby imagina de détruire l'effet de la dilatation en reliant par des tiges articulées, prolongées au delà de l'une des articulations, les extrémités de deux règles parallèles formées de métaux différents, et prenant pour longueur de la règle la distance des extrémités des deux tiges. Il est aisé de voir qu'il est possible de déterminer la longueur des tiges articulées de telle façon que la distance de leurs extrémités soit indépendante de la température. L'intervalle entre deux règles successives était mesuré par un appareil muni de deux microscopes maintenus à distance invariable par la compensation des dilatations de deux plaques de cuivre et de fer qui les supportaient. En fait, l'appareil Colby, employé deux fois en Angleterre et dix fois aux Indes, n'a pas donné les résultats précis qu'en attendait son inventeur; la conception de Borda, au contraire, est encore appliquée aujourd'hui.

La mesure de l'intervalle compris entre deux règles consécutives s'est faite par divers procédés. Dans les règles de Borda, l'extrémité libre de la règle de platine, au delà de l'extrémité de la règle de cuivre, porte une petite réglette divisée en $\frac{1}{10000}$ de toise mobile dans une rainure et qui sert à mesurer, par un vernier au $\frac{1}{10}$, la distance entre l'extrémité de la règle de platine et l'extrémité de la règle suivante.

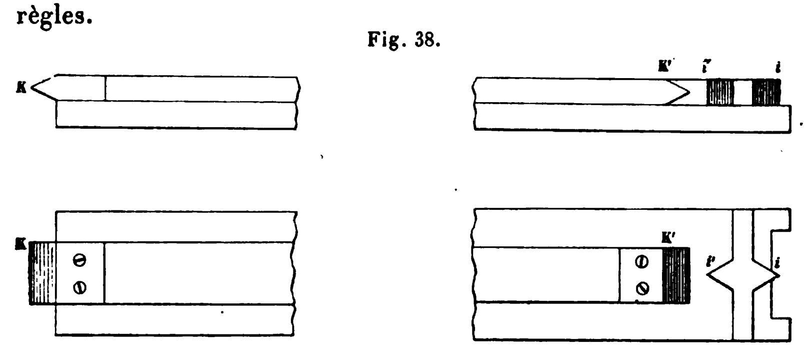
Bessel a modifié un peu cette combinaison. Ses règles sont en fer et zinc. La règle de zinc placée en dessus ayant 2 toises de long, 6 lignes de largeur et 3 d'épaisseur se termine par deux couteaux horizontaux KK' et la règle de fer un peu plus longue, de même épaisseur et deux fois plus large porte un double couteau vertical ii'.

La *fig.* 38 représente une règle en projections verticale et horizontale; vers l'extrémité K les deux règles fer et zinc sont invariablement liées. La longueur de la règle est la distance des couteaux Ki. La mesure de l'intervalle K'i' fait connaître la température des règles. Cet intervalle et celui qui sépare l'extrémité i d'une règle de l'extrémité K de la suivante se mesurent au moyen d'un coin en verre portant 120 traits sur une longueur de 41 lignes, l'épaisseur du coin à l'une des extrémités étant $0^l,8$, à l'autre 2 lignes; on peut apprécier le dixième de division correspondant à peu près à une différence d'épaisseur de $\frac{1}{1000}$ de ligne.

Struve avait pourvu l'extrémité de chaque règle d'un levier coudé mobile dont le bras court terminé par une sphère polie peut

butter contre le bout également poli de la règle suivante, tandis que le bras long forme alidade sur un arc divisé. On comprend que la lecture équivaut à la connaissance de la distance des deux règles.

Fig. 38.



L'appareil construit pour les États-Unis d'Amérique par le professeur Bache, en 1845, offre une combinaison des principes appliqués dans tous les appareils précédents.

Aujourd'hui, en France, le Service géographique de l'Armée emploie un appareil à règles bimétalliques semblable à celui qui a été construit par Brunner père pour le Service géodésique d'Espagne vers 1856, appareil dont la description publiée par MM. Ibañez et Saavedra, a été traduite en français par M. Laussedat sous le titre : *Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la Commission de la Carte d'Espagne*. Un appareil analogue, mais à une règle monométallique, avait été construit quelques années auparavant par un ingénieur piémontais Porro.

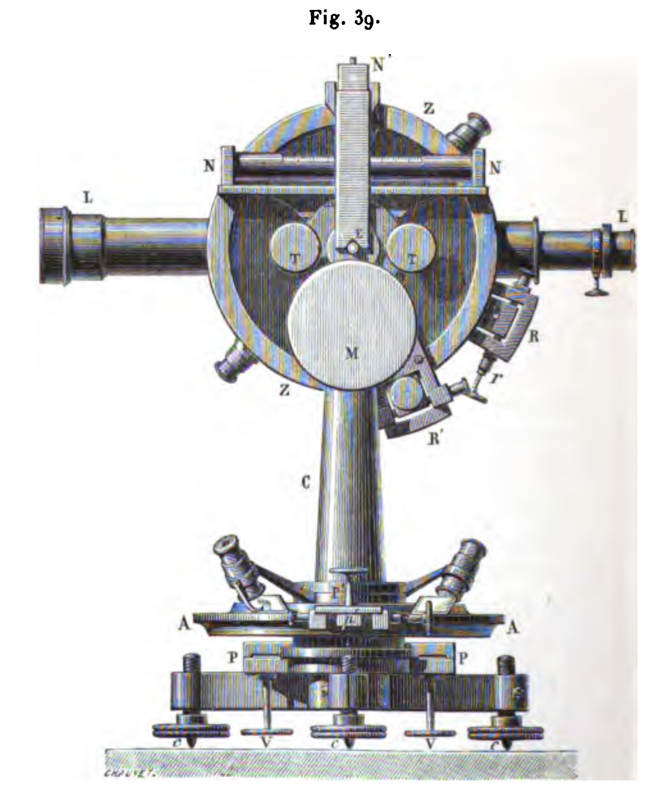
L'appareil actuel se compose d'une règle de platine, formant thermomètre métallique avec une règle en cuivre, les deux règles étant fixées en leurs milieux. Ces règles reposent sur des galets portés par un banc en fer, lequel se place sur des supports mobiles établis sur des trépieds. D'autres trépieds T portent des cercles divisés C, aux centres desquels sont disposés des microscopes micrométriques. Ces microscopes divisent la base en intervalles un peu plus courts que la règle et dont on détermine la longueur en plaçant le banc entre deux microscopes, au moyen desquels on observe les divisions gravées sur les règles. On aligne les centres des cercles C au moyen d'une lunette et de mires que l'on dispose à la place même que doivent occuper les microscopes.

Un micromètre dont la lunette est pourvue permet de mesurer la déviation si l'alignement n'est pas parfait. Des niveaux placés sur la règle servent à mesurer son inclinaison.

Si l'on désigne par i l'inclinaison (ou la déviation), la correction à apporter à la longueur mesurée pour avoir celle que l'on aurait obtenue si la règle avait été horizontale (ou exactement orientée) est $l\cos i - l = -2l\sin^2\frac{i}{2} = -\frac{1}{2}li^2$. Si l'on suppose $i = 0{,}001$, cette correction est un demi-millionième, de sorte que si l'on n'en tenait aucun compte on commettrait sur une base de $10\,000^{m}$ une erreur maximum de 5^{mm}. Si c'était $0{,}01$, l'erreur serait cent fois plus grande.

230. Mesure des angles. — On emploie aujourd'hui dans la me-

Fig. 39.



sure des angles le théodolite (*fig.* 39 et 40) qui permet de mesurer les

différences d'azimut et les distances zénithales. On mesure donc, avec cet instrument, non pas l'angle sous lequel d'une station A on voit deux stations B et C, mais l'angle formé par les deux plans passant par la verticale en A, l'un par le point B, l'autre par le point C. Ainsi qu'il a été expliqué, la verticale en A n'est pas ver-

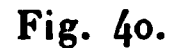
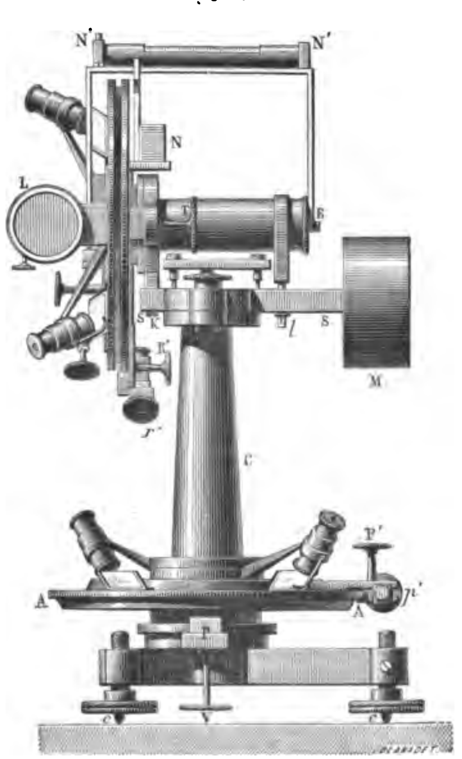


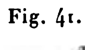
Fig. 40.

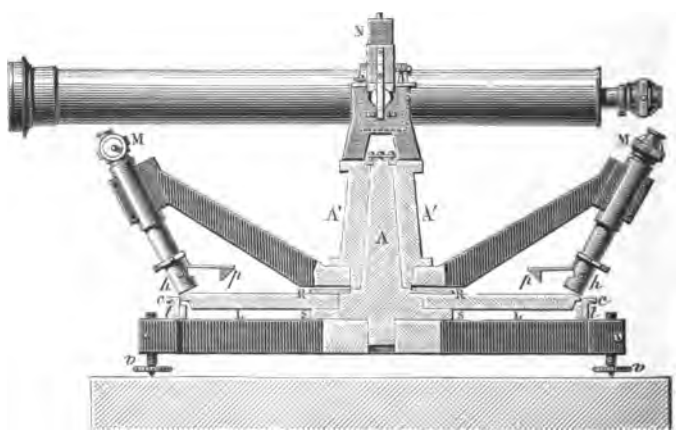


ticale en tous ses points, mais seulement au point A, la ligne issue de A, et normale en tous ses points aux surfaces de niveau qu'elle y rencontre, étant généralement une ligne à double courbure; néanmoins la déviation est pratiquement insensible et l'angle dièdre mesuré par le théodolite est, sans erreur sensible, l'angle formé par les plans verticaux en A' passant par B et C, A' désignant la projection de A sur le *géoide* (n° 247).

Le théodolite permet aussi de mesurer les distances zénithales

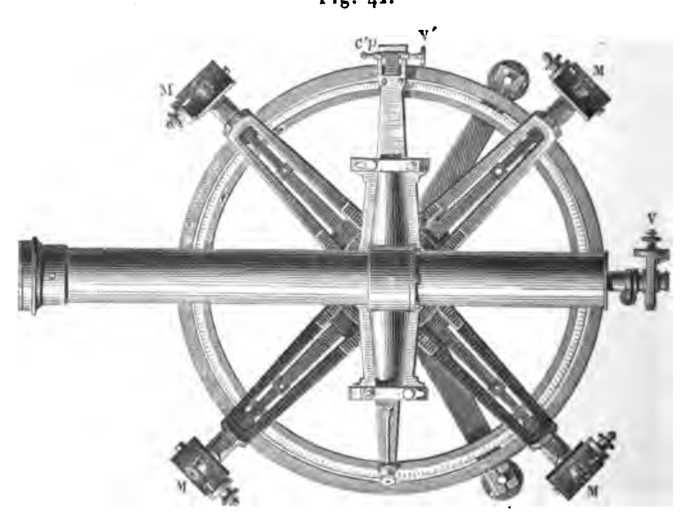
des directions AB, AC, distances zénithales qu'il est nécessaire de connaître si l'on détermine, soit avec précision le nivellement


Fig. 41.



géodésique, soit à peu près, pour le calcul de la correction résultant de l'inclinaison de l'axe de rotation de la lunette. Si le nivel-

Fig. 42.



lement est connu, on emploie pour la mesure des distances zénithales un instrument de petites dimensions et pour celle des

azimuts un cercle azimutal dépourvu de cercle vertical tel que celui qui est représenté aux *fig.* 41 et 42.

231. **Méthode de la réitération.** — On applique à la lecture des cercles des théodolites la méthode de la réitération, qui consiste à recommencer la lecture d'un angle en prenant pour origine, successivement, sur le limbe, des traits équidistants divisant la circonférence en parties égales. Il est nécessaire, pour que l'application de cette méthode soit possible, que l'on puisse modifier à volonté la position des cercles par rapport aux index. D'après ce qui a été dit au Tome I de cet Ouvrage (n° 180), au sujet des erreurs de division, la moyenne de n résultats obtenus par la méthode de la réitération, si le cercle est pourvu de p microscopes, est indépendante des $np-1$ premiers termes de la série trigonométrique qui représente la loi des erreurs périodiques; si le nombre np des lectures est grand, les erreurs périodiques de division seront ainsi éliminées, et, d'autre part, la moyenne des lectures ne comportera, en ce qui concerne les erreurs accidentelles, qu'une erreur moyenne insensible.

232. **Description du théodolite réitérateur de Brunner.** — Un axe vertical légèrement conique fait corps avec un pied porté par trois vis calantes. Il passe par le centre d'un cercle horizontal A qui peut, à volonté, tourner autour de lui ou lui être invariablement fixé par des pinces P serrées par des vis V. Sur l'axe vertical s'emmanche exactement une colonne creuse C faisant corps, à sa partie inférieure, avec un plateau circulaire, emboîté dans le cercle A, et portant quatre verniers destinés à servir d'index à ce cercle. A sa partie supérieure, cette colonne s'élargit en une plate-forme horizontale sur laquelle une pièce S est serrée par deux vis. Cette pièce sert de support aux coussinets d'un axe de rotation horizontal E. Ces coussinets peuvent être réglés par une vis butante K et une vis calante L, de façon que l'axe E, soit perpendiculaire à l'axe vertical. A l'axe horizontal sont invariablement liées une lunette L et une plate-forme portant quatre verniers servant d'index à un cercle divisé Z centré sur l'axe horizontal E et pouvant, à volonté, tourner autour de cet axe, ou être invariablement fixé, par les vis, à la pièce fixe qui porte les coussinets. Un niveau N pouvant d'ailleurs tourner autour de l'axe horizontal ou être fixé

au cercle vertical par une vis R′ est pourvu, une fois fixé, d'un lent mouvement de rappel par une vis r'. Un autre niveau mobile N′ peut s'appuyer, par ses deux pieds verticaux, sur l'axe de rotation E. Enfin, le système formé de la lunette, de l'axe de rotation et des verniers, peut être calé contre ce cercle vertical par une vis R, et ensuite recevoir de petits mouvements par une vis de rappel r : on voit en M un contrepoids destiné à équilibrer le système de la lunette, du cercle vertical et des index. De même, le système formé par le manchon C et toute la partie supérieure de l'instrument peut être fixé au cercle horizontal par une vis P′, puis recevoir de petits mouvements par une vis de rappel p'.

233. **Réglage du théodolite.** — Il s'agit de rendre le premier axe vertical, et le second perpendiculaire au premier.

La première opération se fait au moyen du niveau N et des vis du pied. On amène la lunette à être horizontale et parallèle à deux de ces vis. Par le mouvement de l'une des vis, ou des deux en sens inverse, on amène la bulle au zéro. Après quoi on fait tourner le théodolite d'environ 180° autour de l'axe vertical. Si la bulle n'est plus au zéro, on l'y ramène en faisant une moitié du déplacement au moyen d'une vis du pied, l'autre moitié au moyen de la vis de rappel r'. On revient à la position initiale et, si le réglage n'est pas complet, on agit de même. Après quelques tâtonnements, le niveau est réglé et l'axe est dans un plan vertical perpendiculaire à celui qui passe par les deux vis dont on s'est servi. On tourne de 90° et, en agissant sur la troisième vis, on amène la bulle au zéro. L'axe est alors vertical. La bulle reste au zéro, quelque mouvement que l'on donne à la colonne C autour de cet axe.

On rend le second axe perpendiculaire au premier au moyen du niveau N′ que l'on doit retourner (t. I, n° 163). Ayant, dans une position du niveau, amené la bulle au zéro en agissant sur la vis calante l, on retourne le niveau et l'on ramène la bulle au zéro, si elle ne s'y trouve pas, en produisant la moitié du déplacement nécessaire au moyen de la vis l, et l'autre au moyen de la vis dont le niveau est pourvu.

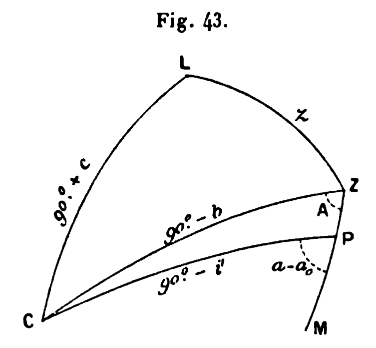
La perpendicularité des axes aux cercles correspondants est assurée par construction avec une précision suffisante.

L'axe optique de la lunette est déterminé par un réticule dont

on oriente les fils en constatant qu'un point éloigné demeure sous l'un des fils verticaux quand on modifie l'inclinaison de la lunette sans changer l'azimut. On rend l'axe optique perpendiculaire à l'axe horizontal en déplaçant, au moyen d'une vis, la plaque qui porte les fils de façon que les lectures d'azimut, faites sur un point infiniment éloigné, dans les deux positions du cercle vertical, diffèrent exactement de 180°.

234. Formules de réduction des observations d'azimut. — Le réglage ne peut être opéré qu'approximativement. Soit, sur la sphère, Z le zénith vrai, P, C, L les extrémités de l'axe vertical de

Fig. 43.



l'instrument, de l'axe horizontal et de l'axe optique de la lunette. Désignons par i, $90° - b$, $90° - i'$, $90° + c$, les arcs ZP, ZC, PC, CL. Supposons les azimuts comptés à partir de la position dans laquelle le plan ZC coïncide avec ZP et soit a_0 la lecture correspondante du cercle horizontal. L'angle dièdre PZC est l'azimut A dans la position actuelle et, si a est la lecture du cercle horizontal, l'angle MPC est égal à $a - a_0$. Soit enfin z la distance zénithale ZL et A_1 l'azimut LZP de la lunette.

L'application au triangle ZPC des relations fondamentales de la Trigonométrie sphérique donne

$$\sin b = \cos i \sin i' - \sin i \cos i' \cos(a - a_0),$$
$$\cos b \sin A = \cos i' \sin(a - a_0),$$
$$\cos b \cos A = \sin i \sin i' + \cos i \cos i' \cos(a - a_0).$$

Les angles i et i' étant fort petits, et leurs carrés étant négli-

geables, les deux premières de ces formules donnent

$$(1)\qquad \begin{cases} b = i' - i\cos(a - a_0), \\ A = a - a_0, \end{cases}$$

La considération du triangle CZL donne

$$-\sin c = \cos z \sin b + \sin z \cos b \cos(A_1 - A).$$

Visiblement, dans la position correspondante à la *fig.* 43, $A_1 - A$ est voisin de $90°$ et $90° - (A_1 - A)$ est un petit angle. Si l'on écrit

$$-\sin c = \cos z \sin b + \sin z \cos b \sin[90° - (A_1 - A)],$$

on a, en négligeant les termes du troisième ordre,

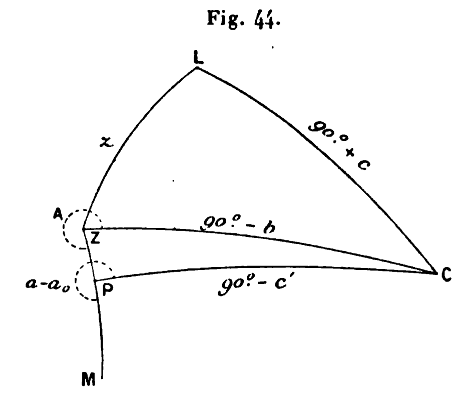
$$-c = b \cos z + (90° - A_1 + A) \sin z,$$

d'où

$$A_1 = 90° + a - a_0 + b \cot z + c \operatorname{coséc} z.$$

Il faut observer que l'on peut pointer la lunette dans la même direction en donnant à l'instrument une seconde position. Il suffit de faire tourner l'instrument autour de son axe vertical de 180°. Dans cette seconde position (*fig.* 44), le triangle PZC où les

Fig. 44.



angles en A et en P sont égaux respectivement à $360° - A$ et à $a - a_0 - 180°$ donne encore les relations (1). Dans le triangle ZLC, l'angle en z, $A - A_1$, est voisin de $90°$; on a la relation

$$\begin{aligned}-\sin c &= \cos z \sin b + \sin z \cos b \cos(A - A_1)\\ &= \cos z \sin b + \sin z \cos b \sin(90° - A + A_1),\end{aligned}$$

d'où

$$-c = b\cos z + (90^\circ - \mathrm{A} + \mathrm{A}_1)\sin z$$

et

$$\mathrm{A}_1 = -90^\circ + a - a_0 - b\cot z - c\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,z.$$

On détermine les constantes i, i', a_0 par trois nivellements de l'axe horizontal faits à des azimuts a, $a + 120^\circ$, $a + 240^\circ$. Si b_1, b_2, b_3 sont les trois inclinaisons mesurées, l'application de la formule (1) donne

$$3i' = b_1 + b_2 + b_3,$$
$$i\sqrt{3}\sin(a - a_0) = b_2 - b_3,$$
$$3i\cos(a - a_0) = b_2 + b_3 - 2b_1.$$

On détermine la collimation en visant un même objet infiniment éloigné dans les deux positions de la lunette. Soient a et a_1 les deux lectures du cercle horizontal, b, b_1 les nivellements de l'axe horizontal, z la distance zénithale lue sur l'instrument, on a

$$\mathrm{A} = \quad 90^\circ + a - a_0 + b\cot z + c\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,z,$$
$$\mathrm{A} = -90^\circ + a_1 - a_0 - b_1\cot z - c\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,z,$$

d'où

$$c = \left(\frac{a_1 - a}{2} - 90^\circ\right)\sin z - \frac{b_1 + b}{2}\cos z.$$

Si l'axe optique de la lunette, au lieu de rencontrer l'axe vertical, est placée excentriquement à l'extrémité de l'axe horizontal, à la distance r, les choses se passent comme si c était augmenté de $\frac{r}{\Delta}$, Δ étant la distance de l'objet. L'azimut doit donc être augmenté de $\frac{r}{\Delta}\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,z$ dans la première position du cercle, diminué d'autant dans la seconde.

On prend ordinairement pour origine des azimuts la direction sud du méridien. Les formules ci-dessus donnent l'azimut compté à partir du plan ZP. Soit, par rapport au méridien, $\mathcal{A}_0$ l'azimut de ce plan et $\mathcal{A}$ l'azimut de la lunette. On a

$$\mathcal{A} = \mathrm{A}_1 + \mathcal{A}_0.$$

On détermine $\mathcal{A}_0$ en mesurant l'azimut A_p d'une polaire dont l'ascension droite et l'heure de l'observation donnent l'angle horaire et dont la déclinaison est supposée connue ainsi que la latitude. Le changement de coordonnées (nº 13) donne l'azimut $\mathcal{A}_p$ et l'on a

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_p - \mathrm{A}_p.$$

235. Formule de réduction pour les distances zénithales. — Nous supposons que, la lunette étant pointée en L dans la première position de l'instrument, le cercle vertical ait donné une lecture ζ'. Soit Z la lecture du point du cercle qui correspond au zéro du niveau, p et n les lectures des extrémités de la bulle, p étant compté dans le sens où les lectures du cercle croissent. Le point du cercle qui correspond au point le plus haut du niveau a pour lecture $Z + \frac{1}{2}(p - n)\omega$, ω désignant la valeur angulaire d'une partie du niveau. Par suite, l'angle LCZ est égal à

$$\zeta' - Z - \frac{1}{2}(p - n)\omega;$$

dans la seconde position du cercle il est $Z + \frac{1}{2}(p_1 - n_1)\omega - \zeta'_1$. La considération du triangle ZLC donne, dans la première position,

$$\cos z = -\sin c \sin b + \cos c \cos b \cos\left[\zeta' - Z - \frac{1}{2}(p - n)\omega\right],$$

d'où

$$\cos z - \cos\left[\zeta' - Z - \frac{1}{2}(p - n)\omega\right] = -bc - \frac{1}{2}(b^2 + c^2)\cos(\zeta' - Z)$$

et

$$z - \zeta' + Z + \frac{1}{2}(p - n)\omega = -bc\,\text{coséc}(\zeta' - Z) - \frac{1}{2}(b^2 + c^2)\cot(\zeta' - Z),$$

et dans la seconde position

$$z - Z + \zeta'_1 - \frac{1}{2}(p_1 - n_1)\omega = -bc\,\text{coséc}(\zeta' - Z) - \frac{1}{2}(b^2 + c^2)\cot(\zeta' - Z).$$

d'où, en prenant la moyenne, $p_1 - n_1$ étant égal à $p - n$,

$$z = \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta'_1) - bc\,\text{coséc}(\zeta' - Z) - \frac{1}{2}(b^2 + c^2)\cot(\zeta' - Z).$$

Pratiquement, b peut être rendu très petit et la formule se réduit à

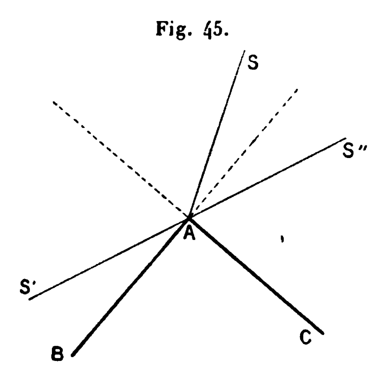
$$z = \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta'_1) - \frac{1}{2}c^2 \cot z.$$

Si l'objet observé est voisin du zénith, le dernier terme peut devenir sensible. Il convient, dans un tel cas, de rendre c négligeable en observant au fil du milieu.

236. Signaux. — Les signaux sur lesquels on fait aujourd'hui les pointés sont des appareils optiques qui réfléchissent la lumière du Soleil pour les observations du jour, ou qui envoient dans la direction de l'observateur la lumière d'une source artificielle, pour les observations de nuit. Il résulte des travaux du général Perrier que ces dernières sont généralement préférables aux observations de jour.

L'héliotrope de Gauss consiste en un système de deux miroirs rectangulaires AB, AC. Si SA représente un rayon émané du centre du Soleil et normal à l'arête A, les deux rayons réfléchis

Fig. 45.



AS′, AS″ sont manifestement en ligne droite. Une lunette est associée au système des deux miroirs de façon que son axe optique soit normal à l'arête A et que le système des miroirs puisse tourner autour de cette arête. Dans ces conditions, si l'on dirige l'axe optique de la lunette vers le point éloigné où se trouve l'observateur et que l'on incline les miroirs de façon à obtenir au centre du réticule de la lunette une image du Soleil, réfléchie par un des miroirs, on est assuré que le faisceau réfléchi par l'autre miroir passe par l'observateur. Pratiquement le système de la lunette et des miroirs peut tourner autour d'un axe vertical supporté par un pied que l'on peut incliner, si cela est utile, au moyen de trois vis calantes.

Les signaux de nuit sont des collimateurs optiques; au foyer d'une lentille de 20^{cm} de diamètre, on place la flamme d'une lampe. Le faisceau réfracté est reçu par la lunette de l'observateur.

Soient Σ la surface de la pupille de l'observateur, s la surface

de la flamme, S celle de la lentille, F la distance focale de cette lentille, I l'intensité spécifique de la flamme supposée homogène, c'est-à-dire la quantité de lumière que l'œil placé à la distance *un* reçoit de l'unité de surface de cette flamme. On voit de suite que la lentille reçoit une quantité de lumière α donnée par

$$\alpha = I \frac{s}{F^2} \frac{S}{\Sigma}.$$

A une distance focale L assez grande pour que la distance focale principale F puisse être regardée comme conjuguée de L, il se forme une image de la flamme, de surface $s\frac{L^2}{F^2}$, qui reçoit toute la lumière (α) qui a traversé la lentille. Si la pupille est placée à cette distance L, et reçoit une quantité de lumière β, on a

$$\beta = \alpha \frac{\Sigma F^2}{s L^2} = I \frac{S}{L^2}.$$

Si la lentille n'avait pas été interposée, la quantité de lumière reçue par la pupille eût été

$$\gamma = I \frac{s}{L^2}.$$

On a donc

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{S}{s}.$$

Le résultat de l'interposition de la lentille est donc de *remplacer la flamme par une source lumineuse ayant même intensité spécifique, mais ayant une surface égale à celle de la lentille et coïncidant avec cette lentille.*

Si l'objectif de la lunette de l'observateur a une surface S' et un anneau oculaire s' moindre que la pupille, l'effet de cette lunette est d'augmenter encore l'intensité lumineuse dans le rapport de S' à s'.

Le système entier du collimateur et de la lunette augmente donc l'intensité lumineuse dans le rapport de SS' *à* ss'; *la distance la diminue dans le rapport de* 1 *à* L^2.

La présence de l'atmosphère diminue d'ailleurs très notablement cette intensité et parfois empêche de voir les signaux de nuit, même à de petites distances.

237. **Stations géodésiques.** — Une station normale est établie sur le sol résistant et l'on en découvre les stations environnantes sans s'élever au-dessus du sol. On construit, en maçonnerie, une fondation large et profonde dans laquelle on noie une pierre de taille à la face supérieure de laquelle est encastré un cylindre en cuivre; sur la base supérieure de ce cylindre sont tracés deux traits rectangulaires dont le point de rencontre constitue le repère. Au-dessus on élève un pilier percé d'un trou vertical laissant voir le repère et l'on détermine avec soin le point où la verticale du repère rencontre la face supérieure du pilier. Autour de ce point on décrit des circonférences sur lesquelles on pourra placer les pointes des vis de l'héliotrope, du théodolite, ou du cercle azimutal. Au-dessus du pilier on construit un abri avec plancher isolé du pilier.

S'il est impossible d'établir une station normale, et qu'il soit nécessaire de s'élever pour apercevoir les stations environnantes, on construit une double charpente, dont l'une porte le plancher et l'abri, tandis que l'autre, enveloppée par la première, sert de support aux instruments.

238. **Détermination de l'heure.** — Nous avons vu, au Tome I de cet Ouvrage, comment, au moyen d'observations méridiennes de passage, on détermine la correction d'une pendule sidérale, et par suite l'heure. Dans les stations géodésiques il n'est pas toujours nécessaire de connaître l'heure avec une extrême précision. On peut la déterminer au moyen du théodolite.

Un procédé simple consiste à observer la hauteur h d'un astre dont on connaît la distance polaire géocentrique P. Dans le triangle sphérique ayant pour centre le zénith, le pôle et l'étoile, l'angle au pôle est l'angle horaire de l'astre. Les trois côtés du triangle, distance zénithale $90^\circ - h$ de l'astre, distance polaire P, colatitude $90^\circ - \varphi$ sont connus. L'angle horaire H est donné par la relation

$$\sin^2 \frac{H}{2} = \frac{\sin \frac{P + \varphi - h}{2} \cos \frac{P + \varphi + h}{2}}{\sin P \cos \varphi};$$

on choisit, d'après les conditions de l'observation, le signe de H.

On doit préalablement avoir corrigé la hauteur de l'astre de la

réfraction et de la parallaxe. Ayant H, l'heure sidérale t_s est

$$t_s = \alpha - \mathrm{H}.$$

La relation

$$\sin h = \sin\varphi \cos \mathrm{P} + \cos\varphi \sin \mathrm{P} \cos \mathrm{H}$$

donne

$$\begin{aligned} \delta h &= -\cos\varphi \sin \mathrm{P} \sin \mathrm{H}\, \delta \mathrm{H} \\ &= -\cos\varphi \cos h \sin \mathrm{A}\, \delta \mathrm{H}, \end{aligned}$$

A désignant l'azimut de l'astre. L'observation est d'autant plus précise que la hauteur varie plus vite. Le maximum de précision a lieu si l'astre est à la fois au premier vertical et à l'horizon. Pour éviter les inconvénients dus à l'incertitude de la réfraction et au trouble des images dans le voisinage de l'horizon, on observe vers le premier vertical et au moins à 15° ou 20° de hauteur.

On peut aussi déterminer l'heure en notant les indications de la pendule (ou du chronomètre) lors des deux passages, avant et après le méridien, d'une même étoile à une même hauteur. L'écart entre la moyenne des temps observés et l'ascension droite de l'astre est la correction de pendule. Si l'astre observé est le Soleil, il y a lieu de faire à cette moyenne une correction pour tenir compte de la variation de hauteur du Soleil entre les deux observations. Ce procédé ne nécessite ni la connaissance de la hauteur de l'astre, car il suffit de fixer l'instrument en hauteur lors de la première observation, ni, comme la première méthode, celle de la latitude du lieu.

En mer, on emploie le plus souvent la première méthode, en mesurant une hauteur du Soleil. La déclinaison du Soleil est donnée par la *Connaissance des Temps;* on utilise à cet égard l'heure de Paris donnée par le chronomètre. L'incertitude qu'offre cette heure est sans influence sensible sur la déclinaison du Soleil. L'heure déterminée par l'observation est l'heure vraie. On en conclut l'heure de temps moyen en ajoutant l'équation du temps.

On peut employer le lever ou le coucher du Soleil.

Dans ces observations, comme dans toutes les observations de hauteur faites au sextant, il y a lieu de tenir compte de la *dépression de l'horizon,* c'est-à-dire de l'angle que forme avec le plan perpendiculaire à la verticale, la tangente menée par la position de l'observateur à la surface de la Terre. Si z est la distance zénithale observée de cette tangente, r la réfraction atmosphérique

correspondante, la dépression vraie D est $z+r-90^\circ$. Si l'on désigne par h l'altitude, on a immédiatement

$$a=(a+h)\cos(z+r-90^\circ);$$

d'où, D étant très petit,

$$h=2a\frac{\sin^2\frac{D}{2}}{\cos D}=\frac{1}{2}a\tang^2 D.$$

Or on a approximativement

$$r=mD;$$

d'où, sans erreur sensible,

$$r=m(z-90^\circ).$$

m étant approximativement 0,08 (*voir* Chap. XVIII, Nivellement), d'où

$$D=(1+m)(z-90^\circ)$$

et

$$h=\frac{1}{2}a(1+m)^2\tang^2(z-90^\circ);$$

on en conclut inversement

$$z-90^\circ=\frac{1}{1+m}\sqrt{\frac{2h}{a}}=H\sqrt{h},$$

en posant

$$\log H=1,0295592,$$

exprimant h en centimètres, $z-90^\circ$ en secondes d'arc; on a fait $a=636669800^{cm}$.

Il est aussi nécessaire de tenir compte de l'influence de la réfraction sur le lever d'un astre. Il suffit à cet effet de déterminer δH par l'une des équations du présent numéro, qui donne

$$\delta H=-\frac{\delta h}{\cos\varphi\sin P\sin H};$$

on y donne à δh sa valeur moyenne $-33',8$. L'angle horaire H, au lever apparent, est plus grand en valeur absolue qu'au lever géométrique.

239. Marche des chronomètres et des pendules. — Bien entendu, en lisant l'heure du chronomètre du bord, on tient compte de sa marche connue par des déterminations antérieures.

Cette marche est représentée par une formule telle que

$$m_0 + \alpha(T - T_0)^2 + \beta(t - t_0),$$

α, β désignant des constantes, T la température, t le temps, m_0 la marche à la température T_0 et à la date t_0. La marche dépend, en outre, d'une façon complexe de la hauteur du baromètre, de l'état hygrométrique de l'air et de diverses particularités.

Il est à remarquer que le terme thermométrique ayant l'exposant 2, un chronomètre peut être réglé pour deux températures telles que 0° et 30°. Il tend à avancer entre ces températures, à retarder en dehors.

La marche d'une pendule à balancier est représentée par

$$m_0 + \alpha(T - T_0) + \beta(t - t_0) + \gamma(B - B_0),$$

où B désigne la hauteur du baromètre, B_0 sa valeur initiale, γ une constante.

Dans les chronomètres et dans les pendules on rend, par la compensation (t. I, n° 157), le coefficient thermométrique presque insensible. Dans quelques observatoires on a introduit, dans des balanciers à compensation à mercure un appareil destiné à compenser les variations de pression. C'est d'ailleurs un organe d'une construction fort délicate et qui n'est pas universellement répandu. L'augmentation de la pression atmosphérique ralentit la marche par la résistance que l'air oppose au mouvement du pendule; la valeur du coefficient γ est d'environ $0^s,01$ par jour pour une variation de 1^{mm} de hauteur du baromètre.

Le terme proportionnel au temps n'est qu'une approximation sommaire; il tient à l'épaississement des huiles et à l'altération de tous les organes de l'instrument.

240. Détermination de la latitude. — L'observation des distances zénithales d'une circompolaire à ses passages supérieur et inférieur au méridien donne, par une simple moyenne, en supposant les observations corrigées de la réfraction, la latitude du lieu. Ce procédé est indépendant de la connaissance de la déclinaison de la polaire; mais le résultat est affecté des erreurs commises sur la réfraction, sur la division du cercle, sur la flexion de la lunette.

Si la déclinaison d'une étoile est bien connue, l'observation de

la distance zénithale de cette étoile à son passage supérieur au méridien donne immédiatement la latitude. Ce procédé appliqué à une seule étoile comporte les mêmes erreurs que le précédent, et, en outre, celle qui provient de l'incertitude sur la déclinaison de l'étoile. Mais on peut éliminer la plupart des erreurs systématiques en combinant, par une moyenne, les résultats fournis par des étoiles observées, au nord et au sud, à peu près symétriquement par rapport au zénith. Les erreurs de réfraction et de flexion disparaissent, étant égales et de signes contraires, et, si l'on emploie un grand nombre de couples d'étoiles, les erreurs de division du cercle et celles qui proviennent des déclinaisons adoptées prennent le caractère d'erreurs accidentelles et diminuent considérablement dans les moyennes.

Il peut être commode d'observer un peu avant et un peu après le méridien, ce qui permet de multiplier les observations d'une même étoile. Le triangle sphérique qui a pour sommets le zénith, le pôle et l'étoile a pour côtés la distance zénithale z, la distance polaire P, la colatitude $90° - \varphi$, et l'angle opposé à z est l'angle horaire H. On a pour déterminer φ l'équation

$$\cos z = \cos P \sin\varphi + \sin P \cos\varphi \cos H.$$

Le procédé est particulièrement applicable à une polaire. Dans ce cas P est petit et φ voisin de $90° - z$.

Posant

$$\varphi = 90° - z + \varphi',$$

remplaçant au premier membre z par $90° - \varphi + \varphi'$, ordonnant le premier membre suivant les puissances de φ', le second suivant les puissances de P, on trouve

$$\varphi = 90° - z - P\cos H + \frac{P^2}{2}\operatorname{tang}\varphi \sin^2 H + \frac{1}{6}P^3(1 + 3\operatorname{tang}^2\varphi)\sin^2 H \cos H.$$

Dans le calcul des derniers termes il suffit de remplacer φ par $90° - z - P\cos H$.

Il est commode de déterminer la latitude par l'observation de l'heure de passage d'une étoile au premier vertical. L'application de cette méthode suppose un instrument bien stable et dont les constantes soient bien connues. Le triangle sphérique rectangle formé par le pôle, le zénith et l'étoile donne, en désignant par φ

la latitude, par H l'angle horaire et δ la déclinaison

$$\cot\varphi = \cot\delta \cos H.$$

L'angle horaire est la différence entre l'heure sidérale du passage au premier vertical et l'ascension droite de l'étoile. Il y a lieu de faire subir à l'heure donnée par l'observation une correction pour tenir compte des constantes instrumentales. Le lecteur trouvera dans le *Traité d'Astronomie pratique* de Brunnow (traduction C. André) le développement des formules nécessaires.

241. Méthode de Horrebow-Talcott, pour la détermination de la latitude. — La méthode la plus précise pour la détermination astronomique de la latitude est celle de Horrebow-Talcott, employée aujourd'hui pour l'étude systématique des variations de la latitude.

Imaginons qu'un petit cercle méridien soit pourvu d'un niveau installé dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, susceptible de tourner autour de cet axe de rotation et aussi de lui être invariablement fixé. Au moment où un astre entre dans le champ de la lunette, on dirige l'axe optique vers cet astre, on fait tourner le niveau de telle façon que la bulle soit sensiblement au zéro, on fixe le niveau à l'axe et on fait un pointé au fil horizontal mobile au moment même du passage au méridien. Soit δ_s la déclinaison apparente de l'astre supposé au sud du zénith, φ la latitude, R_s la réfraction. La distance zénithale apparente est $\varphi - \delta_s - R_s$. Si, d'autre part, Z désigne l'angle que fait la direction du zéro du niveau avec l'axe optique de la lunette défini par le zéro du micromètre, v_s la lecture de la vis, R la valeur du tour de vis, et que N_s soit en secondes la lecture du niveau supposée positive quand le zéro du niveau est au sud du zénith, la distance zénithale est

$$N_s + Z - R v_s.$$

On a donc

$$\varphi = \delta_s + N_s + Z - R v_s + R_s.$$

Effectuons un retournement et, sans desserrer le niveau, pointons le fil mobile sur une autre étoile passant au méridien au nord du zénith. Soit δ_n, N_n, v_n les quantités analogues à δ_s, N_s, v_s. La

distance zénithale apparente est

$$\delta_n - \varphi - R_n;$$

elle est aussi, en supposant N_n positif du même côté du niveau que précédemment

$$N_n + Z - Rv_n.$$

On a donc

$$\varphi = \delta_n - N_n - Z + Rv_n - R_n.$$

La moyenne des deux résultats est indépendante de Z et donne

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_s + \delta_n) + \frac{1}{2}(N_s - N_n) - \frac{1}{2}R(v_s - v_n) + \frac{1}{2}(R_s - R_n).$$

Il est manifeste que les seules erreurs systématiques à craindre seraient celles qui proviendraient de la vis du micromètre. On devra étudier cette vis avec le plus grand soin. Si l'on n'employait qu'un même couple d'étoiles, les erreurs commises sur leurs déclinaisons auraient aussi le caractère d'erreurs systématiques; on y remédie en employant le plus grand nombre possible de couples d'étoiles. On en profite pour éliminer, du résultat final, l'erreur du tour de vis en choisissant les étoiles de façon que la somme de toutes les différences $v_s - v_n$ soit nulle ou très petite. L'erreur de la réfraction est bien petite et a un caractère accidentel comme l'erreur du niveau, si ce niveau a été bien étudié. Les erreurs systématiques du pointé se détruisent dans la différence $v_s - v_n$; il en est de même de celles qui proviennent de la flexion de la lunette.

L'étude d'une vis de micromètre se fait de la façon la plus simple par la mesure d'un même intervalle constant, assez petit, avec le micromètre, en utilisant successivement pour cette mesure les diverses lectures du tambour de la vis.

Les étoiles d'un couple doivent se succéder à quelques minutes de distances (5^m à 10^m); leur différence de distance zénithale ne doit pas dépasser $10'$ et les distances zénithales absolues 20° à 25°.

242. Détermination précise de la longitude. — La détermination précise de la différence de longitude entre deux points se fait aujourd'hui par la méthode télégraphique. Il s'agit de déterminer à un même instant la différence des heures sidérales en ces deux points.

Des observations méridiennes très soignées, faites à des instruments identiques, donnent l'heure aux deux stations. Si la dif-

férence de longitude n'est pas trop grande, on y observe les mêmes étoiles ; tout au moins, un certain nombre d'étoiles sont communes aux deux stations, et pour les autres on s'astreint à n'employer que des étoiles d'ascensions droites bien connues. On détermine avec tout le soin possible les constantes instrumentales; notamment on observe dans la soirée deux polaires à des culminations opposées, avec un retournement au milieu de chacune de ces observations. On répartit les étoiles horaires dans les deux positions de l'instrument.

L'observation se fait au chronographe, un appareil électrique qui enregistre les secondes indiquées par la pendule et qui, en outre, enregistre les instants des passages des étoiles aux fils du réticule. Cependant il semble avantageux d'observer les polaires par la méthode ordinaire *œil et oreille*. Si l'on opère ainsi, on doit comparer soigneusement les résultats d'observations œil-oreille à ceux que donne l'emploi du chronographe.

Avant et après la détermination de longitude on détermine l'équation personnelle relative des deux observateurs. A cet effet les deux observateurs, dans une même soirée, au même lieu, font des déterminations complètes de l'heure. La différence des corrections de pendule est leur différence d'équations personnelles.

Une communication électrique établie entre les chronographes des deux observateurs permet d'inscrire, à volonté, sur les appareils, des signaux électriques transmis par chacun d'eux. La meilleure disposition des déterminations d'heure et des échanges de signaux est la suivante : première détermination d'heure, échange de signaux; deuxième détermination d'heure, second échange de signaux; troisième détermination d'heure. De la sorte le résultat des comparaisons est indépendant de la marche des pendules. La réciprocité des échanges de signaux élimine l'erreur qui résulte de la non-instantanéité de la transmission.

Nous n'insisterons pas davantage; le lecteur trouvera, au Tome XI du *Mémorial du Dépôt de la Guerre,* le mode d'installation des appareils employés par le Service géographique de l'Armée.

Au cours des opérations les observateurs se permutent.

243. Détermination de la longitude en voyage par les chronomètres. — En voyage il est indispensable d'employer des pro-

cédés n'exigeant pas que des relations actuelles soient établies entre le voyageur et des localités dont la position soit connue. Les phénomènes astronomiques concernant des astres à grande parallaxe, ou à rapide mouvement propre, en donnent le moyen.

On observera cependant que, si le voyageur emporte avec lui un chronomètre donnant l'heure de Paris, il lui suffira de déterminer l'heure locale pour avoir, par différence, la différence de longitude avec Paris. Il convient de remarquer que le transport des chronomètres est un moyen d'établir une communication permanente avec Paris.

244. **Détermination de la longitude par les culminations lunaires.** — Les culminations lunaires donnent une autre solution. Si, à une époque donnée en temps moyen t_m et en temps sidéral t_s de Paris, l'ascension droite de la Lune est α et que L désigne la longitude occidentale (rapportée à Paris) du lieu où la Lune passe au méridien, on a visiblement

$$L = t_s - \alpha.$$

La *Connaissance des Temps* donne L pour toutes les valeurs de t_m d'heure en heure. Supposons que l'on ait constaté qu'en un lieu donné le centre de la Lune passe au méridien à l'heure sidérale H_s. H_s est à cet instant l'ascension droite de la Lune. Cette ascension droite est comprise entre deux ascensions droites consécutives α', α'' données par la *Connaissance des Temps,* pour des heures consécutives t'_m, t''_m; si L' et L'' sont les valeurs de L qui correspondent à ces heures, la proportion suffisamment exacte

$$\frac{L - L'}{L'' - L'} = \frac{H_s - \alpha'}{\alpha'' - \alpha'}$$

donne L.

245. **Mesure de la longitude par les distances lunaires.** — La *Connaissance des Temps* donne de trois en trois heures en temps moyen de Paris les distances géocentriques du centre de la Lune à ceux du Soleil, de Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, Aldébaran, Pollux, Regulus, l'Épi, Antarès, Altaïr, Fomalhaut, Markab. Ces distances ont été aisément calculées par la considération du triangle ayant, sur la sphère géocentrique, pour sommet, le pôle et les centres des deux astres.

Si, d'autre part, on parvient, par des mesures faites en un point de la Terre à une heure locale connue, à obtenir la distance géocentrique Δ du centre de la Lune au centre de l'un de ces astres, la comparaison avec les données de la *Connaissance des Temps* donne, par interpolation, l'heure de Paris à cet instant, et la différence entre l'heure de Paris et l'heure locale est la longitude.

Il est aisé de mesurer au sextant la distance apparente d de deux bords intérieurs ou des deux bords extérieurs des deux astres et en même temps les hauteurs apparentes (et, par suite, les distances zénithales z et z') des bords supérieurs ou inférieurs. Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont les demi-diamètres apparents géocentriques (donnés par la *Connaissance des Temps*), on peut dans le triangle qui, sur une sphère ayant pour centre l'observateur, a pour sommets le zénith et les centres apparents des deux astres, calculer sommairement les angles A, A' aux astres, les trois côtés de ce triangle étant, avec une précision suffisante pour l'objet actuel

$$z \pm \mathbb{D}, \quad z' \pm \mathbb{D}', \quad d \pm \mathbb{D} \pm \mathbb{D}'.$$

Dans les deux premières expressions on prend le signe supérieur si l'on a observé un bord supérieur, le signe inférieur dans le cas contraire; dans la troisième, on prend les signes supérieurs si la distance mesurée est celle des bords intérieurs, les signes inférieurs si l'on a mesuré la distance des bords extérieurs.

La connaissance des angles A, A' aux deux astres permet de calculer exactement, en tenant compte de la réfraction, les rayons apparents des deux astres dans la direction de la distance mesurée. On voit sans peine que ces rayons ρ, ρ' ont pour valeur

$$\rho = \mathbb{D}_1 - C \cos A, \qquad \rho' = \mathbb{D}'_1 - C' \cos A',$$

où $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}'_1$ sont les demi-diamètres apparents vus de l'observateur et non affectés de la réfraction, C et C' les différences des valeurs de la réfraction aux distances zénithales

$$\begin{aligned} &z \quad \text{et} \quad z - \mathbb{D}_1, \\ &z' \quad \text{et} \quad z' - \mathbb{D}'_1. \end{aligned}$$

Si le premier astre est la Lune,

$$\begin{aligned} &\mathbb{D}_1 = \mathbb{D} + \mathbb{D}^2 h \cos(z \pm \Delta + r), \\ &\mathbb{D}'_1 = \mathbb{D}', \end{aligned}$$

h désignant le rapport du rayon de la Lune au rayon de la Terre, r la réfraction en distance zénithale pour la position de la Lune observée.

D'après cela, sur la sphère qui a pour centre l'observateur, le triangle qui a pour sommets le zénith Z et les centres apparents des deux astres a pour côtés

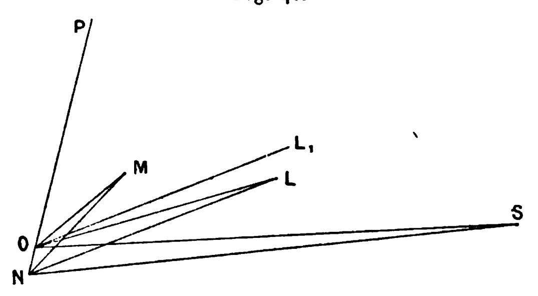
$$d_c = d \pm \rho \pm \rho', \qquad z_c = z \pm \mathfrak{D}_1 - C, \qquad z'_c = z' \pm \mathfrak{D}'_1 - C'.$$

On peut calculer l'angle en Z par la relation

$$\cos d_c = \cos z_c \cos z'_c + \sin z_c \sin z'_c \cos Z.$$

Cet angle Z appartient aussi au triangle qui, sur la même sphère, a pour sommets le zénith et les positions vraies (non affectées de la réfraction), et aussi au triangle qui a ses sommets aux mêmes points, sur une sphère ayant pour centre le point N où la verticale MN de l'observateur M rencontre l'axe de rotation PON de la Terre (*fig.* 46). En désignant par p et p' les parallaxes de hauteur

Fig. 46.



des deux astres, par ζ, ζ' les distances zénithales des deux astres sur cette nouvelle sphère, on a

$$\zeta = z_c + r - p, \qquad \zeta' = z'_c + r' - p'.$$

On a d'ailleurs pour calculer p et p' les formules

$$p = \text{N}.\text{P} \sin(z_c + r), \qquad p' = \text{N}.\text{P}' \sin(z'_c + r'),$$

N désignant la longueur de la verticale MN, P et P' les parallaxes horizontales équatoriales. On a confondu dans ces formules les parallaxes P et P' relative à NM avec celles qui seraient relatives à ON. Il n'en résulte pas d'erreur sensible. On conclut

de la considération de ce triangle

$$\cos d' = \cos\zeta \cos\zeta' + \sin\zeta \sin\zeta' \cos Z,$$

d' désignant la distance des centres vus de N.

Si l'on mène par le centre O de la Terre une parallèle OL_1 à NL et le rayon vecteur OS, ce rayon vecteur pouvant être regardé comme confondu avec NS à cause de la petitesse de la parallaxe du Soleil, l'angle SOL_1 sera égale à d'.

L'angle POL_1, que nous désignerons par $90° - \delta_1$, est égal à POL — OLN. Or POL est la distance polaire $90° - \delta$ de la Lune donnée par la *Connaissance des Temps* et le triangle OLN donne avec une précision suffisante

$$OLN = ON.P \sin\delta.$$

L'angle POS est la distance polaire géocentrique $90° - \delta'$ du Soleil et l'on obtient l'angle dièdre LOPS par la relation

$$\cos d' = \sin\delta_1 \sin\delta' + \cos\delta_1 \cos\delta' \cos LOPS.$$

Après quoi le trièdre OPLS donne pour la distance géocentrique LOS

$$\cos\Delta = \sin\delta \sin\delta' + \cos\delta \cos\delta' \cos LOPS.$$

246. Détermination du méridien et de l'azimut d'un signal. — Le procédé le plus précis pour déterminer le méridien est l'installation d'une lunette méridienne dont on modifie l'azimut jusqu'à ce que, en le déterminant par l'observation d'une polaire et d'une étoile équatoriale, on le trouve sensiblement nul. La connaissance de cet azimut achève la détermination du méridien que l'on peut fixer sur le terrain en installant à quelque distance une mire. En ce qui concerne la mire il convient d'observer qu'un angle de $1''$ à 60^m de distance correspond à peu près à un déplacement latéral d'un tiers de millimètre, et ce déplacement est proportionnel à la distance de la mire.

L'observation à l'altazimut d'une étoile à des hauteurs égales, qui donne l'heure, fait connaître la direction du méridien par une moyenne, si l'on fait les lectures du cercle azimutal.

Quand on connaît l'heure et la latitude, il suffit de mesurer l'azimut d'une étoile connue à un instant donné. L'heure sidérale

de l'observation donne l'angle horaire; ayant l'angle horaire, la distance polaire et la latitude, le changement des coordonnées donne l'azimut. La différence entre cet azimut et la lecture azimutale du cercle donne la lecture relative au méridien. Il convient particulièrement d'employer à ces observations la polaire à l'époque de sa plus grande distance au méridien.

Dans certains cas il est commode de mesurer une distance zénithale z du Soleil ou d'une étoile. Si la latitude φ est connue ainsi que la déclinaison δ de l'astre, on aura, par un triangle sphérique dont les trois côtés sont connus, pour l'azimut A de l'astre au moment de l'observation

$$\cot^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta+z)}{\sin\frac{1}{2}(z-\varphi+\delta)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)}.$$

Il convient, pour augmenter la précision, de faire l'observation dans le voisinage du premier vertical.

La mesure de l'azimut d'un signal se fait naturellement par la comparaison de la lecture du cercle azimutal donnée par un pointé sur l'astre avec celle qui correspond à la direction du méridien.

CHAPITRE XVIII.

CALCULS GÉODÉSIQUES.

TRIANGULATIONS. — MESURES DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR AU MOYEN DU PENDULE; FORMULE DE BOUGUER. — CALCUL DES TRIANGLES GÉODÉSIQUES. — CALCUL DES LONGITUDES, DES LATITUDES ET DES AZIMUTS. — LONGUEUR D'UN ARC DE MÉRIDIEN. — RÉSULTATS. — NIVELLEMENT GÉODÉSIQUE, NIVELLEMENT MATHÉMATIQUE.

247. **Du géoïde.** — La Géodésie a pour but l'étude de la forme de la surface mathématique de la Terre, surface à laquelle Listing, en 1872, a donné le nom de *géoïde*.

On admet que la Terre a été primitivement fluide, que la distribution actuelle de la masse ainsi que la direction de la verticale et l'intensité de la pesanteur en chaque point satisfont aux conditions d'équilibre relatif d'une masse fluide, la verticale résultant d'ailleurs de la gravitation et de la force centrifuge. En tout point de la masse terrestre, passe une *surface de niveau*, c'est-à-dire une surface normale à la verticale en chacun de ses points. La surface formée par le niveau moyen des mers fait partie d'une surface de niveau qui se prolonge dans les régions continentales; *cette surface est le géoïde*. Par niveau moyen des mers on entend le niveau auquel s'élèverait la mer en chaque point si elle était en repos, c'est-à-dire si l'on pouvait faire abstraction des diverses causes (marées, courants, vents, etc.) qui produisent les mouvements des flots. Si les continents étaient sillonnés de canaux en communication avec les mers, la surface des eaux dans ces canaux appartiendrait au géoïde.

Les diverses surfaces de niveau s'enveloppent mutuellement. Si la verticale en un point A de l'une en rencontre une autre en un point B, elle n'est généralement pas verticale en B. Partant de A suivant la verticale en A, on peut décrire une ligne dont toutes les tangentes soient des verticales; une telle ligne s'appelle *ligne de force*. Cette ligne est généralement une ligne à double cour-

bure, très peu différente d'ailleurs d'une droite. Si le point A est un point quelconque de la Terre, que la ligne de force qui en part rencontre en C le géoïde, le point A peut être représenté par le point C qui en sera dit la *projection* et par la ligne courbe AC, *l'altitude*. On peut aussi projeter A sur le géoïde au moyen de la verticale en A. Le pied B de cette verticale diffère très peu du point C et, pratiquement, on peut confondre ces deux points et aussi la courbe AC avec la droite AB.

En fait, le géoïde diffère peu d'une sphère ayant 6370^{km} de rayon. Il ressemble très sensiblement à un ellipsoïde de révolution aplati dans lequel *l'aplatissement*, c'est-à-dire le rapport de la différence des axes au plus grand d'entre eux est voisin de $\frac{1}{300}$. La détermination des deux axes de cet ellipsoïde n'exige qu'un très petit nombre de mesures. Seulement la comparaison des mesures géodésiques à un ellipsoïde de révolution laisse toujours des résidus qu'il est impossible d'attribuer aux erreurs des observations, et dont l'ensemble est tel cependant qu'il faut renoncer à trouver une forme représentant le géoïde avec plus de précision que l'ellipsoïde de révolution. D'après M. Helmert, la détermination précise de la forme du géoïde demanderait autant de travail que celle de la surface physique (ou surface réelle) de la Terre ; celle-ci, comme le géoïde, diffère peu d'une sphère de 6370^{km} de rayon ; la différence des distances de son centre au point le plus rapproché et au point le plus éloigné ne dépasse pas 32^{km}.

248. Triangulations. — Toutes les mesures effectuées à la surface de la Terre, pour l'étude du géoïde, consistent en triangulations. Un certain nombre de points plus ou moins éloignés étant choisis, de chacun de ces points on vise les points voisins. A cet effet, on installe en l'un A de ces points un théodolite, et l'on mesure l'angle des plans passant par la verticale du point A et par les points voisins B, C, ... On détermine aussi les angles que forment en A, avec la verticale, les rayons visuels AB, AC, ..., c'est-à-dire les distances zénithales de ces rayons visuels. On opère de même au point B, d'où l'on vise les sommets voisins, en particulier A et C, et au point C d'où l'on vise aussi B et A, et l'on opère ainsi en tous les sommets. D'autre part on mesure une base, c'est-à-dire un côté aussi long que possible de l'un des triangles. On

détermine les latitudes de deux stations extrêmes et aussi l'azimut en l'une d'elles A, c'est-à-dire l'angle que fait le méridien en A avec le plan vertical en A passant par un sommet voisin B. On suppose d'ailleurs que le géoïde est un ellipsoïde de révolution aplati. Dans cette hypothèse, les mesures faites permettent de trouver les dimensions de cet ellipsoïde et les coordonnées, latitudes et différences de longitudes, des sommets. On joint, à l'ordinaire, à ces mesures, des déterminations surabondantes de latitudes, d'azimuts, de différences de longitudes. Les écarts entre les valeurs mesurées et celles qui résultent des calculs de la triangulation montrent entre quelles limites le géoïde est exactement représenté par l'ellipsoïde adopté ou obtenu.

Historiquement, les travaux géodésiques, jusqu'au XIXe siècle, ont eu exclusivement pour objet des mesures d'arcs de méridien, et c'est de l'ensemble de ces mesures faites à diverses latitudes qu'ont été conclues les dimensions du géoïde. Depuis, la comparaison de mesures de toutes sortes, d'arcs de méridiens, d'arcs de parallèles ou même d'arcs orientés d'une manière quelconque a montré que l'ellipsoïde de révolution est, de toutes les surfaces simples, celle qui représente le mieux le géoïde.

En chaque point il existe entre la verticale réelle et la verticale géodésique, c'est-à-dire celle qui correspond à l'ellipsoïde de révolution, un écart que l'on nomme *déviation de la verticale*. On peut bien dire que les mesures géodésiques ont aujourd'hui pour but l'étude de ces déviations. Il nous sera impossible d'insister sur le détail des discussions que leur détermination comporte.

249. Mesure de l'intensité de la pesanteur au moyen du pendule. — Les mesures géodésiques se complètent fort utilement par celles de l'intensité de la pesanteur au moyen de la durée des oscillations du pendule. Ces dernières ont manifesté, à côté des déviations de la verticale et, par suite, des variations de la courbure, des surélévations ou des abaissements du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de révolution, différences qui, sur les continents, atteignent en général 200^m; elles se compliquent de variations locales d'altitude beaucoup plus faibles, n'atteignant dans les Alpes que 5^m à 6^m. Il est à noter que les modifications de la courbure n'en changent jamais le sens, de sorte que le géoïde n'offre pas, comme la surface

physique du sol, des alternances de montagnes et de vallées.

Les observations du pendule sont extrêmement délicates; il faut tenir compte de l'entraînement de l'air ambiant, du déplacement de l'appui sur lequel repose le couteau. Le lecteur trouvera dans le *Bulletin des séances de la Société française de Physique*, p. 95, 1888, un beau Mémoire de M. le commandant Defforges renfermant, avec une discussion complète, la description des appareils construits par Repsold et plus récemment par Brunner pour le Service géographique de l'Armée.

250. Réduction des observations du pendule au niveau de la mer. Formule de Bouguer. — Pour rendre comparables les observations du pendule faites en divers points il faut les réduire au niveau de la mer. On ne se borne pas à la réduction relative à la variation d'intensité de la pesanteur en raison inverse du carré des distances. On s'efforce de déduire de l'intensité de la pesanteur, au point où est placé le pendule, l'action de la partie de la croûte terrestre qui est située au-dessus du géoïde, afin d'avoir l'intensité de la pesanteur sur le géoïde même. On attribue à cette partie de la croûte terrestre que nous appellerons *le continent* une densité constante.

Soit P un lieu d'observation, P_0 sa projection sur le géoïde, h l'altitude, G_0 l'attraction et g_0 la pesanteur au point P_0, C l'action du continent sur le point P, $G + C$ l'attraction et g la pesanteur au point P. On néglige la différence des valeurs de la force centrifuge en P et en P_0. Dans ces conditions on a

$$g - g_0 = G + C - G_0.$$

On calcule $G - G_0$ comme si la Terre, de rayon moyen R, était formée de couches sphériques concentriques dont chacune soit homogène. On a alors, en négligeant le carré de $\frac{h}{R}$,

$$\frac{G}{G_0} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 1 - \frac{2h}{R},$$

d'où

$$G - G_0 = -\frac{2h}{R} G_0$$

ou approximativement

$$G - G_0 = -\frac{2h}{R} g_0,$$

et enfin

$$g - g_0 = C - \frac{2h}{R} g_0.$$

On assimile le continent à un cylindre homogène de hauteur h, de rayon a, de densité ρ. On trouve alors aisément pour l'action de ce cylindre sur le centre P de sa base supérieure

$$C = 2\pi f \rho (a + h - \sqrt{a^2 + h^2}),$$
$$= 2\pi f \rho h \left(1 - \frac{2h}{a} \cdots\right),$$

et comme $G_0 = \frac{4}{3}\pi f RD$, D étant la densité moyenne de la Terre,

$$C = \frac{3}{2} G_0 \frac{\rho}{D} \frac{h}{R} \left(1 - \frac{h}{2a} \cdots\right).$$

Le plus souvent, $\frac{h}{a}$ est assez petit pour que le second terme soit négligeable et l'on a, en remplaçant, dans la valeur de C, G_0 par g_0,

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{D} \frac{h}{R}\right),$$

ce qui est la formule de Bouguer.

Il convient de remarquer que ce procédé est assez arbitraire; de plus il est fréquemment contredit par les faits. La comparaison des résultats des observations ainsi réduites indique que, sur les continents, l'intensité observée est plus faible que celle que donnerait la formule de Clairaut, et c'est le contraire sur les îles, comme s'il y avait un défaut de pesanteur sur les continents, un excès sur les îles, produisant des variations de 5 ou 6 oscillations par jour. Ces variations sont notables, puisque, sur l'ellipsoïde, le pendule ne fait que 229 oscillations de plus au pôle qu'à l'équateur. M. Faye attribue les écarts systématiques offerts par les continents et par les îles à ce que le refroidissement du globe terrestre serait plus grand sous les mers que sous les continents.

M. Faye a proposé de supprimer sur les continents le terme $\frac{3}{2} \frac{\rho}{D} \frac{h}{R}$, comme si ces continents étaient compensés par des cavités souterraines ou par des diminutions de la densité, et de le remplacer dans les localités accidentées par un terme C_1 provenant seulement des saillies s'élevant au-dessus du niveau général des continents. Ce procédé semble avoir amélioré les résultats des

discussions des observations du pendule, sans faire disparaître toutes les anomalies.

251. Calcul des triangles géodésiques. — Le point de départ de toute triangulation est la mesure d'une base, c'est-à-dire d'un côté de l'un des triangles. Pratiquement, une base mesurée n'a guère plus d'un myriamètre de longueur. Nous avons dit comment on corrige cette longueur de l'inclinaison; il est nécessaire aussi de la projeter sur le géoïde, ou, comme on dit, de la réduire au niveau de la mer. Si h est l'altitude de la base mesurée, B la longueur mesurée, $B - \delta B$ sa projection sur le géoïde, r le rayon correspondant, supposé connu, du géoïde, la relation

$$\frac{B - \delta B}{B} = \frac{r}{r + h}$$

donne

$$\delta B = B \frac{h}{r + h}.$$

Pratiquement, h est une très petite fonction de r et les erreurs à craindre sur ces éléments n'ont pas sur δB d'influence sensible.

D'autre part, avant de s'occuper de la résolution des triangles, il est nécessaire de les définir et de voir comment leur résolution est facilitée par la petitesse de l'excentricité du géoïde.

Soient $A_0 B_0 C_0$ les trois sommets d'un triangle géodésique à la surface physique de la Terre, A, B, C leurs projections sur le géoïde. Du point A_0 on a mesuré à l'altazimut l'angle des plans passant par la verticale en A_0 et respectivement par les points B_0 et C_0. On peut admettre, sans erreur sensible, qu'un plan vertical en A_0 est encore vertical en A; mais celui de ces plans qui passe par B_0 ne passe pas généralement en B. En désignant par e l'excentricité du géoïde, par a le rayon de la Terre, par h l'altitude de B_0, par φ la latitude, par α l'azimut du plan $A_0 B_0$, la différence

$$\text{azimut } AB - \text{azimut } AB_0$$

est sensiblement égale à [1]

$$\frac{e^2}{2} \frac{h}{a} \sin 2\alpha \cos^2 \varphi.$$

---

[1] Nous énoncerons, dans ce Chapitre, sans les démontrer, plusieurs résultats de la haute Géodésie.

Si l'on désigne par $\mathfrak{a}$ l'aplatissement dont la valeur surpasse à peine $\frac{1}{300}$, on a

$$e^2 = \mathfrak{a}(2 - \mathfrak{a}).$$

$\frac{e^2}{2}$ vaut donc à peu près $\frac{1}{300}$; $\frac{h}{a}$ est une très petite fraction toujours bien moindre que $\frac{1}{1000}$. La correction ci-dessus ne vaut donc jamais $1''$, sans cependant être toujours négligeable.

Ces réductions faites, les mesures sont ramenées à ce qu'elles eussent été si les stations géodésiques avaient été placées directement sur le géoïde. Que sont, au juste, les côtés et les angles obtenus?

Soient A, B, C les trois sommets d'un triangle. Du sommet A on a déterminé l'angle des plans verticaux en A et passant l'un par B, l'autre par C. Du sommet B on a déterminé de même l'angle des plans verticaux en B et passant par A et par C. Or il importe de remarquer que le plan vertical en A, passant par B, ne se confond pas avec le plan vertical en B passant par A. Ces deux sections verticales ne se confondent que si les deux stations sont sur un même méridien, ou sur une même parallèle.

D'autre part, qu'est la longueur AB? Adoptera-t-on l'une ou l'autre des sections verticales? En vérité, la différence des longueurs de ces sections est très petite et toujours négligeable, étant de l'ordre de $e^4\left(\frac{s}{a}\right)^6$, s étant de la longueur d'une de ces lignes; e^4 vaut $\frac{1}{90000}$ et si s vaut 300^{km}, $\frac{s}{a}$ est $\frac{1}{20}$; $e^4\left(\frac{s}{a}\right)^6$ est moindre que $\frac{1}{100}$ de millimètre.

Néanmoins il est préférable de regarder comme vrai côté du triangle, soit une courbe d'alignement, soit une ligne géodésique.

La *courbe d'alignement* entre deux points A et B est le lieu des point du géoïde en chacun desquels il existe un plan vertical en ce point passant par les deux points A et B; c'est une telle ligne qui est mesurée directement comme base d'une triangulation. On voit sans peine que cette ligne est tangente en A à la section verticale en A, en B à la section verticale en B. Elle est fréquemment située entre ces deux sections verticales : cependant il n'en est pas toujours ainsi. En supposant la latitude de B plus grande que celle de A et ces deux points dans l'hémisphère nord, la section verticale en B est au nord de la section verticale en A, et il peut

arriver que la courbe d'alignement, d'abord située entre elles à partir du point A, traverse la section verticale en B et demeure ensuite au nord jusqu'en B. Il peut même arriver, et c'est notamment le cas quand A et B ont même latitude, que la courbe d'alignement soit entièrement au nord des deux sections verticales confondues. Nous montrerons (nº 254) que l'angle en A des deux sections verticales est

$$e^2 \cos^2 u \sin 2\alpha \sin^2 \frac{c}{2},$$

c étant la longueur de l'une d'elles, α l'azimut de la section verticale en A, u l'anomalie excentrique du point A dans la section méridienne.

Il n'est pas moins important de considérer la *ligne géodésique* de A en B. On sait que c'est une ligne telle que le plan osculateur en un quelconque de ses points soit normal à la surface. Elle a la propriété d'être, en général, sur la surface, le plus court chemin entre deux de ses points. Elle n'est pas rigoureusement tangente à la courbe d'alignement en ses extrémités A et B, mais elle fait avec elle de très petits angles qui constituent en A et en B les différences entre les azimuts astronomiques et les azimuts géodésiques; la valeur azimut géodésique — azimut astronomique est égale à

$$-\frac{1}{12} e^2 \left(\frac{s}{a}\right)^2 \sin 2\alpha \cos^2 \varphi.$$

Le coefficient $\frac{1}{12} e^2 \left(\frac{s}{a}\right)^2$ pour $s = 64^{\text{km}}$ vaut sensiblement $0'',01$.

Cette correction est le plus souvent négligeable, et, si elle ne l'est pas, on peut la calculer et considérer la triangulation comme formée de triangles ayant pour sommets les stations A, B, C, ...; pour angles les angles mesurés (après application s'il y a lieu des corrections précédentes) et pour côtés les lignes géodésiques qui joignent les sommets A, B; A, C; B, C; .... Une seule longueur a été mesurée, la *base,* qui n'a pas plus d'une dizaine de kilomètres; or la longueur s de la ligne géodésique, qui joint deux points A et B, est liée à celle v de la section plane verticale en A et passant par B par la relation

$$s = v\left[1 + \frac{1}{360} e^4 \left(\frac{v}{a}\right)^4 \cos^4 \varphi \sin^2 2\alpha + \ldots\right].$$

Même si $v = \frac{2}{10} a$, ce qui donne

$$\frac{s - v}{v} = \frac{1}{5\,000\,000\,000},$$

$s - v$ ne dépasse pas 3^{mm}. Pour les distances qui se rencontrent dans la pratique, les différences entre les longueurs des sections verticales, de la courbe d'alignement, de la ligne géodésique sont entièrement insensibles; on ne constate d'ailleurs au théodolite aucun écart entre les deux sections verticales et la courbe d'alignement. La théorie montre que l'écart entre les intersections des deux sections verticales et de la courbe d'alignement par un même méridien est approximativement représenté (¹) par

$$ae^2 \cos\frac{\varphi + \varphi'}{2}\,\frac{2 \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}}(\sin\varphi - \sin\varphi'),$$

φ et φ' étant les latitudes des extrémités, x, y les segments dans lesquels le méridien considéré coupe l'une des lignes AB. Si l'on fait $x = 5^{km}$, $y = 5^{km}$, que l'on remplace $\sin\varphi - \sin\varphi'$ par $\varphi - \varphi'$ ou au plus $\frac{10}{6400}$, on voit que l'écart n'atteint pas $\frac{1}{50}$ de millimètre.

D'autre part, on peut démontrer qu'un élément infiniment petit d'une surface quelconque est applicable sur une sphère ayant pour rayon l'inverse de la racine carrée de la courbure totale de la surface au milieu de l'élément, en appelant, d'après Gauss, *courbure totale* en un point la limite du rapport de la courbure totale d'un élément renfermant ce point à l'aire de cet élément. La courbure totale d'un élément est l'aire d'une portion d'une sphère, de rayon *un*, déterminée par des rayons tous parallèles aux normales à l'élément. Si R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure principaux en un point, la courbure totale en ce point est $\frac{1}{R_1 R_2}$ et l'élément de surface est applicable sur une sphère de rayon $\sqrt{R_1 R_2}$. Dans cette transformation, sans déchirure ni duplicature, les lignes conservent leurs longueurs; les lignes géodésiques sont remplacées par des lignes géodésiques de la sphère, c'est-à-dire par des grands cercles, et les angles se conservent.

(¹) CLARKE, *Geodesy*, p. 115.

On peut donc calculer chaque triangle d'une triangulation comme si c'était un triangle sphérique ayant les mêmes éléments sur une sphère de rayon $\sqrt{R_1 R_2}$, $R_1 R_2$ étant les rayons de courbure principaux en un point situé au milieu du triangle considéré. D'autre part, ce triangle sphérique pourra se calculer comme rectiligne par application du théorème de Legendre; si les angles ont été mesurés on aura l'excès sphérique, et l'on n'aura pas besoin de connaître R_1 et R_2; si les angles n'ont pas été mesurés, l'excès sphérique sera égal à

$$\frac{1}{2}\frac{ab}{R_1 R_2}\frac{\sin C}{\sin 1''},$$

a, b étant deux côtés et C l'angle compris.

252. Formules relatives à la position du point sur l'ellipse méridienne. — Soient a le rayon de l'équateur terrestre, e l'excentricité du méridien; soient aussi u l'anomalie excentrique d'un point, φ sa latitude, x, z ses coordonnées par rapport aux deux axes principaux du méridien de ce point, s l'arc de méridien compté depuis l'équateur. La Géométrie donne immédiatement les relations suivantes

$$x = a\cos u, \qquad z = a\sqrt{1-e^2}\sin u,$$

(1) $$\tang u = \sqrt{1-e^2}\tang\varphi,$$

et, en posant

(2) $$\begin{cases} \Delta_\varphi = \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}, \\ \Delta_u = \sqrt{1-e^2\cos^2 u}, \end{cases}$$

(3) $$\Delta_\varphi \Delta_u = \sqrt{1-e^2},$$

(4) $$\begin{cases} \Delta_u \sin\varphi = \sin u, \\ \cos\varphi = \Delta_\varphi \cos u, \end{cases}$$

d'où

(5) $$\frac{\sin 2\varphi}{\Delta_\varphi} = \frac{\sin 2u}{\Delta_u} = \frac{2\sin(\varphi-u)}{1-\sqrt{1-e^2}}.$$

On a aussi

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\Delta_\varphi}, \qquad z = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\Delta_\varphi},$$

$$dx = -a\sin u\,du = -\sin\varphi\,ds,$$

$$dz = a\sqrt{1-e^2}\cos u\,du = \cos\varphi\,ds,$$

(6) $$\frac{du}{\cos^2 u} = \sqrt{1-e^2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

et, si R désigne le rayon de courbure du méridien terrestre au point considéré,

$$(7) \qquad R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a(1-e^2)}{\Delta_\varphi^3}.$$

Au point considéré le méridien et le parallèle sont des lignes de courbure, puisque les normales à la surface en tous les points de chacune de ces lignes forment une surface développable. Les sections normales principales sont tangentes aux lignes de courbure : l'une d'elles est le méridien, l'autre est la section normale perpendiculaire. On sait que le centre de courbure de cette section normale tangente au parallèle est sur l'arête de rebroussement de la surface développable formée par les normales à ce parallèle ; c'est le point où la normale au point donné rencontre l'axe de rotation de la Terre. La distance de ce point au point donné s'appelle la *grande normale*. Son expression est

$$(8) \qquad N = \frac{a}{\Delta_\varphi}.$$

253. Relations entre la longueur de la droite qui joint deux points, les anomalies excentriques, leur différence de longitude, leurs azimuts et leurs distances zénithales réciproques. — Soient Π le pôle de l'ellipsoïde terrestre, O le centre, EE_1 l'équateur, ΠPE, $\Pi P_1 E_1$ les méridiens de deux points P, P_1, ω leur angle.

Prenant OE et $O\Pi$ pour axes des x et des z, et pour axe des y la perpendiculaire Oy au plan zOx ; les coordonnées des deux points sont

$$(9) \quad \begin{cases} x = a\cos u, & y = 0, & z = a\sqrt{1-e^2}\sin u, \\ x_1 = a\cos u_1 \cos\omega, & y_1 = a\cos u_1 \sin\omega, & z_1 = a\sqrt{1-e^2}\sin u_1. \end{cases}$$

Soient k la longueur de la droite PP_1, α l'azimut de P_1 vu de P et compté du nord, $90° + \mu$ sa distance zénithale.

Menons par le point P trois axes rectangulaires : $P\xi$ tangent à ΠE, $P\eta$ perpendiculaire dans le plan tangent, $P\zeta$ normal. Les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 du point P_1 par rapport à ces axes sont

$$\xi_1 = -k\cos\mu\cos\alpha, \qquad \eta_1 = k\cos\mu\sin\alpha, \qquad \zeta_1 = -k\sin\mu,$$

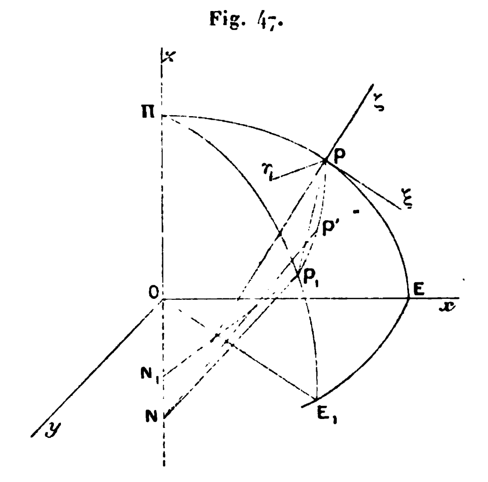
D'autre part, désignant par φ la latitude du point P, on a visiblement

$$x_1 - x = \zeta_1 \cos\varphi + \xi_1 \sin\varphi,$$
$$y_1 - y = \eta_1,$$
$$z_1 - z = \zeta_1 \sin\varphi - \xi_1 \cos\varphi.$$

Donc

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &k(\sin\mu\cos\varphi + \cos\mu\cos\alpha\sin\varphi) = a(\cos u - \cos u_1 \cos\omega),\\ &k\cos\mu\sin\alpha = a\cos u_1 \sin\omega,\\ &k(\sin\mu\sin\varphi - \cos\mu\cos\alpha\cos\varphi) = a\sqrt{1-e^2}(\sin u - \sin u_1).\end{aligned}\right.$$

Fig. 47.



Ces équations donnent aisément $k\sin\mu$, $k\cos\mu\cos\alpha$, $k\cos\mu\sin\alpha$, d'où l'on tirera k^2. On trouve

$$(\text{A})\quad k\sin\mu = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\Delta_u}(1 - \cos u\cos u_1\cos\omega - \sin u\sin u_1),$$

$$(\text{B})\quad \left\{\begin{aligned} k\cos\mu\cos\alpha = \frac{a}{\Delta_u}[&\cos u\sin u_1 - \sin u\cos u_1\cos\omega\\ &+ e^2\cos u(\sin u - \sin u_1)],\end{aligned}\right.$$

$$(\text{C})\quad k\cos\mu\sin\alpha = a\cos u_1\sin\omega,$$

$$(\text{D})\quad 1 - \frac{k^2}{2a^2} = \cos u\cos u_1\cos\omega + \sin u\sin u_1 + \frac{e^2}{2}(\sin u - \sin u_1)^2.$$

Si l'on construit sur une sphère de rayon a un triangle dont

deux côtés soient $90° - u$, $90° - u_1$ et ω l'angle compris, que l'on désigne par $\varkappa$ le côté opposé et que l'on pose

$$e \sin\frac{u_1 - u}{2} \cos\frac{u_1 + u}{2} = \sin\frac{\varkappa}{2} \sin\psi,$$

les formules A et D se simplifient et l'on a, pour déterminer k, μ, α,

$$(D') \qquad k = 2a \sin\frac{\varkappa}{2} \cos\psi,$$

$$(A') \qquad \sin\mu = \Delta_\varphi \sin\frac{\varkappa}{2} \operatorname{séc}\psi,$$

$$(C') \qquad \sin\alpha \cos\mu = \frac{a}{k} \cos u_1 \sin\omega.$$

De même, si α_1 et μ_1 ont en P_1, par rapport à P, la même signification que α et μ en P, par rapport à P_1, on a

$$(A'_1) \qquad \sin\mu_1 = \Delta_{\varphi_1} \sin\frac{\varkappa}{2} \operatorname{séc}\psi,$$

$$(C'_1) \qquad \sin\alpha_1 \cos\mu_1 = \frac{a}{k} \cos u \sin\omega.$$

254. Théorème de Dalby. — En divisant membre à membre l'équation B par l'équation C, et introduisant au lieu de u et u_1 les latitudes φ et φ_1, on trouve

$$\cot\alpha = \frac{\cos\varphi \sin\varphi_1}{\sin\omega \cos\varphi_1} - \frac{\sin\varphi \cos\omega}{\sin\omega} + \frac{e^2 \cos\varphi}{\sin\omega \cos\varphi_1} \left(\frac{\Delta_{\varphi_1}}{\Delta_\varphi} \sin\varphi - \sin\varphi_1\right).$$

Si l'on désigne par β la valeur que prend α si, ω, φ, φ_1 restant invariables, e s'annule, on a

$$(11) \qquad \cot\alpha = \cot\beta + he^2,$$

où

$$(12) \qquad h = \frac{\cos\varphi}{\sin\omega \cos\varphi_1} \left(\frac{\Delta_{\varphi_1}}{\Delta_\varphi} \sin\varphi - \sin\varphi_1\right)$$

et, de même,

$$(13) \qquad \cot\alpha_1 = \cot\beta_1 + h_1 e^2,$$

où

$$(14) \qquad h_1 = \frac{\cos\varphi_1}{\sin\omega \cos\varphi} \left(\frac{\Delta_\varphi}{\Delta_{\varphi_1}} \sin\varphi_1 - \sin\varphi\right).$$

La formule (11) donne $\sin(\beta - \alpha)$, d'où, en négligeant e^6,

$$\beta = \alpha + he^2 \sin^2\alpha + h^2 e^4 \sin^3\alpha \cos\alpha,$$

et, de même,

$$(15) \qquad \beta_1 = \alpha_1 + h_1 e^2 \sin^2\alpha_1 + h_1^2 e^4 \sin^3\alpha_1 \cos\alpha_1.$$

On peut développer les seconds membres suivant les puissances de e^2, dont h et α dépendent. En introduisant la considération du triangle qui, sur une sphère, a pour angle ω et pour côtés adjacents $90^\circ - \varphi$, $90^\circ - \varphi_1$, et désignant par x' le côté de ce triangle opposé à l'angle ω, on trouve, pour le coefficient du terme en e^2, dans l'expression de β,

$$\frac{\cos\varphi \cos\varphi_1 \sin\omega(\sin\varphi - \sin\varphi_1)}{\sin^2 x'}.$$

Le coefficient de e^2, dans l'expression de β_1, n'en diffère que par le signe. Donc, dans la somme $\beta + \beta_1$, le terme en e^2 disparaît.

On trouve, par un calcul facile, que la somme des coefficients des termes en e^4 est

$$C = -\cos\varphi \cos\varphi_1 \frac{\sin\omega}{\cos\frac{x'}{2}} \frac{\sin^2\frac{\varphi - \varphi_1}{2}}{\cos^2\frac{x'}{2}}, -\cos^2\frac{\varphi + \varphi_1}{2} \sin\frac{\varphi + \varphi_1}{2} \frac{\cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.$$

ou, en utilisant les formules de Delambre et désignant par A et A_1 les angles du triangle sphérique qui correspondent à α et α_1

$$(16) \qquad C = -\cos\varphi \cos\varphi_1 \cos\frac{A - A_1}{2} \sin^2\frac{A - A_1}{2} \sin(\varphi + \varphi_1) \sin\frac{A + A_1}{2} \frac{\tan^3\frac{x'}{2}}{\cos^2\frac{\omega}{2}}.$$

L'angle ω est toujours petit, A_1 voisin de $180^\circ - A$, x' de $\frac{k}{a}$, et le coefficient (16) de

$$-\frac{1}{4} \sin\varphi \cos^3\varphi \sin A_1 \cos^2 A_1 \left(\frac{k}{a}\right)^3,$$

dont le maximum est

$$-\frac{1}{32}\left(\frac{k}{a}\right)^3.$$

Le terme Ce^4, même pour $k = 1000^{km}$, n'atteint pas $0'',001$.

On a donc, dans tous les cas, sans erreur sensible,

$$\beta + \beta_1 = \alpha + \alpha_1. \tag{17}$$

La somme des angles du triangle ellipsoïdal ΠPP_1 est donc égale à la somme des angles du triangle sphérique correspondant dont les points ont mêmes longitudes et mêmes latitudes.

Il s'ensuit immédiatement que :

Si l'on considère sur l'ellipsoïde un triangle ABC *dont chaque angle soit déterminé par les plans verticaux au sommet correspondant et passant par les deux autres, et dont les côtés soient des courbes d'alignement, la somme des angles de ce triangle est la même que la somme des angles correspondants d'un triangle sphérique dont les sommets auraient mêmes différences de longitudes et mêmes latitudes.*

255. Formules préliminaires pour la détermination des longitudes et latitudes des sommets d'une triangulation. — Soit (*fig.* 47) s un arc PP′ de la section verticale en P; joignons le point P′ au point N, et calculons l'angle PNP′ que nous désignerons par θ. Soit r' la distance NP′ et $90° - \psi'$ l'angle P′NΠ : l'angle ψ' est évidemment voisin de la latitude du point P′. En écrivant que le point P′ est sur une section méridienne de centre O, d'axes a et $a\sqrt{1-e^2}$, que NP′ fait avec NΠ l'angle $90° - \psi'$, se souvenant que NO est égal à $e^2\rho\sin\varphi$ et a^2 à $\rho^2(1 - e^2\sin^2\varphi)$, on obtient entre r', la longueur $\rho = $ PN de la grande normale et l'angle ψ', la relation

$$\frac{r'^2}{\rho^2} + \frac{e^2}{1-e^2}\left(\frac{r'}{\rho}\sin\psi' - \sin\varphi\right)^2 = 1. \tag{18}$$

On peut remplacer ψ' au moyen de θ par la relation évidente

$$\sin\psi' = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta\cos\alpha.$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin\varphi = f, \qquad \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cos\varphi\cos\alpha = h,$$

on obtient

$$\frac{r'^2}{\rho^2} + \left[\frac{r'}{\rho}(f\cos\theta + h\sin\theta) - f\right]^2 = 1,$$

d'où l'on tire pour $\frac{r'}{\rho}$, qui devient égal à 1 pour $\theta = 0$, un développement suivant les puissances ascendantes entières de θ

$$\frac{r'}{\rho} = 1 + \frac{U_2}{1.2}\theta^2 + \frac{U_3}{1.2.3}\theta^3 + \ldots,$$

où

$$U_2 = -h^2.$$

D'autre part, r' et θ sont les coordonnées polaires du point P' dans le plan PNP_1, et l'on a

$$\frac{ds}{d\theta} = \left(r'^2 + \frac{dr'^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = r' + \frac{1}{2r'}\left(\frac{dr'}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{8r'^3}\left(\frac{dr'}{d\theta}\right)^4 + \ldots,$$

d'où l'expression de s en fonction de θ, où l'on supposera, pour déterminer la constante d'intégration, s nul en même temps que θ, et, par le retour des suites,

$$\theta = \frac{s}{\rho} - \frac{U_2(1+U_2)}{6}\left(\frac{s}{\rho}\right)^3 - \ldots.$$

Quand on suppose que l'azimut α soit égal à 90°, h s'annule et l'on trouve

$$\frac{s}{\rho} = \theta - \frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\varphi\frac{\theta^5}{40} + \ldots.$$

Si l'on supposait que θ vaille 10°, le second terme vaudrait à peu près 1^{cm}. On a donc, pratiquement, dans ce cas

$$s = \rho\theta. \tag{19}$$

Il convient de remarquer encore que, si l'on suppose que le point P' vienne en P_1, ψ' deviendra à peu près égal à φ_1, et l'équation (18) donnera approximativement

$$\frac{NP_1}{NP} = 1 - \frac{1}{2}\frac{e^2}{1-e^2}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi)^2.$$

Si l'on mène en P_1 la normale P_1N_1 à l'ellipsoïde, que l'on désigne par α_1 l'azimut en P_1, par α'_1 l'angle que fait la section verticale P_1PN avec le méridien de P_1, la considération de l'angle trièdre P_1PNN_1 donne

$$\frac{\sin\alpha'_1}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin PP_1N_1}{\sin PP_1N} = \frac{\sin PP_1N_1}{\sin P_1PN}\frac{NP_1}{NP} = \frac{NP_1}{NP}\frac{\cos\mu_1}{\cos\mu}.$$

Par les équations (A') et (A'_1) on a

$$\frac{\cos\mu}{\cos\mu_1} = \left[\frac{1 - 4\frac{a^2}{k^2}\sin^4\frac{\varkappa}{2}(1 - e^2\sin^2\varphi)}{1 - 4\frac{a^2}{k^2}\sin^4\frac{\varkappa}{2}(1 - e^2\sin^2\varphi_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

et, comme

$$4\frac{a^2}{k^2}\sin^4\frac{\varkappa}{2} = \frac{\sin^2\frac{\varkappa}{2}}{\cos^2\psi} = \frac{\sin^2\mu}{\Delta_\varphi^2},$$

cette formule devient

$$\frac{\cos\mu}{\cos\mu_1} = 1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\mu\left(\frac{\sin^2\varphi}{\Delta_\varphi^2} - \frac{\sin^2\varphi_1}{\Delta_\varphi^2}\right) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\mu\sin(\varphi - \varphi_1)\sin(\varphi + \varphi_1) + \ldots.$$

Le coefficient de e^2 est du troisième ordre, tandis que celui de e^2, dans le rapport $NP_1 : NP$, est du second ordre. On a donc

$$\frac{\sin\alpha'_1}{\sin\alpha_1} = 1 - \frac{1}{2}\frac{e^2}{1 - e^2}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi)^2;$$

d'où, par la formule de Taylor

$$\alpha'_1 - \alpha_1 = -\frac{e^2}{2}(\varphi - \varphi_1)^2\cos^2\frac{\varphi + \varphi_1}{2}\operatorname{tang}\alpha_1;$$

en remarquant que pour le calcul du coefficient de e^2 on peut regarder le triangle ΠPP_1 comme sphérique, que par suite les formules de Delambre donnent approximativement

$$\varphi_1 - \varphi = -\frac{\varkappa\sin\left(\frac{\alpha - \alpha_1}{2}\right)}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

que

$$\sin\omega\cos\varphi = \sin\varkappa\sin\alpha_1,$$

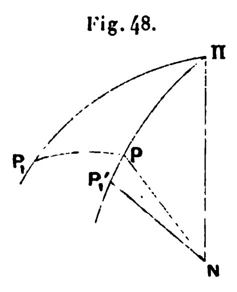
que α_1 est sensiblement le supplément de α et que ω est petit, l'élimination de $\varphi - \varphi_1$ donne finalement

$$(20) \qquad \alpha'_1 - \alpha_1 = -e^2\cos^2\varphi\sin 2\alpha_1\sin^2\frac{\varkappa}{2},$$

ce qui est la formule donnée à la page 415.

256. Calcul des longitudes et latitudes. — I. *Cas où l'azimut* α *est égal à* 90°. — Prenons, sur le méridien du point P, un point P'_1

Fig. 48.



ayant la même latitude φ_1 que le point P_1 et soit η l'angle PNP'_1. Dans le trièdre $N.PP_1\Pi$ rectangle suivant l'arête NP, on a

$$\eta = P_1N\Pi - PN\Pi = \frac{\overline{PNP_1}^2}{2}\cot PN\Pi \quad (^1)$$

et comme, d'après la formule (19), PNP_1 est égal à $\frac{s}{\rho}$, on a

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2 \operatorname{tang}\varphi.$$

Si, d'autre part, ρ_m est le rayon de courbure du méridien au point P, on a

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{PP'_1}{\rho_m} = \frac{\rho\eta}{\rho_m} = \frac{1}{2}\frac{s^2}{\rho\rho_m}\operatorname{tang}\varphi,$$

(1) Dans un triangle sphérique rectangle, dont b et c sont les côtés de l'angle droit et a l'hypoténuse, le côté c et l'angle C étant supposés très petits, les relations

$$\cos a = \cos b \cos c, \qquad \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}, \qquad \sin(90° - B) = \sin C \cos b$$

donnent respectivement les formules approchées

$$a - b = \frac{c^2}{2}\cot b, \qquad C = \frac{c}{\sin[b + \frac{1}{3}(a-b)]},$$

$$90° - B = C\cos\left[b + \frac{1}{3}(a-b)\right].$$

puis désignant par P_1 l'angle $\Pi P_1 P$ (*fig.* 48)

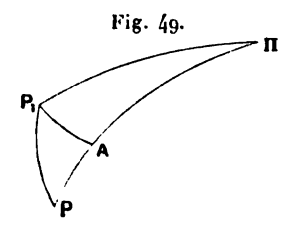
$$\omega = \frac{s}{\rho}\,\frac{1}{\cos(\varphi - \frac{2}{3}\eta)},$$

$$90^\circ - P_1 = \omega \sin\left(\varphi - \frac{1}{3}\eta\right):$$

$90^\circ - P_1$ s'appelle la *convergence des méridiens*.

II. *Cas général*. — Soit AP_1 une section plane passant par le point P_1, normale au point A à l'ellipsoïde et perpendiculaire au

Fig. 49.



méridien du point P. Considérons, sur une sphère, un triangle $\Pi^0 P^0 P_1^0$ ayant l'angle Π^0 égal à Π, les côtés $\Pi^0 P^0$, $\Pi^0 P_1^0$ égaux aux colatitudes de P et P_1, et soit A^0 un point de $\Pi^0 P^0$ ayant même latitude que A. Le triangle PAP_1 a mêmes côtés et mêmes angles que le triangle sphérique $P^0 A^0 P_1^0$; si ε en est l'excès sphérique, on a par le théorème de Legendre, avec une précision suffisante, en désignant par α l'angle P

$$AP = s\cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right), \qquad AP_1 = s\sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon\right).$$

Soit φ_a la latitude de A, ρ'_m le rayon de courbure moyen du méridien entre A et P; on a, par les formules de l'alinéa précédent,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{AP.AP_1}{\rho\rho'_m} = \frac{s^2}{2\rho\rho'_m}\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\eta = \varphi_a - \varphi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{AP_1^2}{\rho\rho'_m}\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{s^2}{2\rho\rho'_m}\sin^2\alpha\operatorname{tang}\varphi_1,$$

puis

$$\varphi_1 - \varphi = (\varphi_a - \varphi) - (\varphi_a - \varphi_1) = \frac{AP}{\rho'_m} - (\varphi_a - \varphi_1)$$
$$= \frac{s}{\rho'_m}\cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right) - \eta,$$

$$\omega = \frac{AP_1}{\rho\cos\left(\varphi_a - \frac{2}{3}\eta\right)} = \frac{s\sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{\rho\cos\left(\varphi_1 + \frac{\eta}{3}\right)},$$

formules qui font connaître la latitude de P_1 et la différence de longitude de P et P_1. Il suffit, pour calculer η, de prendre

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{s}{\rho'_m}\cos\alpha.$$

On peut calculer la convergence ν des méridiens ainsi : l'angle PP_1A est égal à $90° + \varepsilon - \alpha$; l'azimut du point A vu de P_1 est $90° - \omega\sin\left(\varphi_a - \frac{\eta}{3}\right)$; l'azimut α_1 de P vu de P_1 en est la somme; posant comme définition de ν

$$\nu = 180° - \alpha - \alpha_1,$$

il vient :

$$\nu = \omega\sin\left(\varphi_a - \frac{\eta}{3}\right) - \varepsilon = \omega\sin\left(\varphi_1 + \frac{2}{3}\eta\right) - \varepsilon.$$

256. Longueur d'un arc de méridien. Dimensions du méridien terrestre. — La formule (7) du n° 252 donne

$$\frac{ds}{d\varphi} = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}},$$

ou

$$ds = a(1-e^2)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi + \frac{3.5}{2.4}e^4\sin^4\varphi + \ldots\right)d\varphi;$$

d'où, pour la longueur s de l'arc de méridien compris entre deux points de latitudes φ' et φ'', une expression de la forme

$$(21)\quad \begin{cases} s = a[A_0(\varphi''-\varphi') + A_2\sin(\varphi''-\varphi')\cos(\varphi''+\varphi') \\ \qquad + A_4\sin 2(\varphi''-\varphi')\cos 2(\varphi''+\varphi') + \ldots]. \end{cases}$$

Les coefficients sont, par rapport à e, d'un ordre de petitesse marqué par leurs indices; A_0 est voisin de 1. Rappelons que e^2 est à peu près $\frac{1}{150}$, e^6 $\frac{1}{3000000}$, de sorte que les termes en e^6 ne valent que quelques mètres, et on peut les négliger sans inconvénient. Il serait, au reste, aisé d'en tenir compte.

On voit qu'il suffit, pour déterminer a et e, de connaître deux arcs de méridien s_1 et s_2, d'amplitudes m_1 et m_2, à des latitudes moyennes φ_1 et φ_2; les équations

$$\frac{s_1}{a} = A_0 m_1 + A_2\sin m_1\cos 2\varphi_1 + A_4\sin 2m_1\cos 4\varphi_1,$$

$$\frac{s_2}{a} = A_0 m_2 + A_2\sin m_2\cos 2\varphi_2 + A_4\sin 2m_2\cos 4\varphi_2$$

donnent en première approximation, en négligeant e^4 et remplaçant $\sin m_1$ et $\sin m_2$ par m_1 et m_2,

$$a = \frac{\frac{s_1}{m_1}(1+3\cos 2\varphi_2) - \frac{s_2}{m_2}(1+3\cos 2\varphi_1)}{3(\cos 2\varphi_2 - \cos 2\varphi_1)},$$

$$e^2 = \frac{4}{3}\,\frac{\frac{s_1}{m_1} - \frac{s_2}{m_2}}{\frac{s_1}{m_1}\cos 2\varphi_2 - \frac{s_2}{m_2}\cos 2\varphi_1}.$$

Ayant des valeurs approchées $a_0 e_0$ de a et e, on applique à la détermination finale de ces éléments, d'après l'ensemble des arcs mesurés, les principes de la théorie des erreurs. A cet effet, on transforme l'équation (21), de la manière suivante. On pose $a = a_0 + \delta a_0$, $e^2 = e_0^2 + \delta e_0^2$ et, désignant par φ_0', φ_0'' les valeurs obtenues pour les latitudes des extrémités de l'un quelconque des arcs mesurés, on fait $\varphi' = \varphi_0' + x'$, $\varphi'' = \varphi_0'' + x''$, φ' et φ'' désignant les angles que font, avec l'équateur de l'ellipsoïde cherché, les normales à cette surface aux points où elle est percée par les verticales des extrémités de l'arc de méridien. L'équation (21) devient

$$\varphi_0'' + x'' - \varphi_0' - x' = L_0 + M_0 \delta a_0 + N_0 \delta e_0^2, \tag{22}$$

L_0, M_0, N_0 étant actuellement connus, ainsi que les latitudes φ_0'' et φ_0' qui résultent des observations. On rend minimum la somme des carrés des écarts

$$x'^2 + x''^2 + \ldots,$$

relatifs à tous les arcs mesurés. On obtient, en y comprenant les équations (22), autant d'équations que d'inconnues. Si l'un des arcs a, par son étendue, plus d'importance que les autres, on considère un certain nombre de points intermédiaires et on introduit outre l'arc entier, chacun des arcs qui joignent une même extrémité à tous les points intermédiaires.

C'est ainsi que le géodésien anglais Clarke a déduit 14 équations de l'arc anglo-français, 12 de l'arc russe, 13 de l'arc indien, 4 de celui du Cap, 1 de l'arc du Pérou; il a obtenu pour mesure de l'aplatissement $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{293,5}$, les écarts x', x'', ... étant compris

entre $-4'',0$ et $+4'',5$: Bessel avait trouvé pour l'aplatissement $\frac{1}{299,15}$. Nous nous bornerons à signaler que la valeur trouvée par Clarke paraît plus forte que ne le permet la théorie physique de la figure de la Terre. La discussion des observations du pendule a donné à M. Helmert pour valeur de l'aplatissement $\frac{1}{299,26}$.

Le Tableau ci dessous donne les résultats obtenus par Bessel en 1841, par Clarke en 1880, ces derniers adoptés par le Service géographique de l'Armée :

	Bessel.	Clarke.
a	6377397^{m}	6378249^{m}
b	6356079	6356515
Quart du méridien	10000856	10001869
Aplatissement $= \frac{a-b}{a}$	$\frac{1}{299,153}$	$\frac{1}{293,466}$
Excentricité $= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	0,0816968	0,0824831

Le lecteur trouvera de plus amples renseignements aux Chap. XX et XXI du t. II du *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand. L'exposé systématique des méthodes de la haute Géodésie se trouve dans l'Ouvrage de Clarke, *Geodesy* (1880), auquel nous avons emprunté plusieurs démonstrations données dans ce Chapitre, et dans Helmert, *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie* (1880-1884).

257. Compensation des triangles. — Le problème suivant est de haute importance pour la résolution des triangles géodésiques :

Des valeurs mesurées A′, B′, C′ *des angles* A, B, C *d'un triangle déduire les valeurs les plus probables de ces angles.*

La somme de ces trois angles doit être égale à $180^\circ + \varepsilon$, ε désignant l'excès sphérique qui peut d'ailleurs être calculé si l'on a la longueur d'un côté. La relation

$$A + B + C = 180^\circ + \varepsilon$$

donne

$$C = 180^\circ + \varepsilon - A - B,$$

et les équations approchées qui correspondent aux mesures sont

$$A = A',$$
$$B = B',$$
$$A + B = 180^\circ + \varepsilon - C'.$$

On résoudra ces équations par la méthode des moindres carrés ; les équations normales sont

$$2A + B = A' + 180^\circ + \varepsilon - C',$$
$$A + 2B = B' + 180^\circ + \varepsilon - C'.$$

Elles donnent

$$A - A' = B - B' = C - C' = -\frac{1}{3}(A' + B' + C' - 180^\circ - \varepsilon).$$

Il faut donc, pour avoir les valeurs les plus probables des angles A, B, C, retrancher de A', B', C' le tiers de l'excès de la somme des mesures sur $180^\circ + \varepsilon$.

Si l'on a un réseau de triangles, on applique les mêmes principes. Le plus souvent, les valeurs des angles doivent satisfaire rigoureusement à un certain nombre de relations. Tout triangle dont on a mesuré les trois angles donne une relation (R_1) $A + B + C = 180^\circ + \varepsilon$. Si, en un sommet, on a fait un tour d'horizon, la somme des angles, en ce sommet, doit être égale à 360°, ce qui donne une relation (R_2). On a aussi des relations d'une forme différente si l'on a mesuré une base de vérification. La longueur de cette base, calculée par l'ensemble de la triangulation, doit être égale à la longueur mesurée regardée comme exacte, les erreurs des bases ayant beaucoup moins d'importance relative que celles des angles. La relation (R_3) obtenue ne sera pas linéaire par rapport aux angles inconnus ; mais, si l'on pose

$$A = A' + x, \qquad B = B' + y, \qquad C = C' + z, \qquad \ldots$$

les erreurs $x, y, z, \ldots$ seront assez petites pour qu'on en puisse négliger les puissances supérieures à la première et l'équation (R_3) sera linéaire par rapport à $x, y, z, \ldots$; il en sera encore de même des relations (R_1), (R_2). Au moyen de ces équations, on éliminera des équations

$$A = A', \qquad B = B', \qquad \ldots,$$

ou

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \ldots,$$

un nombre d'inconnues égal au nombre total des équations (R_1), (R_2), (R_3), après quoi on résoudra les équations restantes par la méthode des moindres carrés.

258. **Nivellement géodésique.** — Le nivellement est la détermination des altitudes des divers points du sol au-dessus du *géoïde*. Cette détermination a été longtemps effectuée par opérations à grandes distances, ayant pour objet l'altitude des stations géodésiques, et pour moyen immédiat la mesure des distances zénithales de chaque station vue des stations voisines.

Les résultats des mesures sont affectés d'une erreur provenant de la réfraction terrestre, c'est-à-dire de la réfraction par l'atmosphère entre les deux stations. Si la différence d'altitude de deux points est connue, l'observation de la distance zénithale de l'un ou de l'autre permet de déterminer la quantité de cette réfraction. Les mesures faites prouvent qu'elle est sensiblement proportionnelle à l'angle v des verticales des deux points et de la forme mv, le coefficient m étant sensiblement égal à 0,08. Ce coefficient est d'ailleurs variable et la variation atteint fréquemment un huitième du coefficient lui-même ou un centième de l'angle v, ce qui, pour des points éloignés, est loin d'être négligeable.

Le calcul des altitudes, d'après le nivellement géodésique, se fait avec une précision suffisante en regardant la surface de la Terre comme une sphère dont le rayon r soit l'inverse de la racine carrée de la courbure dans la région considérée. Si l'on désigne par h et h' les altitudes de deux stations A et A', z la distance zénithale vraie de la seconde vue de la première, par z' celle de la première vue de la seconde, par v l'angle des verticales en A et en A', le triangle CAA' donne les relations

$$(23) \qquad z' + z = 180^\circ + v,$$

$$(24) \qquad \operatorname{tang}\frac{z' - z}{2} = \frac{h' - h}{2r + h' + h}\cot\frac{v}{2}.$$

Si l'on connaît h, h' et v ou, ce qui revient au même, s, la distance BB' des deux stations projetées sur le géoïde, ces équations

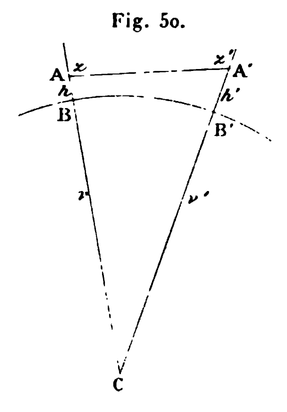
déterminent z et z', et la comparaison de ces valeurs avec les distances zénithales mesurées fait connaître la réfraction terrestre. C'est par de telles mesures que l'on a vérifié qu'elle est proportionnelle à v, et qu'on en a déterminé le coefficient.

Si l'on connaît la distance s, et par suite v, et que l'on ait mesuré les distances zénithales, la seconde équation donnera, en remplaçant $\tang\frac{v}{2}$ par $\frac{s}{2r}+\frac{s^3}{24r^3}$,

$$h'-h=s\left(1+\frac{h'+h}{2r}+\frac{s^2}{12r^2}\right)\tang\frac{z'-z}{2}.$$

La réfraction terrestre étant sensiblement la même aux deux stations, on peut remplacer z et z' par les distances zénithales mesurées.

Fig. 50.



Si l'on n'avait mesuré qu'une des distances zénithales, l'équation (23) donnerait l'autre; seulement il faudrait corriger la distance zénithale mesurée de la réfraction terrestre. Le coefficient de cette réfraction n'étant pas très constant, il vaut mieux mesurer les deux distances zénithales réciproques.

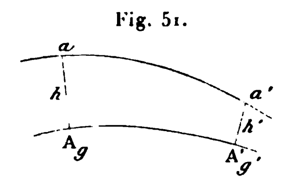
259. Nivellement géométrique. — *Théorie orthométrique, théorie dynamique.* — Dans la théorie actuelle, on appelle *altitude d'un point la hauteur de ce point, comptée sur la verticale, au-dessus de la surface moyenne des mers prolongée, par la pensée, sous les continents, et différence de niveau de deux points la distance de l'un d'eux à la surface*

de niveau qui passe par l'autre. On admet que deux surfaces de niveau sont partout équidistantes. Dans ces hypothèses, la somme des différences de niveau franchies en allant d'un point à un autre, par un itinéraire quelconque, est indépendante de cet itinéraire.

Mais l'hypothèse du parallélisme des surfaces de niveau n'est pas réalisée.

Soient AA', aa' deux surfaces de niveau très voisines, Aa, A'a' les verticales en A et en A', g, g' les intensités de la pesanteur en ces points. Si l'on va de A en a' par le chemin AA'a', le travail de la pesanteur est $h'g'$; si l'on va de A en a' par le chemin

Fig. 51.



Aaa', ce travail est hg. Comme ces travaux sont égaux et g différent de g', h diffère nécessairement de h', et *l'écartement des surfaces de niveau varie en raison inverse de la pesanteur.* De plus, la différence de niveau entre A et a' dépend du chemin suivi pour le nivellement, et si l'on revenait au point de départ après avoir parcouru le chemin Aaa'A'A, on trouverait pour le point A, par rapport à lui-même, une différence d'altitude $h' - h$. Entre Avignon et Clermont, dont la différence d'altitude est 335^{m}, on trouve théoriquement 65^{mm} de différence suivant que l'on passe par Lyon, Roanne et Gannat, ou par Alais, Villefort, Brioude.

Ces considérations ont conduit à effectuer sur les nivellements très précis exécutés depuis 1847, conformément aux indications de M. Bourdaloue, au moyen de niveaux à courte portée, des corrections qui constituent la méthode orthométrique. A chaque différence mesurée, on applique une correction ε donnée par

$$\varepsilon = -2\alpha H \sin 2l.dl,$$

où $\alpha = 0,00264$ et H désigne l'altitude moyenne de la distance nivelée, l la latitude moyenne, dl la différence de latitude entre les deux extrémités.

Cette formule résulte de la formule

$$g = g_0(1 - \alpha \cos 2l - \beta h),$$

que l'on obtient en combinant les formules de Clairaut et de Bouguer et supposant dans cette dernière que ρ soit la moitié de Δ ce qui donne

$$\beta = \frac{5}{4R} = 0{,}000\,000\,196 \quad (\text{R étant le rayon moyen de la Terre}),$$

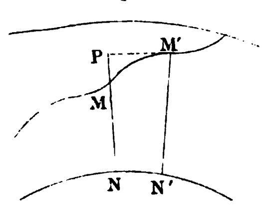
et h l'altitude du point considéré.

Soient :

MM' une station de nivellement;
M'P la surface de niveau en M';
PMN M'N', les verticales;
NN' le niveau des mers,
H, H' les altitudes de M et M'. On a

$$H' = H + MP - (NP - N'M').$$

Fig. 52.



C'est le dernier terme NP — N'M' qui constitue la correction ε.

Menons entre NN' et PM' des surfaces de niveau intermédiaire infiniment voisines. Soient h l'altitude de l'une d'elles au-dessus de N, $h + dh$ celle de la suivante. On a

$$g dh = \text{const.},$$

d'où

$$g d(dh) + dh.dg = 0,$$

et

$$d(dh) = -\frac{dg}{g} dh.$$

Or

$$dg = 2 g_0 \alpha \sin 2l.dl,$$

puisqu'on se déplace sur une surface de niveau. On a donc, en

négligeant les termes du second ordre en α et β,

$$d(dh) = -2\alpha \sin 2l.dl.dh,$$

et, en intégrant pour la hauteur H,

$$NP - N'M' = \int_0^H d(dh) = -2\alpha H \sin 2l.dl,$$

La *théorie dynamique*, exposée en 1873 par M. Helmert, consiste à remplacer, dans le calcul de la différence de niveau de deux points, l'écartement géométrique dH des surfaces de niveau infiniment voisines que l'on rencontre successivement, par *le travail que la pesanteur développerait sur la masse de l'unité de poids tombant de la hauteur* dH. Ce travail est constant entre deux surfaces de niveau en quelque point que l'on se place sur l'une d'elles.

Si g_0 est l'accélération de la pesanteur au niveau de la mer à la latitude de 45°, la masse de l'unité de poids est $\frac{1}{g_0}$, et le travail nécessaire pour l'élever de dH, en un point où l'accélération de la pesanteur est g, est $\frac{1}{g_0}d$H. *La différence dynamique* de niveau Δ_A^B entre deux points A et B, est

$$\Delta_A^B = \int_A^B \frac{g}{g_0} dH,$$

tandis que la différence *brute* de niveau d'après l'ancienne définition est

$$D_A^B = \int_A^B dH.$$

Si le point A est au niveau de la mer, Δ_A^B est *la cote dynamique* du point B : on voit de suite que *la différence dynamique de deux points est la différence de leurs cotes dynamiques.*

Si l'on pose

$$\gamma = \frac{g - g_0}{g_0},$$

on a

$$\Delta_A^B = D_A^B + \int_A^B \gamma\, dH.$$

Le second terme du second membre s'appelle *correction dynamique*.

On voit que, pour évaluer cette correction, il suffirait de mesurer γ, la variation relative de g, pour des intervalles suffisamment rapprochés entre les points A et B, et d'appliquer une méthode quelconque de calcul des intégrales définies.

Nous n'insisterons pas davantage. Le lecteur trouvera plus de détails dans une Note publiée par M. Lallemand dans les *Comptes rendus de la session de l'Association géodésique internationale tenue à Nice en* 1887.

260. Résultats actuels du nivellement général de l'Europe. — On a cru longtemps qu'il existait une différence sensible de niveau entre la mer Méditerranée et l'Océan. Bourdaloue avait trouvé une différence moyenne de $0^m,72$. Les études plus récentes n'ont pas confirmé l'existence d'une différence aussi sensible. A la Conférence générale de l'Association géodésique, tenue à Bruxelles en 1892, il a été établi que les différences de hauteur du niveau moyen de la mer entre des points appartenant à un même littoral, et reliés par des nivellements directs, atteignent

		cm
Dans la	Baltique	8
»	mer du Nord	18
»	Manche	27
»	l'Océan Atlantique	33
»	la Méditerranée	12
»	l'Adriatique	17

Aucune de ces mers ne présente un niveau uniforme, et les dénivellations d'un même littoral atteignent les mêmes grandeurs que les dénivellations des mers entre elles.

CHAPITRE XIX.

DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.

261. **Énoncé du problème général.** — Étant données deux surfaces, on peut, d'une infinité de manières, faire correspondre les points de la seconde aux points de la première. Si tout point de la seconde correspond à un point de la première et à un seul, et que l'on ait le moyen de déterminer les points correspondants, on aura représenté sur la seconde surface les points de la première.

L'application de cette idée à la représentation du ciel étoilé sur une sphère offre le cas le plus simple, celui où, sur deux sphères concentriques, on fait correspondre les points situés sur une même droite issue du centre. Dans ce cas et dans tous les cas où les deux surfaces sont homothétiques, la représentation conserve les angles, modifie les longueurs et les aires dans des rapports constants dont le second est le carré du premier.

L'usage des globes est aujourd'hui tombé en désuétude à cause des difficultés de maniement et d'exécution; on prend généralement pour la seconde surface un plan. Si la première est la surface de la Terre on a, dans le sens le plus général, une carte géographique.

Il est manifestement impossible, en général, de trouver un système de correspondance dans lequel les longueurs se conservent. Cette condition, si elle était réalisée, entraînerait l'égalité de toutes les figures infiniment petites correspondantes; ces deux surfaces seraient applicables l'une sur l'autre. Dans le cas des cartes géographiques, cette circonstance ne se présente pas. Il y a lieu de rechercher comment, dans un mode quelconque de correspondance, se modifient les longueurs, les angles, les aires, pour des éléments infiniment petits : cette recherche conduit au théorème général suivant dû à M. Tissot.

262. Loi de la déformation de Tissot. — *Toute représentation d'une surface sur une autre peut être remplacée par une infinité de projections orthogonales ramenées chacune à une échelle convenable.*

Soient O et O′ deux points correspondants. Supposons qu'à deux directions opposées issues de O correspondent en O′ deux directions opposées et que, si une direction en O varie d'une manière continue, il en soit de même de la direction correspondante. A deux angles droits adjacents AOB, AOB_1 correspondent des angles supplémentaires A′O′B′, $A'O'B'_1$. Si AOB tourne, d'une manière continue, de trois quadrants jusqu'à coïncider avec AOB_1, l'angle correspondant variera d'une manière continue de la valeur A′O′B′ à la valeur $A'O'B'_1$. Il y a une position dans laquelle cet angle est droit. Donc, *il existe toujours au point* O *deux tangentes rectangulaires telles que les tangentes correspondantes en* O′ *soient aussi rectangulaires.*

Soient M un point de la première surface infiniment voisin du point O et M′ le point correspondant. La limite du rapport de OM′ à OM s'appelle *rapport de longueur* au point O suivant la direction OM.

Soient a et b les rapports de longueur suivant les deux directions rectangulaires OA, OB, auxquelles correspondent des directions rectangulaires O′A′, O′B′; supposons a plus grand que b. Construisons un rectangle homothétique au rectangle O′A′M′B′ en prenant $\frac{1}{a}$ pour rapport de similitude. Le côté O′A′ deviendra O′A″ égal à OA et le côté O′B′ devient O′B″, on aura

$$O'B'' = \frac{O'B'}{a} = OB\,\frac{b}{a}.$$

Le rectangle O′A′M′B′ est donc homothétique à un rectangle que l'on peut obtenir en projetant le rectangle OAMB sur un plan faisant, avec le sien, un angle Φ dont le cosinus soit $\frac{b}{a}$, et ce cosinus ainsi que le rapport d'homothétie sont indépendants du point M. La proposition s'applique donc à toute figure infiniment petite autour du point O.

De plus, le lemme fondamental relatif à l'existence, en chaque

point, d'angles droits correspondants, prouve que *l'on peut tracer sur la première surface deux familles de courbes orthogonales, telles que les courbes correspondantes de l'autre surface soient aussi orthogonales.*

Enfin, si l'angle Φ n'est pas nul et qu'un angle droit ROS en O ait pour correspondant en O′ un angle droit R′O′S′, dans le passage du premier au second par projection orthogonale, l'un des côtés OR, OS doit être parallèle à l'intersection des deux plans. Si donc a n'est pas égal à b, il n'y a en O qu'un angle droit AOB auquel corresponde un angle droit A′O′B′. La condition $a = b$ peut être réalisée en des points particuliers; par exemple, dans une projection orthographique sur l'équateur, elle l'est au pôle. Si elle l'est pour tout point de la première surface, le mode de correspondance adopté conserve les angles. *Dans ce cas, il existe sur les deux surfaces une infinité de systèmes de trajectoires orthogonales correspondantes; dans tout autre cas, il n'en existe qu'un.*

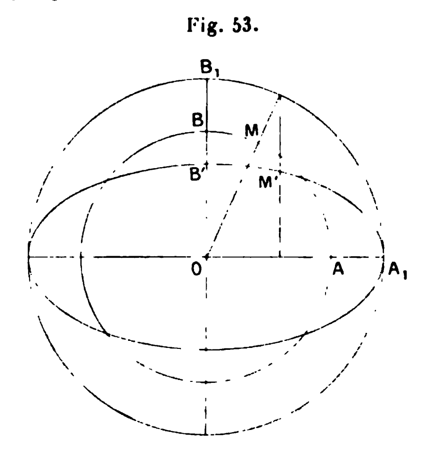
263. Ellipse indicatrice. — Si l'on connaît au point O de la première surface les *tangentes principales*, c'est-à-dire les deux directions OA, OB auxquelles correspondent, sur la seconde des tangentes rectangulaires O′A′, O′B′, on obtient, comme il suit, la direction O′M′ qui correspond à une direction quelconque OM.

Considérons un cercle de rayon infiniment petit ayant pour centre le point O, et soient OA, OB les rayons rectangulaires de ce cercle auxquels correspondent des droites rectangulaires O′A′, O′B′. Soient a et b ($a > b$) les rapports de longueur suivant OA et OB. On passe de l'élément infiniment petit en O à l'élément correspondant par une projection orthogonale en faisant coïncider OA avec OA′, plaçant les deux éléments de façon que l'angle de leurs plans P, P′ ait pour cosinus $\frac{b}{a}$ et remplaçant la figure ainsi obtenue par une figure homothétique pour laquelle le rapport de similitude soit a.

On peut renverser l'ordre des opérations : remplacer le cercle OAB (*fig.* 53) dont nous prendrons le rayon pour unité, par un cercle concentrique OA_1B_1 de rayon a et projeter ce second cercle sur le plan P′. La projection sera une ellipse de centre O, ayant

pour demi-axes les longueurs OA et OB' dirigées suivant OA et OB, et égales respectivement à a et b. A un point M du cercle O correspond le point M', ce qui permet d'étudier, de la façon la plus simple, les propriétés des points correspondants; notamment, la déformation des angles, des longueurs, des aires autour du point O. Cette ellipse a été appelée, par M. Tissot, *indicatrice du système de projection.*

Fig. 53.



On voit de suite qu'à deux directions rectangulaires quelconques correspondent deux diamètres conjugués de cette ellipse. A un angle infiniment petit de sommet O correspond un angle dont la grandeur varie avec la position du premier. A un angle aigu φ dont un côté coïncide avec OA, correspond un angle φ' moindre que φ, tel que

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi,$$

relation d'où l'on tire la suivante

$$\sin(\varphi - \varphi') = \frac{a-b}{a+b}\sin(\varphi + \varphi'),$$

qui montre que l'altération de cet angle, nulle pour $\varphi = 0$, est nulle de nouveau pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et passe par un maximum ω pour une valeur Φ de φ telle que

$$\Phi + \Phi' = \frac{\pi}{2},$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang}\Phi = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

et

$$\sin\omega = \frac{a-b}{a+b}.$$

L'altération de l'angle de deux rayons quelconques est la somme ou la différence des altérations des angles que forment ces rayons avec OA. Il s'ensuit que l'altération maximum est 2ω, et appartient à l'angle formé par deux directions symétriques par rapport à OA faisant, avec cette ligne, l'angle Φ.

On voit aussi que, si l'angle de deux rayons se conserve dans la projection, ces rayons font avec OA d'un même côté des angles φ_1 et φ_2 tels que

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi_1}{a + b\operatorname{tang}^2\varphi_1} = \frac{\operatorname{tang}\varphi_2}{a + b\operatorname{tang}^2\varphi_2}$$

ou

$$\cot\varphi_2 = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi_1,$$

de sorte que φ_2 est le complément de φ'_1 et de même φ_1 de φ'_2.

On obtient le rapport de longueur r suivant la direction φ par les équations

$$r\cos\varphi' = a\cos\varphi, \qquad r\sin\varphi' = b\sin\varphi,$$
$$r^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi.$$

Le maximum et le minimum de r sont a et b.

Si r_1 et r_2 correspondent à deux directions rectangulaires de la première surface, les directions de r_1 et de r_2 étant celles de deux diamètres conjugués, on a, par les théorèmes d'Apollonius,

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2 + b^2, \qquad r_1 r_2 \cos\theta = ab.$$

Si r_1 et r_2 correspondent à deux directions φ_1 et φ_2 dont l'angle se conserve dans la représentation, les relations

$$r_1\cos\varphi'_1 = a\cos\varphi_1,$$
$$r_2\sin\varphi'_2 = b\sin\varphi_2,$$

si l'on tient compte de ce que

$$\varphi'_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2,$$

$$\varphi'_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$$

donnent

$$r_1 \sin\varphi_2 = a\cos\varphi_1,$$

$$r_2 \cos\varphi_1 = b\sin\varphi_2,$$

d'où

$$r_1 r_2 = ab.$$

Le rapport suivant lequel est modifiée l'aire de l'élément infiniment petit en O est égal à ab, c'est-à-dire au rapport de l'aire de l'ellipse à l'aire du cercle.

264. Détermination de l'indicatrice en un point quelconque. — Supposons les deux surfaces rapportées à un même système d'axes de coordonnées rectangulaires; soient généralement

$$x = \varphi(\alpha, \beta), \qquad y = \psi(\alpha, \beta), \qquad z = \chi(\alpha, \beta)$$

les équations qui définissent les coordonnées de la première en fonction de deux paramètres α, β; les coordonnées x, y, z du point correspondant de la seconde s'exprimeront par des fonctions connues des mêmes paramètres

$$x' = \varphi_1(\alpha, \beta), \qquad y' = \psi_1(\alpha, \beta), \qquad z' = \chi_1(\alpha, \beta).$$

Ayant donné à α, β des valeurs déterminées α_0, β_0 auxquelles correspondent des points $C(x_0 y_0 z_0)$, $C'(x'_0 y'_0 z'_0)$, on peut considérer, dans le plan tangent à la première surface, un cercle ayant le point C pour centre et un rayon infiniment petit. Un point de ce cercle $x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz$ correspond à des valeurs $\alpha_0 + d\alpha$, $\beta_0 + d\beta$ de α et β, et l'on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \varepsilon^2,$$

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_0}d\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_0}d\beta, \quad dy = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_0}d\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_0}d\beta, \quad dz = \frac{\partial\chi}{\partial\alpha_0}d\alpha + \frac{\partial\chi}{\partial\beta_0}d\beta.$$

Le point correspondant de la seconde surface $x'_0 + dx'$, $y'_0 + dy'$, $z'_0 + dz'$ est donné par les formules

$$dx' = \frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha_0}d\alpha + \frac{\partial\varphi'}{\partial\beta_0}d\beta, \quad dy' = \frac{\partial\psi'}{\partial\alpha_0}d\alpha + \frac{\partial\psi'}{\partial\beta_0}d\beta, \quad dz' = \frac{\partial\chi'}{\partial\alpha_0}d\alpha + \frac{\partial\chi'}{\partial\beta_0}d\beta.$$

On a donc, pour les coordonnées polaires du point P′,

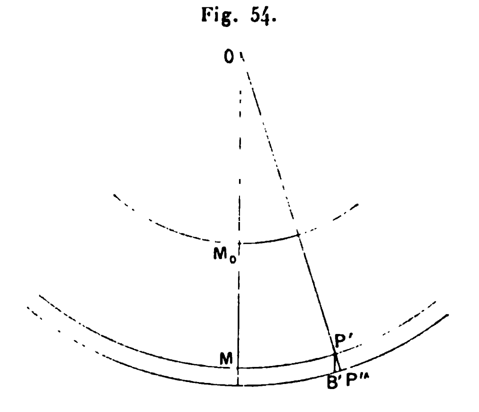
$$r = R(\operatorname{tang}\varphi_0 + x),$$
$$r\theta = \lambda R \sin(\varphi_0 + x),$$

θ désignant l'angle MOP′.

En M, l'indicatrice est un cercle et les déformations sont insensibles. Nous déterminerons l'indicatrice en un autre point P′ par un procédé particulier.

Pour cela, déterminons les deux diamètres conjugués qui en P′ correspondent aux directions du méridien et du parallèle. Le second est la tangente en P′ à l'arc MP′ et sa demi-longueur est la variation que subit MP′ quand le point P se déplace de ε sur son parallèle; c'est donc aussi ε. Le demi-diamètre qui correspond au méridien a pour longueur $\frac{\varepsilon}{\cos i}$, i désignant l'angle B′P′P″ (*fig.* 54)

Fig. 54.



sur lequel le rayon vecteur coupe la représentation du méridien de P′, puisque la distance normale des deux parallèles voisins est ε sur la carte comme sur la sphère. Quant à l'angle i, on l'obtient en regardant λ comme constant dans les équations ci-dessus; elles définissent alors la représentation du méridien de longitude λ; l'élimination de x en donnerait l'équation. On a

$$\operatorname{tang} i = -\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{R\lambda\cos(\varphi_0 + x) - R\dfrac{\lambda\sin(\varphi_0 + x)}{\operatorname{tang}\varphi_0 + x}}{R},$$

$$\operatorname{tang} i = -\frac{r\,d\theta}{dr} = \lambda\,\frac{(x + \operatorname{tang}\varphi_0)\cos(\varphi_0 + x) - \sin(\varphi_0 + x)}{x + \operatorname{tang}\varphi_0}.$$

Pour se rendre compte de la grandeur de l'angle i, on peut lopper sa tangente en série suivant les puissances de x; le pr terme du développement est

$$+\lambda x \sin\varphi_0.$$

On a pris $\varphi_0 = 45°$. On a au maximum (à Brest) $\lambda = 7°$, $x =$ d'où

$$\lambda x \sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, 0{,}122 . 0{,}061 = 0{,}00526.$$

La valeur correspondante de i est environ $18'$.

On trouve les demi-axes principaux a, b par les théoı d'Apollonius qui donnent les relations

$$a^2 + b^2 = \varepsilon^2(2 + \operatorname{tang}^2 i),$$
$$ab = \varepsilon,$$

dont la seconde montre que les aires sont conservées. La grande altération des angles est 2ω où

$$\sin\omega = \frac{a-b}{a+b}.$$

En négligeant les puissances de i supérieures à la premièr trouve

$$a = \left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{tang} i\right)\varepsilon,$$
$$b = \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tang} i\right)\varepsilon,$$
$$2\sin\omega = \operatorname{tang} i.$$

On voit que la plus grande altération relative de longueu 0,00263, la plus grande altération des angles $18'$.

266. Projection de Mercator. — Outre la Carte de Fra nous nous bornerons à citer la projection de Mercator, u: dans les cartes marines. Les méridiens y sont représentés par droites parallèles, séparées par des distances égales aux différe de longitudes; les parallèles par des droites perpendiculaires premières, espacées de telle façon que les angles se conservent distance y d'un parallèle de colatitude φ à l'équateur est log cı

La conservation des angles exige que le petit rectangle d

Carte qui correspond à un petit rectangle de la surface terrestre lui soit semblable. Considérons sur la sphère, en un point de longitude λ et de colatitude φ, un petit rectangle dont les côtés soient dirigés suivant le méridien et le parallèle. Il a pour côtés :

Suivant le méridien . . . . $R\,d\varphi$
» le parallèle . . . . $N \sin\varphi\, d\lambda$

R désignant le rayon de courbure du méridien et N la grande normale au point considéré.

Sur la carte, le petit rectangle a pour côté :

Suivant le méridien . . . . dy
» le parallèle . . . . $a\,d\lambda$

où a désigne la longueur du rayon équatorial.

La condition que les angles se conservent est donc

$$\frac{dy}{d\lambda} = a\frac{R}{N}\,\frac{d\varphi}{\sin\varphi\, d\lambda},$$

où

$$dy = a\frac{1-e^2}{(1-e^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}\,d\varphi,$$

$$y = a(1-e^2)\int_\lambda^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-e^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}.$$

Si on développe en série suivant les puissances de e^2, on trouve pour la *latitude croissante* y cette valeur :

$$y = a \log\cot\frac{\varphi}{2} - ae^2\cos\varphi.$$

Pratiquement, le terme en e^2 est négligeable.

La conservation des angles est particulièrement importante dans les cartes marines, en raison de ce que la loxodromie, c'est-à-dire la ligne qui, joignant deux points de la surface de la Terre, coupe tous les méridiens sous le même angle, est représentée par une droite.

Pour les nombreux systèmes de projection proposés, nous renverrons le lecteur au Mémoire de M. Tissot (*Mémoire sur la représentation des surfaces*, Paris, 1881).

CHAPITRE XX.

APPARENCES QU'OFFRENT LES ASTRES DU SYSTÈME SOLAIRE. — ROTATION. PHASES. — ÉCLIPSES.

---

267. **Détermination du mouvement de rotation d'un astre.** — On ne peut déterminer que le mouvement d'un point distinct des autres points de la surface de l'astre. Pour la Lune, on n'a que l'embarras du choix : les montagnes, les cirques, les plaines visibles à sa surface, y formant des configurations absolument invariables. Avec moins de netteté, mais cependant sans difficultés bien grandes, on a pu déterminer les durées de rotation de Mars, Jupiter, Saturne. Celles de Mercure et Vénus sont aujourd'hui encore incertaines malgré les travaux récents de Schiaparelli; celle d'Uranus et Neptune sont inconnues. La rotation du Soleil a été déterminée au moyen des taches qui apparaissent constamment à sa surface, et dont la fréquence offre alternativement un maximum et un minimum dans une période de onze ans, avec laquelle coïncide une période de perturbations des éléments du magnétisme terrestre.

Le mode d'observation qui se présente le plus immédiatement consiste à mesurer la différence en ascension droite et en déclinaison du point que l'on veut observer avec les premier et second bords pour l'ascension droite, avec les bords supérieur et inférieur pour la déclinaison, et, par suite, avec le centre du disque.

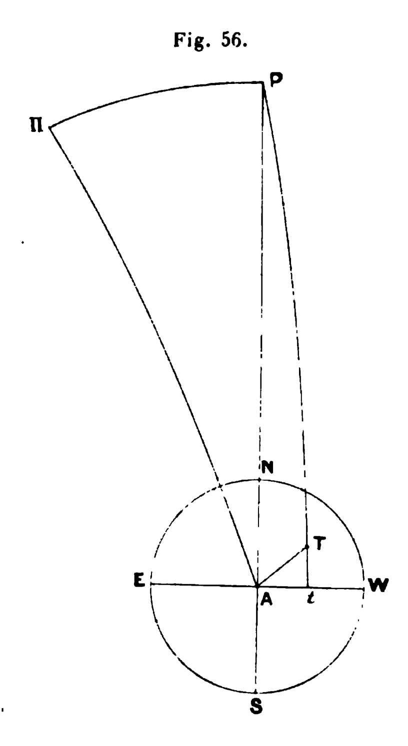
On déduit de ces mesures, comme il suit, en supposant l'astre sphérique la longitude et la latitude astrocentrique du point observé.

Soient (*fig.* 56) :

ENWS, sur la sphère céleste, le disque apparent de l'astre;
A son centre;
PNAS son cercle horaire;

P le pôle de l'équateur;
EAW un arc de grand cercle perpendiculaire au cercle horaire;
T le point observé;
PTt le cercle horaire qui passe par T.

Fig. 56.



L'arc Tt est la différence mesurée de déclinaison entre les points A et T; l'arc At est le produit de la différence d'ascension droite par le cosinus de la déclinaison de l'astre. Ces deux arcs sont donc connus. On en conclut l'angle TAt et l'arc AT par les relations

$$\operatorname{tang} \mathrm{TA}t = \frac{\mathrm{T}t}{\mathrm{A}t}.$$

$$\mathrm{AT} = \frac{\mathrm{A}t}{\cos \mathrm{TA}t}.$$

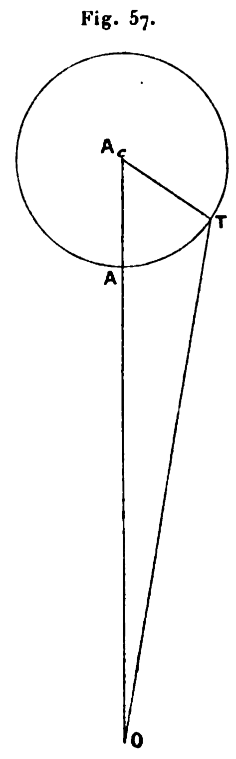
Si, d'autre part (*fig.* 57), on désigne par A_c le centre de l'astre, par O l'observateur, le plan A_cOT coupe l'astre suivant un cercle égal au cercle NESW, et la considération du triangle OTA_c fait

connaître l'angle astrocentrique A_c. On a, à cet effet,

$$\sin(A_c + O) = \frac{OA_c}{TA_c}\sin O = \frac{\sin O}{\sin \Delta},$$

Δ désignant le demi-diamètre apparent de l'astre vu de la position qu'occupe l'observateur.

Fig. 57.

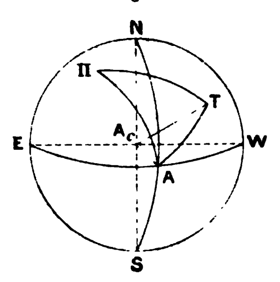


Soient α et δ, λ et β l'ascension droite et la déclinaison, la longitude et la latitude du centre de l'astre vu du centre d'observation, et, sur une sphère ayant l'observateur pour centre, Π (*fig.* 56) le pôle de l'écliptique. Le triangle sphérique ΠAP a pour côtés l'obliquité ε de l'écliptique, et les compléments de δ et de β; l'angle P est égal à $90° + \alpha$, l'angle Π à $90° - \lambda$. Toutes ces quantités sont connues et l'on en déduira l'angle ΠAP et, par suite, l'angle ΠAT par la relation

$$\Pi AT = \Pi AP + 90° - TAt.$$

Si l'on considère une sphère ayant pour centre le centre A_c de l'astre (*fig.* 58), que l'on représente sur cette sphère les plans NAS,

Fig. 58.

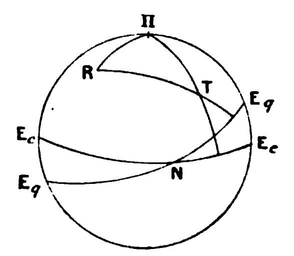


EAW et le pôle Π de l'écliptique, l'observateur se trouvant sur la droite A_cA, le plan ΠAA_c sera le même que le plan du grand cercle ΠA de la figure 56; l'angle ΠAT sera égal à l'angle que nous venons de déterminer, et l'arc ΠA sera égal à $90° + \beta$, la direction $A_c\Pi$ étant parallèle à la direction du pôle de l'écliptique vu de l'observateur. Le triangle ΠTA déterminera le côté ΠT ainsi que l'angle AΠT. On connaîtra donc la latitude astrocentrique du point observé T ainsi que la différence entre la longitude astrocentrique de ce point et celle de la Terre, laquelle surpasse de 180° la longitude de l'astre vu de la Terre.

Nous admettons que l'on ait obtenu ainsi les longitudes astrocentriques L, L′, L″ d'un même point T à diverses époques et nous allons en déduire les éléments de la rotation de l'astre.

Soient (*fig.* 59) sur une sphère concentrique à l'astre : Π le

Fig. 59.



pôle de l'écliptique E_cE_c, R le pôle de l'équateur E_qE_q de l'astre, ou l'extrémité de son axe de rotation. Soit N le nœud et aussi la longitude de ce point; I l'inclinaison de l'équateur sur l'éclip-

tique. Soit encore T le point observé; L sa longitude astr trique; B sa latitude; D sa déclinaison. Le triangle RΠT a côtés

$$R\Pi = I, \qquad \Pi T = 90° - B, \qquad RT = 90° - D,$$

pour angles

$$T, \qquad R, \qquad \Pi = 90° + L - N.$$

On a donc

$$\sin D = \cos I \sin B - \sin I \cos B \sin(L - N)$$

Posant

$$\frac{\sin D}{\cos I} = x,$$
$$\tang I \cos N = y,$$
$$\tang I \sin N = z,$$

on obtient entre les données L et B et les inconnues x, y, z l lation

$$x = \sin B - y \cos B \sin L + z \cos B \cos L$$

Cette relation fournira, pour déterminer x, y, z et, par su et N et accessoirement D, autant d'équations que l'on aur d'observations du point T.

On pourra aussi déterminer l'angle R du triangle et, par la paraison des valeurs de cet angle aux intervalles de temps con entre les observations, vérifier l'uniformité du mouvement.

268. **Rotation du Soleil.** — La rotation du Soleil est déterm par l'étude des taches qui apparaissent presque constamment surface et qui ont un maximum et un minimum de fréquence une période de onze ans, coïncidant avec la période de fréqu des perturbations des éléments du magnétisme terrestre. taches ont, d'ailleurs, incontestablement, à la surface du Soleil mouvements propres qui obligent à employer un nombre co dérable d'observations.

Parmi les nombreux travaux auxquels ces taches ont donné l nous nous bornerons à citer le résultat suivant déduit par M. F des observations faites par Carrington

$$\xi = 862' - 186' \sin^2 b,$$

b désignant la latitude d'une tache, ξ la rotation diurne. Il rés

de cette formule ce fait, confirmé par toutes les études ultérieures, que la durée de la révolution d'une tache est à peu près 25 jours à l'équateur et atteindrait 32 jours aux pôles.

Carrington a trouvé 73°40′ pour la longitude du nœud rapportée à l'équinoxe moyen de 1850,0 et 7°15′ pour l'inclinaison I.

269. Rotation de la Lune. — L'étude de la rotation de la Lune a conduit aux résultats suivants :

La Lune tourne uniformément autour d'un axe situé dans un plan perpendiculaire à la ligne des nœuds de l'orbite de la Lune, de sorte qu'au centre C de la Lune, les perpendiculaires CE à l'écliptique, CL à l'orbite de la Lune et l'axe de rotation CR de la Lune, sont constamment dans un même plan. L'axe CE de l'écliptique est situé entre CL et CR et fait avec CL un angle de 6°40′49″, avec CR un angle de 1°32′9″.

La ligne des nœuds de l'orbite de la Lune ayant dans l'écliptique un mouvement rétrograde et effectuant une révolution complète en 18 ans $\frac{2}{3}$, l'axe de rotation de la Lune tourne dans les mêmes conditions autour de l'axe de l'écliptique.

La durée de la rotation de la Lune est précisément égale à celle de sa révolution autour de la Terre, de sorte que *la Lune nous présente toujours la même face*.

Cependant, les remarques suivantes montrent que cette loi n'est qu'approchée : l'axe de rotation de la Lune ne coïncide pas exactement avec l'axe de l'écliptique, la vitesse de révolution est variable et ne coïncide qu'en moyenne avec la vitesse de rotation; enfin, l'observateur n'est pas placé au centre de la Terre, mais a, par rapport à ce point, un mouvement diurne. Ces trois causes ont pour résultats trois balancements apparents de la surface de la Lune, dont les amplitudes sont d'ailleurs fort petites et qui ont reçu les noms de *libration en latitude, en longitude* et de *libration diurne*. Pour une tache centrale, l'amplitude de la libration en latitude peut atteindre 3′35″; celle de la libration en longitude 4′20″; celle de la libration diurne 32″.

270. Rotation des planètes. — Nous avons donné (n° 180), d'après l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, les durées des rotations des planètes principales. Nous ne pouvons qu'insister

à l'observateur, que l'on considère la section S de l'astre par un plan passant par cette droite et perpendiculaire à l'équateur, le petit axe de la projection C du contour apparent sur la sphère est la distance du centre à la tangente à la courbe S parallèle à D; cette distance est égale à

$$a\sqrt{1 - e^2 \cos^2\varphi},$$

e désignant l'excentricité d'une section méridienne.

D'autre part, l'astre n'est pas lumineux par lui-même. La courbe qui en limite la région éclairée est la section diamétrale conjuguée de la direction qui joint le centre de l'astre au centre du Soleil. C'est une ellipse E qui ne nous apparaît pas en vraie grandeur, mais par sa projection orthogonale C′ sur un plan perpendiculaire à la droite qui joint l'observateur à l'astre.

Le véritable disque apparent de l'astre est limité, en partie, par la courbe C, en partie par la courbe C′. Les deux courbes se rejoignent en chacun des points de l'ellipse E où le rayon vecteur mené de l'observateur est tangent à l'ellipsoïde.

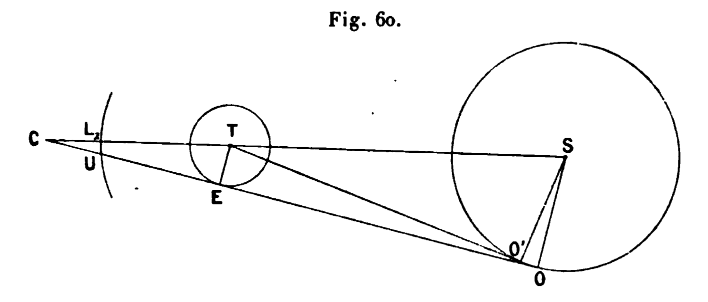
Dans le cas de la Lune, la courbe C est un cercle; l'ellipse E est aussi un cercle et l'ellipse C′ en est la perspective sur la sphère, la position de l'observateur servant de point de vue. Le grand axe A de cette ellipse à peu près égal au diamètre de la Lune, passe sensiblement par le centre de la Lune, est perpendiculaire au plan qui passe par les centres du Soleil, de la Lune et par l'observateur. Le petit axe est sensiblement égal au produit P du grand par le cosinus de l'angle des directions qui joignent le centre de la Lune au centre du Soleil et à l'observateur. La largeur de la partie éclairée suivant le diamètre perpendiculaire à A est égale au rayon du disque augmenté de la valeur algébrique du produit P. Ces remarques expliquent suffisamment les apparences connues sous le nom de *phases de la Lune*.

272. Éclipses de Lune. — Nous exposerons dans les paragraphes suivants la méthode de Hansen pour calculer les éclipses de Soleil et généralement les passages d'un astre sur la surface du cône circonscrit à deux autres astres. Les éclipses de Lune sont un cas particulier de ce problème général; néanmoins, à cause de la simplification que reçoit leur théorie de cette circonstance qu'une même phase de l'éclipse a lieu à un même instant pour

tous les points de la Terre, nous en exposerons une théorie élémentaire.

Par les centres T et S de la Terre et du Soleil menons un plan et dans ce plan une tangente CEO aux sections qu'il détermine dans les globes de ces deux astres (*fig.* 60). CO est une génératrice du cône d'ombre projeté par le Soleil derrière la Terre.

Fig. 60.



Prenons pour unité de longueur le rayon de la Terre; soient Π et ϖ les parallaxes du Soleil et de la Lune. On a

$$TC = \frac{1}{\sin C}, \qquad TS = \frac{1}{\sin \Pi},$$

et si TL désigne la distance de la Lune au centre de la Terre

$$TL = \frac{1}{\sin \varpi}.$$

Soit δ le demi-diamètre apparent du Soleil vu de la Terre, c'est-à-dire l'angle STO′ que fait TS avec la tangente TO′ menée de T au Soleil, on a

$$SO' = TS \sin \delta = \frac{\sin \delta}{\sin \Pi}.$$

On a aussi par les triangles CET, COS

$$TC = \frac{SC}{SO} TE = \frac{ST + TC}{SO},$$

d'où

$$\sin C = \sin \delta - \sin \Pi,$$

et, à moins de $\frac{1}{10}$ de seconde près,

$$C = \delta - \Pi.$$

Enfin, si l'on décrit de T comme centre une sphère de rayon TL, coupant le plan de la figure suivant l'arc L_1U, on a

$$CTU = TUE - C = \varpi - \delta + \Pi.$$

En fait, cet angle est toujours positif.

On a aussi

$$TC - TL = \frac{1}{\sin C} - \frac{1}{\sin \varpi} = \frac{\sin \varpi - \sin \delta + \sin \Pi}{\sin \varpi (\sin \delta - \sin \Pi)},$$

et cette valeur est aussi toujours positive. Le sommet C du cône d'ombre est donc toujours plus éloigné de la Terre que la Lune.

On sait d'ailleurs que la courbure imprimée par l'atmosphère terrestre aux rayons lumineux tels que OE qui la traversent a pour résultat de rapprocher considérablement le sommet de l'ombre absolue et qu'en fait, dans les éclipses totales, le disque de la Lune est un peu éclairé. Nous nous bornons à signaler cette circonstance et continuons l'étude de l'éclipse purement géométrique.

Soit λ la latitude géocentrique de la Lune, δ' son demi-diamètre apparent. Si la Lune est tangente extérieurement au cône d'ombre au moment de l'opposition, on a

$$CTU = \varpi - \delta + \Pi = \lambda - \delta'.$$

Si $\lambda - \delta'$ est plus grand que $\varpi - \delta + \Pi$, il n'y a pas éclipse. Dans le cas contraire, la Lune est éclipsée au moins en partie.

La condition pour qu'il y ait éclipse est donc qu'au moment de l'opposition la latitude λ de la Lune soit moindre que $\delta' + \varpi + \Pi - \delta$. Les valeurs maxima et minima des divers angles employés étant

	δ'.	ϖ.	Π.	δ.
Maxima........	16′45″	61′24″	9″,0	16′18″
Minima........	14′41″	53′38″	8″,8	15′45″,

on voit que si λ est moindre que 52′ il y a sûrement éclipse et que si λ surpasse 63′ l'éclipse ne peut se produire.

Nous avons, dans ce qui précède, raisonné comme si la latitude de la Lune était constante dans le voisinage de l'opposition. En toute rigueur, il est possible que, par suite de l'obliquité de son orbite par rapport à l'écliptique un bord soit légèrement éclipsé sans l'être à l'instant précis de l'opposition. L'inclinaison de

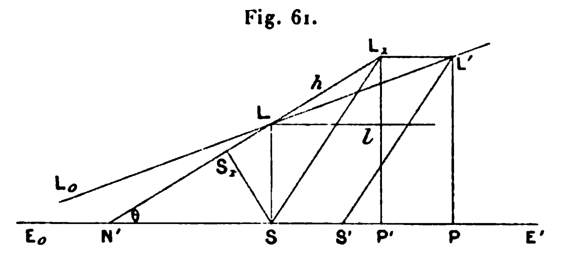
l'orbite lunaire n'étant que de 4°, cette circonstance n'a pas d'importance pour ce que nous venons de dire : nous en tiendrons compte dans ce qui suit.

273. Calcul des circonstances de l'éclipse. — D'après ce qui précède, la Lune, au moment d'une éclipse, se trouve très près de l'un des nœuds de son orbite.

Soient (*fig.* 61) :

EE′ l'écliptique;
LL′ l'orbite de la Lune, près de l'opposition;
S le centre du disque d'ombre pure au moment de l'opposition;
L la Lune à cet instant.

Fig. 61.



Soient, en une heure :

SS′ le mouvement M du centre d'ombre pure;
LL′ le mouvement de la Lune dans son orbite;
SP la projection *m* de LL′ sur l'écliptique;
M et *m* sont les mouvements horaires du Soleil et de la Lune en longitude.

On peut admettre que S′ est resté fixe en S si l'on transporte L′ en L_1 par le parallélogramme $SL_1S'L'$; alors, $N'LL_1$, est l'orbite relative de la Lune, et, si θ désigne son inclinaison sur l'écliptique,

$$\text{tang}\,\theta = \frac{lL_1}{Ll},$$

lL_1 étant le mouvement horaire *n* de la Lune en latitude. La relation

$$\text{tang}\,\theta = \frac{n}{m - M}$$

donne ainsi θ. Le mouvement horaire relatif h est donné par

$$h = \frac{m - M}{\cos\theta}.$$

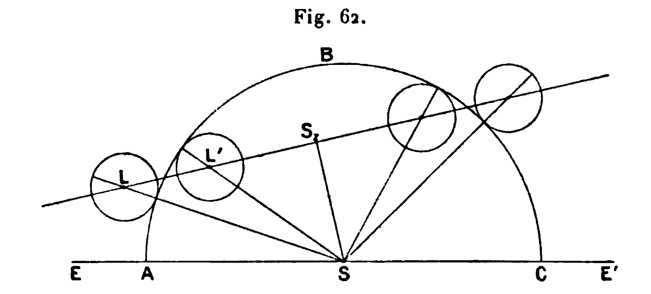
Le milieu de l'éclipse arrive quand la Lune est en S_1 le plus près possible de S; le temps écoulé entre S_1 et L est en heures

$$T = \frac{S_1 L}{LL_1} = \frac{\lambda \sin\theta}{h} = \frac{\lambda \sin\theta \cos\theta}{m - M}.$$

Ces éléments une fois déterminés, soient (*fig.* 62) :

EE′ l'écliptique;
S le Soleil;
xy orbite relative de la Lune;
S_1 le milieu de l'éclipse;
ABC la section droite du cône d'ombre à la distance de la Lune.

Fig. 62.



Le commencement de l'éclipse a lieu quand la Lune est en L tangente extérieurement au cercle ABC; alors

$$LS_1 = \sqrt{LS^2 - SS_1^2} = \sqrt{(R + \delta' + \lambda \cos\theta)(R + \delta' - \lambda \cos\theta)}.$$

Au commencement de la totalité la Lune est en L′ tangente intérieurement au cercle ABC

$$L'S_1 = \sqrt{L'S^2 - SS_1^2} = \sqrt{(R - \delta' + \lambda \cos\theta)(R - \delta' - \lambda \cos\theta)}.$$

Les deux dernières phases, fin de l'éclipse totale et fin de l'éclipse sont symétriques par rapport à la date du milieu de l'éclipse. A cette date, si l'éclipse n'est pas totale, la largeur du croissant éclipsé est maximum et le rapport de cette largeur au diamètre de la Lune est la *grandeur* de l'éclipse. Ce rapport est

égal à

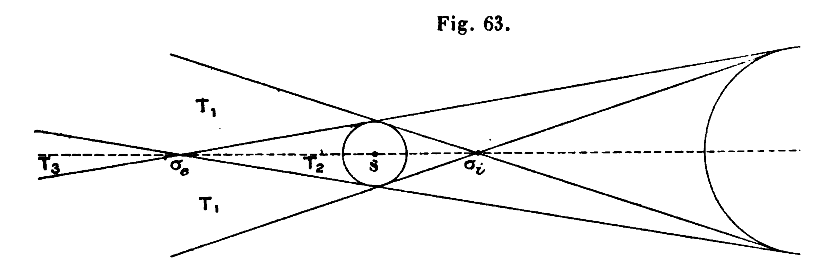
$$\frac{R - S_1S + \delta'}{\delta'}.$$

Si l'on veut se préoccuper de la pénombre, on remplace ce qui précède le rayon R du cercle du cône d'ombre p rayon R′ du cône de pénombre :

$$R' = \varpi + \Pi + \delta.$$

274. Éclipses de Soleil; éclipses partielles, totales, annul — Il y a éclipse de Soleil, pour un point de la Terre, quai point se trouve dans l'intérieur de l'un des deux cônes d volution de sommets σ_i et σ_e, circonscrits à la Lune S

Fig. 63.



Soleil S′ (*fig.* 63). Un point P de la Terre, situé dans la régio entre les deux cônes, ne voit qu'une partie du disque du S limitée par le bord du disque et par l'intersection du disque le cône de sommet P_1 circonscrit à la surface de la Lune. La p du disque solaire ainsi vue ressemble à la Lune dans l'une conque de ses phases. Si le point P est situé dans la régio entre le cône de sommet σ_e et la Lune, il ne voit pas le S il y a pour ce point éclipse totale. Un point P de la région T_3, rieure au même cône d'ombre mais située au delà du somm voit une portion annulaire du disque, limitée intérieuremen la trace, sur le disque, du cône de sommet P circonscrit à la I

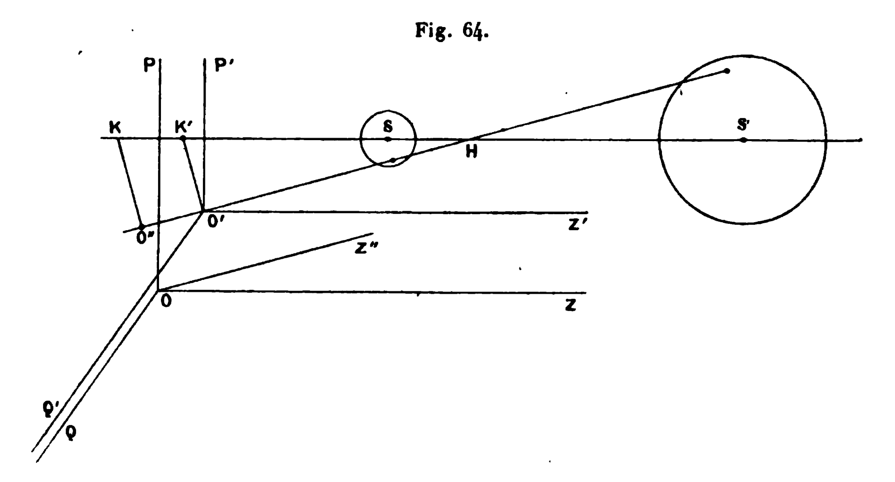
Le rapport des diamètres du Soleil et de la Lune est 398; de leurs moyennes distances à la Terre n'est que 386; de que le sommet σ_e du cône d'ombre ne peut atteindre la Terr grâce aux excentricités des orbites qui peuvent porter le derni deux rapports à 413. La section du cône d'ombre et même du cône σ_i par la Terre sont beaucoup moins étendues que la

face de la Terre. Le diamètre de la dernière n'atteint pas les $\frac{6}{10}$ du rayon terrestre. Il suit de là qu'une éclipse de Soleil n'est possible que si, à la conjonction, la latitude de la Lune est très faible, et, quand elle a lieu, elle n'est visible que pour une zone peu étendue de la surface de la Terre.

Nous exposons, ci-après, en conservant les notations mêmes de l'auteur, les principes de la méthode donnée par Hansen, pour la détermination des circonstances d'une éclipse de Soleil.

275. **Ligne d'intersection d'un des cônes d'ombre ou de pénombre avec la surface de la Terre, à un instant donné. — Premier système d'équations.** — Hansen résout le problème suivant : *On suppose qu'à un instant donné un point donné de la Terre voit les disques du Soleil et de la Lune en contact : déterminer en*

Fig. 64.



grandeur et en direction le rayon terminé en ce point de la section du cône d'ombre par un plan passant en ce point et perpendiculaire à l'axe de ce cône.

Soient (*fig.* 64) :

S, S', O les centres de la Lune, du Soleil, de la Terre;
s, s' les rayons de la Lune et du Soleil;
ρ' la distance de leurs centres S, S';
f le demi-angle SHO' du cône circonscrit considéré;
H le sommet de ce cône.

Nous supposons f positif pour le cône de pénombre, n
pour le cône d'ombre pure.

Par le centre de la Terre menons trois axes rectangulaire
OP, OQ et par la position O′ de l'observateur trois axes para
O′Z′, O′P′, O′Q′.

Nous supposons OZ parallèle à l'axe SS′ du cône, axe
voisin de l'écliptique; nous menons OP dans l'écliptique à ç
OZ vers l'est, OQ vers le nord. Soient :

K et K′ les points où l'axe du cône perce les plans POQ, P′(
O″ le point où la droite O′H perce le plan POQ;
u le rayon O′K′;
u' le rayon O″K;
θ_1 l'angle que fait u avec O′Q′;
Z, P, Q; Z′, P′, Q′ les coordonnées du centre de la Lune pa
port aux deux systèmes d'axes.

On a, quel que soit le cône considéré

$$(1) \qquad \begin{cases} u \sin\theta_1 = P', \\ u \cos\theta_1 = Q', \\ u - u' = (Z - Z')\,\text{tang} f. \end{cases}$$

Sauf u et θ_1, toutes les quantités qui figurent dans ces équa
peuvent être déduites, à une date donnée, des éphémérides
nomiques : l'élimination de u et de θ_1 donnerait donc, ent
coordonnées géocentriques de l'observateur O′, une équatio
définirait, à la date donnée, l'intersection du cône d'ombre
sidéré avec la surface de la Terre.

Occupons-nous maintenant du calcul des quantités introd
On a d'abord, et dans tous les cas,

$$(2) \qquad \sin f = \frac{s \pm s'}{\rho'},$$

en prenant le signe supérieur pour le cône de pénombre, le
inférieur pour le cône d'ombre proprement dite.

Observons, à ce propos, que pendant une période d'éc
partielle on peut, à chaque instant, envisager, dans le plan pa
par la ligne des centres et l'observateur, la tangente menée
position de l'observateur au globe de la Lune comme tange

une sphère σ concentrique au globe solaire. Cette droite est alors une génératrice, passant par l'observateur, d'un cône circonscrit à la Lune et à la sphère σ. On peut donc assimiler une phase quelconque de l'éclipse à un contact des bords : il suffit de regarder s' dans la valeur de $\sin f$ comme une variable susceptible de prendre toutes les valeurs depuis $+s'$ jusqu'à $-s'$.

D'autre part, soient :

- λ', β' les longitude et latitude sélénocentriques du centre s' du Soleil;
- z, p, q les coordonnées rectangulaires géocentriques du point O';
- Z, P, Q celles du centre S de la Lune;
- r, l, b les coordonnées polaires géocentriques écliptiques du centre de la Lune;
- r', l', b' celles du centre du Soleil;
- a', d' son ascension droite et sa déclinaison;
- l'', b'' les longitude et latitude géocentriques de la droite OZ″ parallèle à O'H;
- Z', P', Q' les coordonnées rectangulaires de S par rapport aux axes O'Z'P'Q';
- ρ, L, B les coordonnées polaires géocentriques écliptiques de l'observateur.

Toutes ces coordonnées varient peu, sauf L et B dont la variation résulte du mouvement diurne de la Terre.

Les coordonnées polaires écliptiques des directions OZ, OP, OQ sont

Pour OZ	λ'	β'
» OP	$\lambda'+90°$	0
» OQ	λ'	$90°+\beta'$

et si M (*fig.* 65) désigne la projection de S sur la sphère céleste géocentrique et Π le pôle de l'écliptique, les triangles ΠMZ, ΠMP, ΠMQ donnent

$$(3)\qquad \begin{cases} Z = r[\sin\beta'\sin b + \cos\beta'\cos b\cos(l-\lambda')], \\ P = r\cos b\sin(l-\lambda'), \\ Q = r[\cos\beta'\sin b - \sin\beta'\cos b\cos(l-\lambda')]. \end{cases}$$

données polaires écliptiques de ces trois droites sont :

Pour OZ''...........	l''	b''
» OP''..........	$l''+90°$	0
» OQ''...........	l''	$90°+b''$

Par rapport aux axes P et Q soient : P'', Q'' les coordonnées géocentriques du centre de la Lune ; p'', q'' celles de l'observateur.

Par rapport à des axes parallèles aux précédents et menés par le point O' soient P''_1, Q''_1 les coordonnées du centre de la Lune.

On a par la considération de triangles ayant pour sommets, sur une sphère géocentrique, le pôle de l'écliptique, la trace de l'un des axes P'', Q'' et la position géocentrique du centre de la Lune ou celle de l'observateur

$$(8)\qquad \begin{cases} P'' = r\cos b\sin(l-l''), \\ Q'' = r\sin b\cos b'' - r\cos b\sin b''\cos(l-l''), \\ p'' = \rho\cos B\sin(L-l''), \\ q'' = \rho\sin B\cos b'' - \rho\cos B\sin b''\cos(L-l''). \end{cases}$$

D'autre part

$$(9)\qquad \begin{cases} P'_1 = P'' - p'', \\ Q'_1 = Q'' - q'', \end{cases}$$

et, θ''_1 désignant l'angle que fait avec OQ'' la projection sur le plan $P''OQ''$ du rayon de la Lune qui aboutit au point de contact des disques

$$(10)\qquad P''_1 = s\sin\theta''_1, \qquad Q''_1 = s\cos\theta''_1.$$

On en conclut

$$(11)\qquad \begin{cases} s\sin\theta''_1 = P'' - \rho\cos B\sin(L-l''), \\ s\cos\theta''_1 = Q'' - \rho[\sin B\cos b'' - \cos B\sin b''\cos(L-l'')]. \end{cases}$$

Les deux équations (11) sont les deux équations cherchées.

Les équations (11) sont quelquefois employées par Hansen dans la solution des problèmes auxquels donne lieu l'étude des éclipses ; les équations (6) le sont plus fréquemment ; mais il faut d'abord exprimer ρ', λ', β' en fonction des éléments des éphémérides astronomiques, et les coordonnées écliptiques L, B, de l'observateur, en fonction des coordonnées équatoriales, pour arriver à

les exprimer en fonction du temps. Nous ne ferons la transformation que dans les équations (6).

277. Calcul des coordonnées sélénocentriques du Soleil. — On a, par le changement de l'origine des coordonnées,

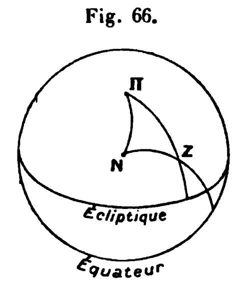
$$\begin{aligned} \rho' \cos\beta' \cos\lambda' &= r' \cos b' \cos l' - r \cos b \cos l, \\ \rho' \cos\beta' \sin\lambda' &= r' \cos b' \sin l' - r \cos b \sin l, \\ \rho' \sin\beta' &= r' \sin b' - r \sin b. \end{aligned}$$

Le rapport de r à r' est environ de 1 à 400; $l - l'$ et $b - b'$ ne dépassent pas 1°36′; il s'ensuit que l'on peut négliger les termes petits du second ordre, et l'on a

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta' &= b' - \frac{r}{r'}(b - b'), \\ \lambda' &= l' - \frac{r}{r'}(l - l'), \\ \rho' &= r' - r. \end{aligned} \right.$$

278. Introduction des coordonnées équatoriales de l'observateur. — Pour effectuer la substitution des coordonnées équatoriales, μ et φ', de l'observateur aux coordonnées écliptiques

Fig. 66.



considérons, sur une sphère céleste géocentrique, le triangle qui a pour sommets le pôle nord Π de l'écliptique, le pôle nord N de l'équateur et le point Z de coordonnées écliptiques λ', β' (*fig.* 66). Ce triangle a pour côtés

$$N\Pi = \varepsilon, \qquad NZ = 90° - \delta', \qquad \Pi Z = 90° - \beta',$$

pour angles

$$Z = h, \qquad \Pi = 90^\circ - \lambda', \qquad N = 90^\circ + \alpha',$$

α' et δ' désignant l'ascension droite et la déclinaison du point Z.

De même, le triangle, qui a pour sommets Π, N et la position géocentrique O′ de l'observateur, a pour côtés

$$N\Pi = \varepsilon, \qquad NO' = 90^\circ - \varphi', \qquad \Pi O' = 90^\circ - B,$$

pour angles opposés

$$O', \quad 90^\circ - L, \quad 90^\circ + \mu.$$

On déduit de la considération du dernier triangle

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin B &= \sin\varphi' \cos\varepsilon - \cos\varphi' \sin\varepsilon \sin\mu, \\ \cos B \sin L &= \sin\varphi' \sin\varepsilon + \cos\varphi' \cos\varepsilon \sin\mu, \\ \cos B \cos L &= \cos\varphi' \cos\mu. \end{aligned} \right.$$

Cela étant, si l'on part des équations (6), que l'on déduise des deux dernières $u \sin\theta$, $u \cos\theta$, en posant $\theta = \theta_1 - h$, que des expressions obtenues l'on élimine L et B au moyen des équations (13) et qu'on y introduise ε, α', δ' au lieu de h, λ', β' par la considération du triangle $N\Pi Z$, on trouve

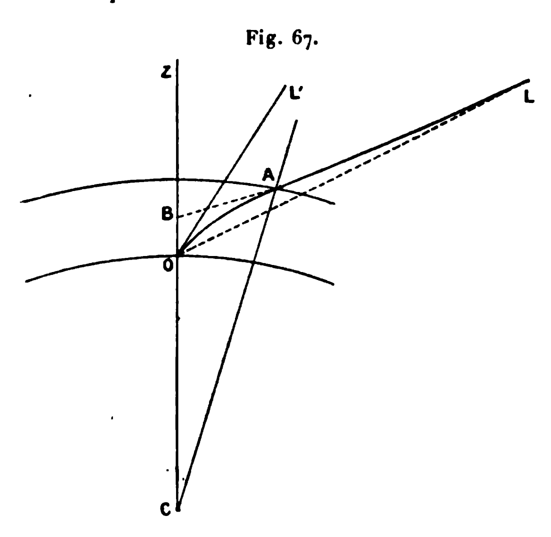
$$(6^*) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= u' - \rho[\sin\varphi' \sin\delta' + \cos\varphi' \cos\delta' \cos(\mu - \alpha')] \operatorname{tang} f, \\ u \sin\theta &= P \cos h - Q \sin h - \rho \cos\varphi' \sin(\mu - \alpha'), \\ u \cos\theta &= P \sin h + Q \cos h - \rho[\sin\varphi' \cos\delta' - \cos\varphi' \sin\delta' \cos(\mu - \alpha')]. \end{aligned} \right.$$

L'angle θ est analogue à θ_1. Ce dernier est à peu près l'angle que fait, avec le cercle de latitude du point $\lambda'\beta'$, le grand cercle ayant pour centre l'observateur et passant par le centre de la Lune et par le point $\lambda'\beta'$. L'angle θ n'en diffère qu'en ce que le cercle de déclinaison du point $\lambda'\beta'$ remplace le cercle de latitude.

279. **Influence de la réfraction atmosphérique.** — Un rayon lumineux LAB (*fig.* 67) issu d'un point du bord de la Lune, entrant en A dans l'atmosphère, est dévié, et arrivant à la surface de la Terre au point O où se trouve l'observateur, paraît avoir la direction OL′ de la tangente à la trajectoire AO de ce rayon lumineux. La théorie ordinaire de la réfraction donne l'angle des rayons LA et OL′. Elle n'est pas immédiatement applicable ici,

attendu que, pour l'observateur placé en O, la direction vraie du point L n'est pas LA, mais LO, et que, à la distance de la Lune, l'angle ALO n'est pas insensible.

Fig. 67.



Le moyen le plus simple de supprimer l'influence de la réfraction dans la théorie des éclipses consiste à supposer que l'observateur, au lieu d'être en O′, est en B, à la rencontre du rayon LA avec la verticale OZ. Si, négligeant l'aplatissement, on désigne par ρ et $\rho(1+x')$ les distances de l'observateur et du point A au centre de la Terre, par ρx la hauteur OB, par i et z les distances zénithales LBZ, L′OZ, par μ et μ_0 les indices de réfraction de l'air en B et en O, on a, par l'équation fondamentale de la théorie de la réfraction

$$\mu\rho(1+x')\sin \mathrm{LAL'} = \mu_0\rho\sin z.$$

Le triangle CAB donne

$$\rho(1+x')\sin \mathrm{LAL'} = \rho(1+x)\sin i.$$

On a donc

$$\mu(1+x)\sin i = \mu_0\sin z,$$

d'où

$$x = \frac{\mu_0}{\mu}\frac{\sin z}{\sin i} - 1.$$

D'autre part, on a

$$i = z + r,$$

r désignant la réfraction, laquelle est, par les Tables, donnée en fonction de z. Il s'ensuit que x ne dépend que des conditions atmosphériques et de la distance zénithale. Hansen donne une Table faisant connaître $\log(1+x)$ pour chaque valeur de la hauteur vraie. Ce logarithme diffère très peu de zéro et l'emploi de cette Table est des plus aisés.

Pour tenir compte de la réfraction, on se bornera, dans la théorie des éclipses, à remplacer ρ par $\rho(1+x)$.

280. Introduction des mouvements horaires de l'axe du cône d'ombre, des coordonnées géographiques de l'observateur et de l'heure vraie de l'observation. — Admettons que l'on ait calculé par les formules (3) les valeurs de P et Q pour une série de dates équidistantes $\ldots, T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2, \ldots, T_0$ désignant en temps vrai du premier méridien celle de ces époques qui approche le plus de la conjonction en longitude. On en déduira les mouvements horaires moyens p_n, q_n par les formules

$$p_n = \frac{P_n - P_0}{T_n - T_0}, \qquad q_n = \frac{Q_n - Q_0}{T_n - T_0}.$$

Puis, une interpolation facile donnera les mouvements horaires moyens p, q entre la date T_0 et une date quelconque T et l'on aura à cette date T

$$P = P_0 + p(T - T_0),$$
$$Q = Q_0 + q(T - T_0).$$

Si l'on désigne par $T_0 - T'$ l'heure de la conjonction, par p', q' les valeurs de p, q à cette date, P étant alors nulle, on aura

$$T' = \frac{P_0}{p'},$$

et si l'on fait

$$U = Q_0 - q'T',$$

U sera la valeur de Q à la même date.

A cause de la petitesse de P_0 on peut, dans le calcul de T', remplacer p' par une quelconque des valeurs de p, et l'on a

$$P = p(T - T_0 + T'), \tag{12}$$

puis

$$Q = U + q(T - T_0) + q'T',$$
$$= U + q(T - T_0 + T') + (q' - q)T',$$

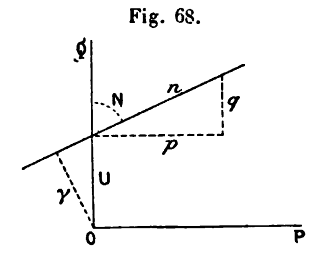
ou, à cause de la petitesse de $q' - q$ et de T'

$$(13)\qquad Q = U + q(T - T_0 + T'),$$

Hansen pose

$$p = n \sin N,$$
$$q = n \cos N,$$
$$\gamma = U \sin N,$$
$$\mu_0 = 15(T_0 - T') - \frac{15}{n} U \cos N,$$

Fig. 68.



γ désignant, dans le plan PQ, la plus courte distance de la tı
l'axe du cône au centre de la Terre, μ_0 l'heure vraie (en d
du premier méridien à laquelle n est égal à γ.

Si l'on représente par λ la longitude orientale, en degr
l'observateur par rapport au premier méridien, par t l'heure
du lieu d'observation aussi en degrés, on a

$$15T = t - \lambda,$$

et les valeurs (12) et (13) de P et Q deviennent

$$P = -\gamma \cos N + \frac{t - \lambda - \mu_0}{15} n \sin N,$$
$$Q = \gamma \sin N + \frac{t - \lambda - \mu_0}{15} n \cos N.$$

Le calcul de α', δ', h se fait comme il suit : le triangle
rique NΠZ utilisé au n° 278 donnerait, si l'on négligeait β' et

remplaçât λ' par l', α' et δ' par a' et d', h par h_0,

$$\tang a' = \cos\varepsilon \tang l',$$
$$\tang d' = \tang\varepsilon \sin a',$$
$$\sin h_0 = \sin\varepsilon \cos a';$$

après quoi, posant

$$\alpha' = a' - \Delta\alpha', \qquad \delta' = d' - \Delta\delta', \qquad h = h_0 + \Delta h,$$

le triangle lui-même donne

$$\Delta\alpha' = -\frac{\cos h}{\cos\delta'}(\lambda' - l') + \frac{\sin h}{\cos\delta'}\beta',$$
$$\Delta\delta' = -\sin h(\lambda' - l') - \cos h \beta',$$
$$\Delta h = -\sin\delta'(\alpha' - a').$$

Dans les équations (6*) il entre encore $\mu - \alpha'$ qui est égal à $\mu - a' + \Delta\alpha'$, ou à $t + \Delta\alpha'$.

Si, en outre, on désigne par c l'aplatissement du méridien terrestre, par φ_1 l'anomalie excentrique du lieu d'observation, on a

$$\rho \cos\varphi' = \cos\varphi, \qquad \rho \sin\varphi' = (1 - c)\sin\varphi_1,$$

et les équations fondamentales deviennent, en posant encore $N - h = N'$,

$$(6^{**}) \left\{ \begin{aligned} u &= u' - (1 + x)\tang f[(1 - c)\sin\varphi_1 \sin\delta' \\ &\qquad + \cos\varphi_1 \cos\delta' \cos(t + \Delta\alpha')], \\ u\sin\theta &= -\gamma\cos N' + \frac{t - \lambda - \mu_0}{15} n \sin N' \\ &\qquad -(1 + x)\cos\varphi_1 \sin(t + \Delta\alpha'), \\ u\cos\theta &= \gamma\sin N' + \frac{t - \lambda - \mu_0}{15} n \cos N' \\ &\qquad -(1 + x)[(1 - c)\sin\varphi_1 \cos\delta' - \cos\varphi_1 \sin\delta' \cos(t + \Delta\alpha')]. \end{aligned} \right.$$

Rappelons que, dans ces équations, c, γ, U, μ_0 sont des constantes; f, h, x, N', δ' varient très peu et pourraient, en première approximation, être aussi regardées comme des constantes : φ_1, λ donnent la position de l'observateur à la surface de la Terre, t l'heure vraie du lieu d'observation en degrés. A l'égard de f il y a lieu de remarquer qu'on en peut modifier la valeur en faisant varier s' ainsi qu'il a été expliqué.

contrant deux fois le point A. Cependant pour la phase maximum, les deux dates se confondent. Cette phase maximum correspond au minimum de σ et par suite de f et de u. La recherche des points de la Terre pour lesquels la phase maximum a une grandeur donnée se fera donc en écrivant que pour la valeur correspondante u' les deux valeurs de t sont égales. Si l'on admet que cette valeur de u' corresponde au simple contact des deux bords, la ligne obtenue sera l'une des courbes limites nord ou sud.

Nous aurons donc l'équation à adjoindre aux équations (6^{**}) en écrivant que

$$df = 0.$$

Or si l'on différentie les équations (6^{**}), que l'on remplace df par zéro et que l'on néglige le produit $\operatorname{tang} f\, dx$, on trouve

$$du = (1 + x)\operatorname{tang} f \cos\varphi_1 \cos\delta' \sin(t + \Delta\alpha')\, dt,$$

$$\begin{aligned} &\sin\theta\, du + u\cos\theta\, d\theta \\ &\quad = dt\left[\frac{n}{\varkappa}\sin N' - (1 + x)\cos\varphi_1\cos(t + \Delta\alpha') - \frac{dx}{dt}\cos\varphi_1\sin(t + \Delta\alpha')\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cos\theta\, du - u\sin\theta\, d\theta \\ &\quad = dt\left\{\frac{n}{\varkappa}\cos N' - (1 + x)\cos\varphi_1\sin\delta'\sin(t + \Delta\alpha')\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{dx}{dt}[(1 - c)\sin\varphi_1\cos\delta' - \cos\varphi_1\sin\delta'\cos(t + \Delta\alpha')]\right\}. \end{aligned}$$

Il convient de remarquer que, t étant supposé exprimé en degrés, du, $d\theta$ en parties du rayon, on a dû exprimer dt en parties du rayon et, pour cela, diviser n par le rapport de l'arc d'un degré au rayon, ce qui revient à remplacer $\frac{n}{15}$ par $\frac{n}{\varkappa}$, où

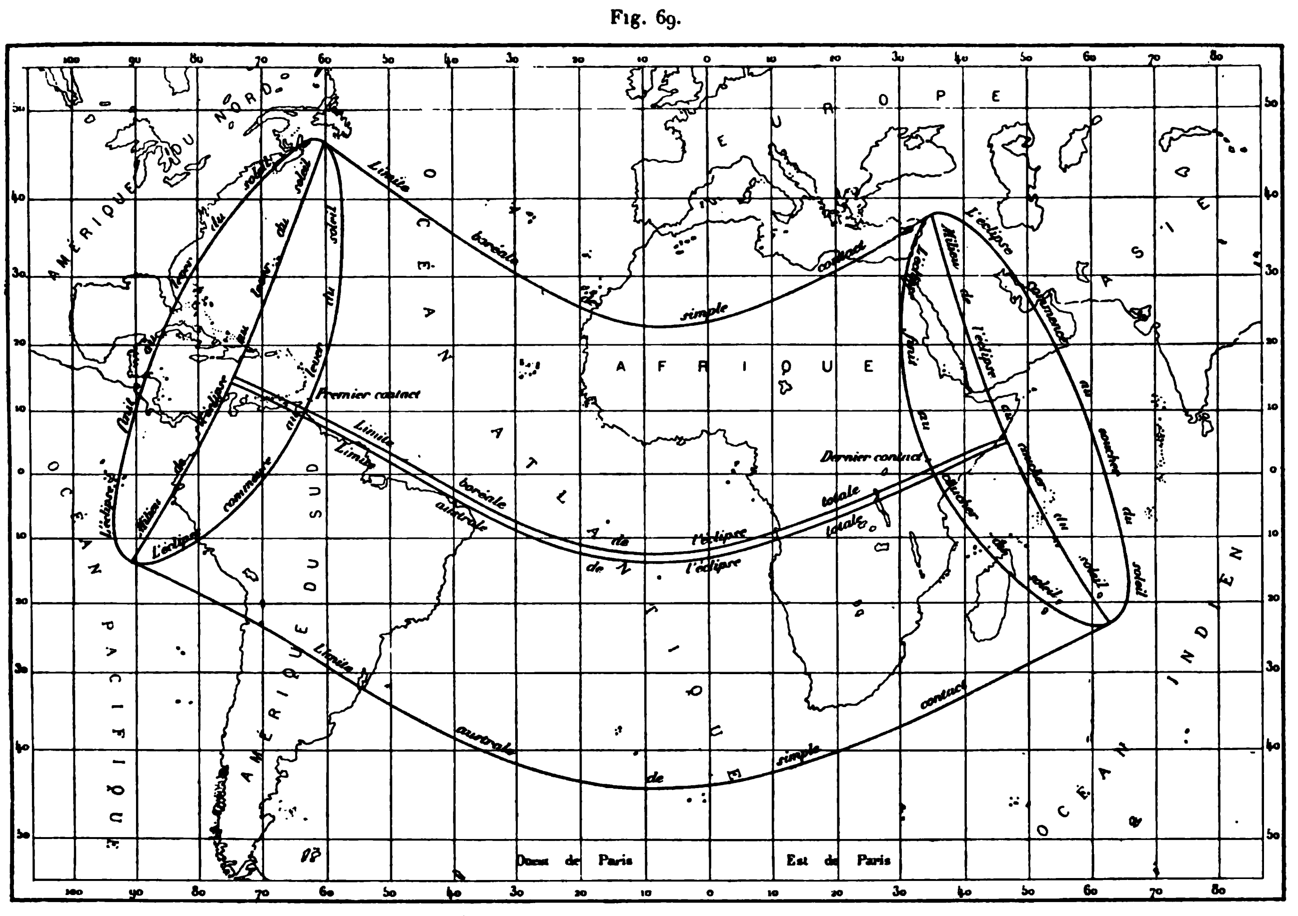
$$\log\varkappa = \log\frac{15.3600}{206265} = \bar{1},41797.$$

L'élimination de du, $d\theta$, dt donne l'équation qu'il faut adjoindre aux équations (6^{**}) pour avoir les équations des courbes nord ou sud.

Le terme $\frac{n}{\varkappa}$ étant beaucoup plus grand que les autres termes à cause de la grandeur de n et de la petitesse de $\varkappa$, on a à peu près

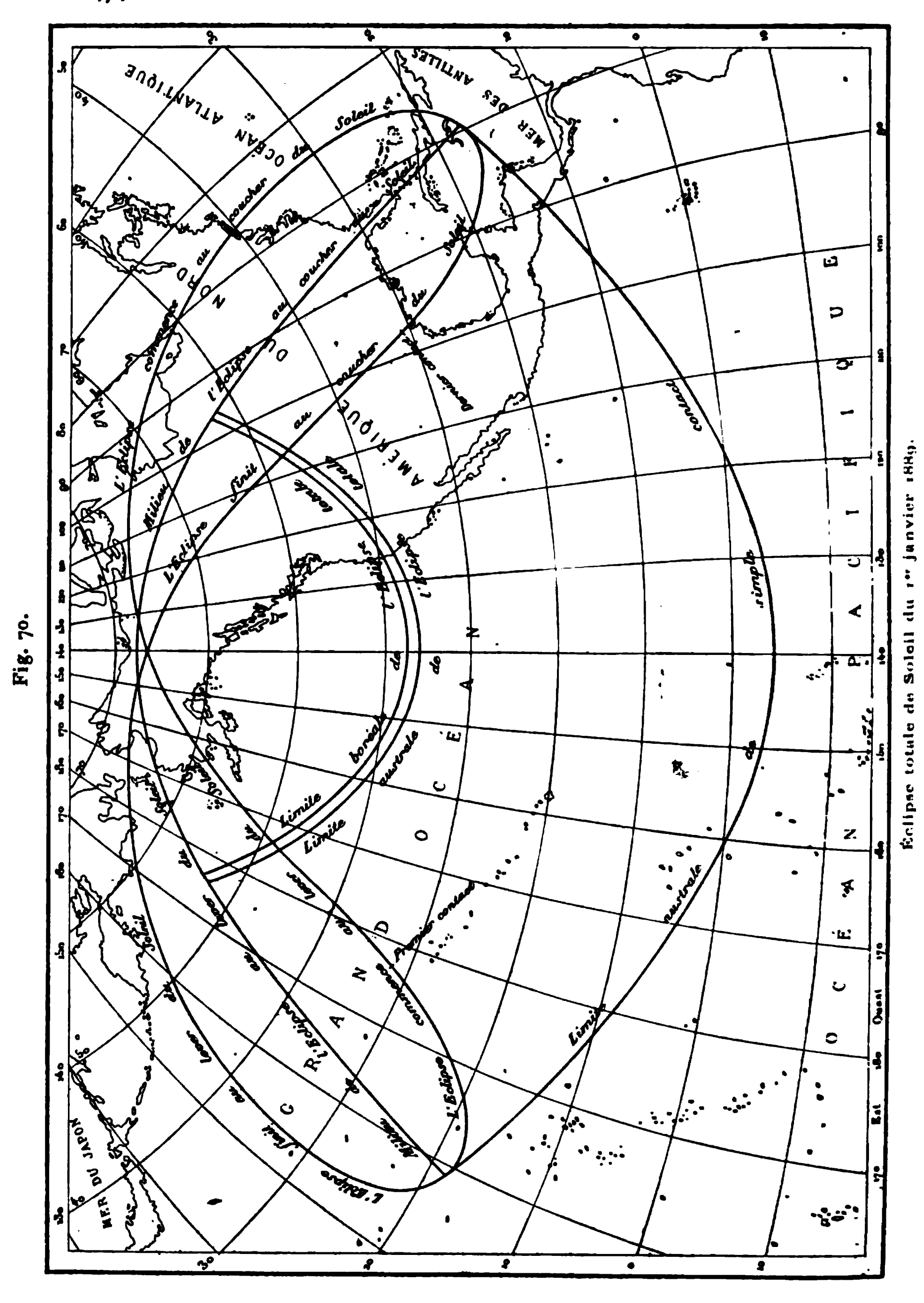
$$\cos(\theta - N') = 0,$$

Fig. 69.



Éclipse totale des 21-22 décembre 1889.

Fig. 70.



Éclipse totale de Soleil du 1er janvier 1889.

de sorte que $\theta - N'$ diffère peu de 90° ou de 270°. On pose

$$\theta - N' = \psi$$

et, $\sin\psi$ différant peu de 1, on multiplie par $\sin\psi$ la valeur de du. Si en même temps on néglige x, $\Delta\alpha'$ et $\frac{dx}{dt}$, on a

$$(12) \qquad \tang\psi = \frac{\frac{n}{x} - \cos\varphi_1(\sin N'\cos t + \cos N'\sin t\sin\delta')}{\cos\varphi_1[\cos N'\cos t - (\sin N'\sin\delta' \mp \tang f\cos\delta')\sin t]},$$

en prenant le signe supérieur si ψ est voisin de 90°, le signe inférieur s'il est voisin de 270°. L'angle ψ est l'angle que fait avec l'orbite de la Lune le grand cercle qui passe par le centre de la Lune et le point $\lambda'\beta'$, ou, à peu près, le centre du Soleil. Cette considération montre pourquoi, au maximum de l'éclipse, ψ diffère peu de $\pm 90°$.

Le calcul des points des courbes limites se fait comme il suit : Des combinaisons faciles des deux dernières équations (6^{**}) donnent $u\sin\psi$ et $u\cos\psi$. Dans la valeur de $u\sin\psi$ on remplace u par la valeur que donne la première équation (6^{**}). On a alors une équation linéaire en $\sin\varphi_1$ et $\cos\varphi_1$ d'où l'on tire φ_1 sous la forme

$$(13) \qquad \sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u'\sin\psi}{a},$$

a et A désignant des nombres connus.

Pour une série de valeurs de t, cette équation, où l'on remplace d'abord ψ par ± 1, donne φ_1, puis l'équation (12) donne ψ, après quoi l'équation (13) donne plus exactement φ_1 ; ensuite la première équation (6^{**}) donne u et la valeur de $u\cos\psi$ donne λ.

Il y a lieu de remarquer que les valeurs de ψ, situées dans la première demi-circonférence, donnent, si u est positif, la courbe limite nord, les autres la courbe sud ; l'inverse a lieu si u est négatif.

283. Courbes limites nord et sud pour les diverses phases. — Ces lignes s'obtiennent comme il vient d'être expliqué pour les courbes limites nord et sud de l'éclipse générale. Il suffit d'adopter pour f les valeurs qui correspondent aux phases considérées. Si l'on veut une phase de i doigts, c'est-à-dire de i douzièmes, on

prendra

$$\sin f = \frac{s + \left(1 - \frac{i}{6}\right) s'}{\rho'}.$$

Si l'on a calculé les valeurs f_1 et f_2 relatives aux contacts extérieur et intérieur, on a

$$\sin f = \sin f_1 - \frac{\sin f_1 - \sin f_2}{12} i,$$

et, $\text{séc} f$ différant très peu de l'unité, on a aussi

$$u' = u'_1 - \frac{u'_1 - u'_2}{12} i.$$

Pour la ligne d'éclipse centrale, il suffit de remplacer le cône par la ligne des centres du Soleil et de la Lune, et par suite de remplacer f et u' par zéro. Les équations se simplifient considérablement; nous ne nous y arrêterons pas.

284. Courbes limites est et ouest. — L'angle de position θ résulte de la génératrice du cône de pénombre sur laquelle se trouve l'observateur O′. Il en est de même de l'angle de position ψ. Pour un point d'une des courbes limites nord ou sud cet angle ψ est voisin de $\pm 90°$. Pour les points intermédiaires il peut avoir des valeurs quelconques. Si l'on considère les points de la Terre qui correspondent à une même valeur de ψ, la génératrice qui passe en l'un de ces points perce la surface de la Terre en un autre point situé au-dessous de l'horizon du premier et qui, par suite, au même instant, ne voit pas l'éclipse. Le contact est vu du premier de ces points, et, virtuellement, du second à une date τ. Cette date τ est nécessairement comprise entre deux limites en dehors desquelles la génératrice considérée ne coupe pas la Terre. A ces limites la génératrice est tangente à la surface.

Si dans les équations (6**) on regarde θ comme une constante, elles déterminent u, λ, φ_1 en fonction de τ, et pour chaque valeur de τ deux systèmes de valeurs de u, λ, φ_1 qui se confondent à l'une des limites de τ et deviennent imaginaires au delà. A l'une de ces limites τ est maximum ou minimum et sa différentielle est nulle. Comme on a

$$\tau = t - \lambda,$$

on a alors

$$dt = d\lambda.$$

Il s'ensuit que, pour avoir les courbes limites *est* ou *ouest*, il suffit de différentier les équations (6**) en y faisant varier u, λ, φ, t et de remplacer dt par $d\lambda$. L'élimination des différentielles donne une équation finie qui, jointe aux équations (6**), définit les courbes cherchées. Dans le calcul de ces courbes il n'est pas permis de négliger l'influence de la réfraction, ni de sa variation.

Les figures des pages 473 et 474 donnent, d'après la *Connaissance des Temps*, les courbes limites des deux éclipses totales de l'année 1889 (*fig.* 69 et 70). La seconde offre un exemple du cas où la courbe nord a disparu.

285. Calcul de l'éclipse en un lieu donné. — On néglige ordinairement la réfraction. On part des équations (6**) dont on combine les deux dernières de façon à en déduire $u \sin\psi$ et $u \cos\psi$. Ces équations, pour une valeur donnée de f, déterminent u, ψ et t. Par rapport à cette dernière inconnue elles sont transcendantes : Hansen lève la difficulté comme il suit : Désignant par t_m une valeur approchée de t, il pose

$$\sin t = \sin t_m + k\frac{t-t_m}{15}\cos\frac{t+t_m}{2},$$

$$\cos t = \cos t_m - k\frac{t-t_m}{15}\sin\frac{t+t_m}{2},$$

où

$$k = 30\frac{\sin\dfrac{t-t_m}{2}}{t-t_m};$$

k varie très peu dans les limites de l'incertitude de $t - t_m$ et sa valeur peut être tirée d'une Table. Au moyen de ces formules on fait disparaître t, dans les formules (6**), des signes sinus et cosinus, après quoi on procède à la résolution des équations par approximations successives, donnant d'abord à t la valeur t_m.

286. Passages de Vénus, occultations d'étoiles, etc. — Nous nous bornerons à signaler ici l'emploi qui a été fait des passages de Vénus, qui sont en fait des éclipses annulaires du Soleil par Vénus pour la mesure de la parallaxe du Soleil, ou de la distance du

Soleil à la Terre, renvoyant pour le détail des calculs aux Ouvrages spéciaux. La théorie générale permet, si l'on regarde la parallaxe du Soleil comme connue, de déterminer, pour un lieu donné de la Terre, les instants des diverses phases du phénomène; inversement, les observations une fois faites, pourvu que les positions géographiques des lieux d'observation soient bien connues, on peut améliorer la connaissance de la parallaxe du Soleil. Nous nous bornerons à signaler les résultats obtenus : en France, M. Puiseux, discutant les observations de contact faites pendant le passage de 1874, a trouvé 8″,91. En Amérique, les observations de contact de 1874 et 1882 ont donné, d'après M. Newcomb, 8″,89; les mesures des distances de la planète au centre du disque du Soleil, 8″,86. Nous ajouterons, pour grouper les principaux résultats, que Le Verrier, en 1872, en discutant les variations séculaires des éléments des orbites de Vénus et de Mars a trouvé 8″,86; en 1882 M. Tisserand, par les inégalités de Vénus, 8″,85. D'après les déterminations de la constante de l'aberration, Newcomb donne 8″,80 et d'après des observations de petites planètes 8″,81.

De même nous ne développerons pas les calculs relatifs à la détermination des longitudes par les éclipses. Il apparaît immédiatement qu'une observation d'éclipse étant faite en un lieu donné, les équations (6**), si l'on regarde comme connue la latitude du lieu, permettent de déterminer u, θ et la longitude λ.

En ce qui concerne les occultations d'étoiles par la Lune, nous nous bornerons à remarquer que leur théorie se déduit de celle des éclipses en supposant $f = 0$ et $u' = s$. Bien que les formules se simplifient considérablement, nous pensons que le détail des calculs pour cette question, comme pour les questions précédentes, sortirait du cadre de cet Ouvrage, les idées générales de la théorie des éclipses intéressant seules les étudiants.

CHAPITRE XXI.

ASTRONOMIE MODERNE.

DISTANCES, MOUVEMENTS, ÉCLAT DES ÉTOILES. — SPECTROSCOPIE. PHOTOGRAPHIE.

287. Distances des étoiles au Soleil; parallaxes annuelles. — Les distances des étoiles à la Terre sont tellement grandes, par rapport au diamètre du globe terrestre, que toute parallaxe stellaire, entendue dans le sens ordinaire du mot *parallaxe*, est absolument insensible. Le mouvement de la Terre autour du Soleil permet, par des observations faites à environ six mois d'intervalle, de déterminer les directions des droites D, D_1 qui joignent une étoile à deux points voisins des extrémités d'un diamètre de l'orbite terrestre. Si ce diamètre est perpendiculaire à la direction qui joint l'étoile au Soleil, la moitié de l'angle des droites D, D_1 reçoit le nom de *parallaxe annuelle* de l'étoile. Cette parallaxe atteint une seconde d'arc, si la distance de l'étoile à la Terre (ou au Soleil) vaut 206265 fois la distance de la Terre au Soleil.

Les essais de détermination de parallaxes annuelles par des observations méridiennes, au XVIIIe siècle et au commencement du XIXe, ont été généralement infructueux. Cependant, il n'en a pas été de même à des dates plus rapprochées et notamment la parallaxe de α Centaure, la plus forte parallaxe connue, a été déduite à diverses reprises, et tout d'abord de 1831 à 1840 par Henderson, au Cap, d'observations méridiennes de sa déclinaison. Il est plus aisé de comparer, ainsi que l'avait proposé Galilée, la position de l'étoile à celle d'une étoile très voisine physiquement indépendante de la première. On voit sans peine que si la seconde étoile n'a pas de parallaxe sensible, la position relative des deux étoiles, à six mois de distance, pourra être affectée d'un changement correspondant au double de la parallaxe annuelle. La précision que

comportent aujourd'hui les mesures micrométriques permet d'obtenir, avec certitude, des parallaxes ne dépassant pas un ou deux dixièmes de seconde d'arc.

C'est ainsi que Bessel a déterminé, à l'héliomètre de Königsberg, par la comparaison à deux étoiles voisines, la parallaxe de la soixante et unième étoile de la constellation du Cygne ($0'',35$), étoile sur laquelle l'attention était naturellement attirée par son très fort mouvement propre de $5''$; celui de α Centaure est $3'',6$. En même temps Struve (1836) déterminait par le même procédé la parallaxe de Véga ($0'',26$).

Pritchard, à Oxford, a déterminé des parallaxes d'étoiles en comparant, sur des clichés photographiques, les positions de ces étoiles à celles des étoiles voisines; la haute précision que comportent les mesures faites sur les clichés à courte pose, la possibilité d'obtenir pour une même étoile un grand nombre de clichés, rendent la méthode photographique particulièrement avantageuse.

Ajoutons que récemment on a réussi à mesurer des parallaxes faibles par des déterminations méridiennes, faites au chronographe, de différences d'ascensions droites d'étoiles peu éloignées l'une de l'autre, en prenant d'ailleurs des précautions particulières pour diminuer l'effet des erreurs instrumentales et surveillant notamment la marche de la pendule.

288. Étoiles doubles, mouvements relatifs, observations. — L'étude systématique des systèmes d'étoiles doubles a été inaugurée par W. Herschell en 1782 et poursuivie constamment par lui. En 1802, il prouva que cinquante de ces couples étaient réellement des couples physiques dont les composantes tournent l'une autour de l'autre, et fixa un bon nombre de périodes.

Depuis cette époque, les étoiles doubles ont été étudiées par de nombreux observateurs parmi lesquels W. Struve, à Dorpat et à Poulkowa, Otto Struve à Poulkowa, John Herschell en Angleterre et au Cap de Bonne-Espérance, Dembowski à Florence, Burnham en Amérique, sans parler des beaux travaux d'un grand nombre d'autres contemporains.

Le catalogue général de John Herschel renferme plus de dix mille couples.

recherches n'ont que très peu modifié le résultat obtenu par Herschel.

Les coordonnées les plus probables rapportées à l'équinoxe de 1800,0 sont, d'après L. Struve,

$$\alpha = 266°,7, \qquad \delta = +31°.$$

Celles de λ Hercule

$$\alpha = 260° 40', \qquad \delta = +26° 17'.$$

L'étude approfondie des mouvements propres de Sirius et de Procyon a conduit Bessel à conclure à leur variabilité et à annoncer, en 1844, que ces astres ont des compagnons obscurs tournant autour d'eux dans une période de cinquante ans. Le 31 janvier 1862, Clarke, essayant un objectif de dix-huit pouces d'ouverture, aperçut à côté de Sirius, à 9″ du centre de son image et à la place résultant de la théorie de Bessel, un astre extrêmement faible, fréquemment observé depuis, dont la période est de $49^{\text{ans}},4$. L'éclat de ce satellite n'est qu'un dix-millième de l'éclat de Sirius, mais sa masse est la moitié de celle de l'étoile principale.

On n'a pas aperçu le satellite de Procyon, mais il n'y a aucun doute sur son existence avec une forte masse et une période d'une quarantaine d'années.

291. Masses des étoiles doubles. — Si l'on connaît la parallaxe p d'un couple d'étoiles, le demi grand axe a (en secondes) de l'orbite relative, la durée T (en années) de la révolution, on a, par la loi de Newton,

$$f(m+m') = \frac{4\pi^2\left(\dfrac{a}{p}\right)^3}{T^2},$$

$$fM = \frac{4\pi^2 1^3}{1^2},$$

d'où

$$\frac{m+m'}{M} = \left(\frac{a}{p}\right)^3 T^2;$$

on peut donc obtenir le rapport de la somme $m+m'$ des masses des deux composantes à la masse M du Soleil.

Le centre de gravité des deux composantes a un mouvement

instant, en un même lieu, change avec la hauteur et même avec l'azimut; la diversité de l'éclat du fond du ciel modifiée par l'heure, par la phase de la Lune, par le voisinage d'étoiles brillantes ou de belles planètes, par la lumière zodiacale, par la voie lactée; l'inégale sensibilité de l'œil aux divers points de la rétine, etc.

La polaire est à peu près le type des étoiles de seconde grandeur et elle constitue un excellent repère, sa position dans le ciel étant sensiblement invariable.

L'échelle des grandeurs, depuis l'invention des télescopes, a été prolongée successivement par d'habiles observateurs qui, dans notre siècle, se sont accordés mieux que l'on ne pourrait le croire *a priori*. Il est à signaler cependant que la plupart des étoiles de sixième grandeur du catalogue de Lalande sont notées à la septième par Piazzi. Les mesures photométriques faites depuis un petit nombre d'années par des méthodes très diverses ont donné des résultats peu différents de ceux qu'avait obtenus Argelander à Bonn par l'estimation directe.

On pourrait aujourd'hui adopter la définition suivante :

La différence ΔM *des grandeurs de deux étoiles d'éclats* A *et* B *est*

$$\Delta M = \frac{1}{0,4} \log \frac{A}{B}.$$

Cette règle, proposée par Pogson, indique que les grandeurs croissent en progression arithmétique quand les éclats croissent en progression géométrique. La différence d'une grandeur correspond à un rapport d'éclats égal à $10^{0,4}$ ou sensiblement 2,5.

293. **Mesures photométriques.** — Les premiers essais de mesures photométriques remontent à la fin du siècle dernier. De Humbolt compara les principales étoiles du ciel austral en amenant leurs images dans une lunette à avoir le même éclat, au moyen de diaphragmes de diverses grandeurs placés devant l'objectif. Vidal, aux environs de Toulouse, observait à travers des ouvertures inégales moindres que le diamètre de la pupille.

Arago, ayant admis la loi de Malus, d'après laquelle l'intensité d'un faisceau de lumière polarisée se partage entre les deux fais-

l'Observatoire de Paris a montré autour de Mérope une magnifique nébuleuse et une autre, autour de Maïa, que personne n'avait aperçue. La nébuleuse annulaire de la Lyre a donné un autre exemple bien frappant : les clichés photographiques de cette nébuleuse révèlent en son centre même, avec des poses de dix minutes seulement, une magnifique étoile, invisible à l'œil dans les plus puissants instruments.

Cependant la définition des grandeurs photographiques n'a pas encore été donnée d'une façon pleinement satisfaisante. On a songé à la fonder soit sur les rapports des temps de pose nécessaires pour obtenir les diverses étoiles, soit sur le diamètre des images obtenues dans un même temps sur un même cliché.

A ce dernier point de vue, Pritchard a donné la formule

$$D - D' = c(\log M' - \log M),$$

D et D′ étant les diamètres des images, M et M′ les grandeurs.

L'expérience n'a, jusqu'à présent, justifié ni l'une ni l'autre de ces conceptions. Nous nous bornerons à signaler encore les deux résultats suivants :

En moyenne, pour gagner sur un cliché une grandeur visuelle, il faut multiplier le temps de pose par un nombre plus grand que le rapport 2,5 des éclats des étoiles de deux grandeurs consécutives.

A un autre point de vue, l'écart entre les grandeurs visuelles et les grandeurs photographiques a paru dépendre de la position de la région photographiée par rapport à la *Voie lactée*.

295. Travaux d'Argelander. — Argelander, dans un chaleureux Mémoire publié en 1844 (*Aufforderung an Freunde der Astronomie*) a appelé l'attention sur diverses sortes d'observations susceptibles d'être faites sans aucun instrument, en particulier sur la détermination des grandeurs des étoiles visibles à l'œil nu et sur celle des étoiles variables. Il signale les motifs qui obligent à ne comparer l'éclat d'une étoile qu'à celui d'étoiles assez voisines d'elle, ne s'en écartant pas de plus de 10° à 12°, tout en évitant le voisinage immédiat, cas dans lequel l'éclat d'une étoile influe sur l'estime de l'éclat de l'autre. Il expose le mode d'observation qu'il a adopté. Et tout d'abord on ne doit comparer que des étoiles

ayant presque le même éclat. On les regardera successivement, alternativement, autant que possible dans une même position de la tête, mais pas les deux à la fois, les deux yeux d'un même observateur et les diverses parties de la rétine d'un même œil n'ayant pas la même sensibilité. « Je fixe d'abord l'une des étoiles et l'amène, par le mouvement de l'œil sur cette partie de la rétine où je la vois le plus clairement possible; puis je me tourne rapidement vers l'autre étoile et l'observe de même, et je l'observe de la même manière jusqu'à ce que j'aie fermement établi mon jugement sur leur différence de clarté.... On peut aussi prendre la moyenne des différences obtenues en passant de la première étoile à la deuxième, puis de la deuxième à la première, différences qui, d'habitude, diffèrent de un *degré* ou même de deux *degrés*. » Argelander définit en ces termes le *degré* qui est pour lui l'unité de différence d'éclat :

« Que je voie deux étoiles également brillantes, ou que j'hésite à savoir laquelle brille le plus, je les appelle également *brillantes* et je les représente en inscrivant leurs noms l'un à la suite de l'autre, dans un ordre arbitraire *ab* ou *ba*.

» Si, au premier coup d'œil, elles paraissent également brillantes, mais que je reconnaisse par un examen attentif et par un passage réitéré de *a* à *b* ou de *b* à *a* que toujours, à de très rares exceptions, *a* a brillé plus que *b*, je dis que *a* est de un *degré* plus brillante que *b* et j'écris *a* 1 *b*. L'étoile *a* apparaît-elle constamment et sans aucun doute plus brillante que *b*, la différence est évaluée à deux *degrés* et j'écris *a* 2 *b*. Une différence qui tombe sous le sens au premier coup d'œil vaut trois *degrés* et j'écris *a* 3 *b*. Enfin *a* 4 *b* représente une différence encore plus manifeste à l'avantage de *a*. » Argelander conseille de ne pas aller plus loin; en revanche, il emploie des demi-degrés et une notation telle que *a* 2,5 *b*. Il propose Procyon comme type de comparaison pour les étoiles de première grandeur et, lui attribuant 55 degrés, trouve que les plus faibles étoiles de sixième grandeur seront représentées par 0 degré et les étoiles invisibles à l'œil nu par des nombres négatifs. Le *degré* d'Argelander est à peu près le dixième de la différence d'éclat qui existe, en moyenne, entre deux *grandeurs consécutives*.

Il est bon d'avoir choisi des couples d'étoiles correspondant

normalement à des différences d'un, deux, trois ou quatre *degrés* et de les observer au début de chaque soirée pour en déduire de façon précise l'impression que ces divers écarts font sur l'œil dans cette soirée, impression qui dépend des conditions atmosphériques.

Argelander, aidé par Schönfeld et Krueger, a dressé à l'observatoire de Bonn une liste de positions approchées de 314925 étoiles comprises entre 0° et 92° de distance polaire nord. Il a noté en même temps, à la simple estime, les grandeurs de ces étoiles, au dixième de grandeur.

Littrow a fait le dénombrement des étoiles des diverses grandeurs contenues dans la *Bonnerdurchmusterung* et a trouvé les résultats suivants :

1re	grandeur..............	10
2e	»	37
3e	»	130
4e	»	312
5e	»	1001
6e	»	4386
7e	»	13823
8e	»	58095
9e-9e,5	»	237131
		314925

Les grandeurs de la *Bonnerdurchmusterung* ont été évaluées à la simple estime; Argelander a fait, d'autre part, pendant plus de trente ans, des observations d'éclat d'étoiles variables, dans lesquelles il comparait chaque étoile variable à un ensemble d'étoiles de grandeurs fixes choisies dans le voisinage, à tous les degrés de l'échelle parcourue par la variable à étudier. Argelander, comme il a été dit, notait les différences par degrés valant à peu près $0^{gr},1$. La *Bonnerdurchmusterung* a été publiée de 1859 à 1862; les observations d'étoiles variables l'ont été dans le t. VII des *Bonner-beobachtungen* en 1869.

296. Photomètre de Zöllner. — Cet instrument, tel qu'il a été conçu par Zöllner, est constitué comme il suit :

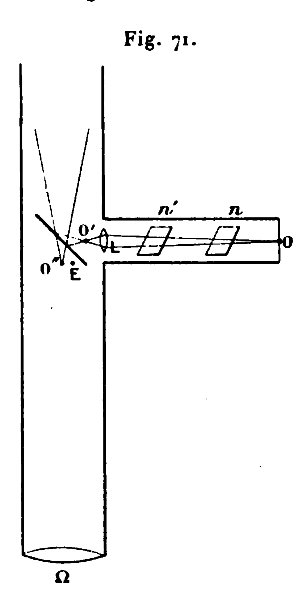
Dans le tube d'une lunette astronomique est placée une glace

sans tain, à faces parallèles, inclinée de 45° sur l'axe de la lunette.

En face cette glace pointe un tube latéral perpendiculaire à celui de la lunette et tel que la glace sans tain soit perpendiculaire au plan des axes des deux tubes.

En face ce tube se trouve placé un bec de gaz dont les rayons après avoir traversé une très petite ouverture O, forment par réflexion sur la glace sans tain une étoile artificielle d'intensité constante. Pour rapprocher le plus possible de l'oculaire de la lunette l'image de cette étoile artificielle, Zöllner a placé, à la rencontre des deux tubes, une lentille convergente L qui donne de l'ouverture O une image réelle O′ formant par réflexion sur la glace une image virtuelle O″; le réglage est tel que l'image O″ se trouve dans le plan focal de l'objectif Ω de la lunette, plan dans lequel se trouve, à côté de O″, l'image E de l'étoile à étudier (*fig.* 71).

Fig. 71.



La comparaison des intensités des images O″ et E se fait comme il suit : on rend l'éclat de l'image O″ égal à celui de E en faisant traverser au faisceau lumineux OL un système de deux nicols *n*, *n*′ placés dans le tube latéral. Le premier transforme le faisceau primitif en un faisceau polarisé; le second nicol *n*′ peut tourner

autour de l'axe du tube latéral; cette rotation permet de modifier l'intensité du faisceau; l'angle dont on a tourné est lu sur un cercle centré sur l'axe du tube latéral; l'index est au zéro quand les sections principales des deux nicols sont perpendiculaires; dans cette position, l'intensité de l'image O″ est nulle. Dans d'autres positions, l'intensité de l'image O″ est proportionnelle au carré du sinus de la lecture.

Zöllner avait placé en outre dans le tube latéral un troisième nicol et une lame de quartz destinés à la mesure des couleurs; nous nous bornerons à renvoyer, pour de plus amples détails, à son Mémoire imprimé à Berlin en 1861 (*Grandzüge einer allgemeinen Photometrie des Himmels*).

M. Ceraski, dans un Mémoire (*Le photomètre astronomique et ses applications*, Moscou, 1887), imprimé en langue russe, a apporté de notables améliorations au photomètre de Zöllner.

Il résulte des discussions auxquelles ont donné lieu les travaux de cet astronome que le photomètre ne donne pas plus de précision que la vue simple pour la comparaison d'astres de grandeurs voisines; il offre l'avantage de permettre de comparer avec la même exactitude des étoiles de grandeurs beaucoup plus différentes. L'erreur moyenne d'une comparaison est voisine de $0^{\text{grandeur}},1$.

297. Photomètre méridien d'Harvard College. — L'instrument est formé d'une double lunette horizontale fixe dirigée vers l'ouest; les deux objectifs ont 4^{cm} d'ouverture et 80^{cm} de distance focale. Devant chaque objectif se trouve un prisme à réflexion totale.

L'un de ces prismes, placé au sud, peut tourner autour de l'axe de l'objectif correspondant et envoie dans la lunette les images des étoiles au moment où elles passent au méridien; un cercle entraîné dans la rotation a pour lectures les déclinaisons des étoiles. L'autre prisme envoie dans la lunette l'image de la polaire: ce prisme, en raison du mouvement de la polaire, peut être légèrement déplacé dans tous les sens au moyen de manettes. Un prisme à double image est placé près du foyer commun des deux objectifs; on l'oriente de telle façon que, après réfraction, le faisceau ordinaire venant de la polaire coïncide avec le faisceau extraordinaire venu de l'autre étoile.

Un nicol analyseur, monté sur un cercle de position, sépare

ensuite les deux faisceaux et permet de rendre les images égales. Soient v_0 la lecture pour laquelle l'image de la polaire disparaît, v la lecture qui correspond à l'égalité des images, A l'éclat de l'étoile, B l'éclat de la polaire. A la lecture v, l'éclat de l'image de l'étoile est

$$A \cos^2(v - v_0);$$

l'éclat de l'image de la polaire est

$$B \sin^2(v - v_0).$$

En égalant ces deux valeurs, on obtient

$$\text{tang}^2(v - v_0) = \frac{A}{B}.$$

La différence de grandeur M des deux étoiles est

$$\begin{aligned} M &= 2,5 \log \frac{A}{B} \\ &= 2,5 \log \text{tang}^2(v - v_0) \\ &= 5 \log \text{tang}(v - v_0). \end{aligned}$$

298. Photomètre de Pritchard. — L'instrument se compose essentiellement d'une lame de verre teinté, à teinte neutre, en forme de prisme triangulaire droit dont la base est un triangle ayant $16^{cm},5$ et $0^{cm},35$ de côtés; le prisme a $2^{cm},5$ de hauteur. Un second prisme de mêmes dimensions, en verre blanc, est accolé au premier par les faces hypoténuses des deux verres ayant le même indice; l'ensemble ne produit aucune dispersion. Le double prisme est mobile dans une coulisse qui s'adapte devant l'oculaire de la lunette astronomique, entre l'oculaire et l'œil de l'observateur. La position de l'œil de l'observateur est déterminée par un œilleton placé en avant du double prisme et centré sur l'oculaire. La monture du double prisme porte, d'une part, une échelle tracée sur une lame de laiton en biseau et, d'autre part, une crémaillère mise en mouvement par un pignon adapté à la partie fixe de la monture. Cette partie fixe porte aussi un index qui sert à lire sur l'échelle divisée la position qu'il faut donner au prisme pour éteindre l'image de l'astre à observer. Les différences des grandeurs des étoiles, par rapport à une étoile choisie comme repère, sont, tout étant égal d'ailleurs, proportionnelles aux différences des

lectures entre le point d'extinction des étoiles à observer et le point d'extinction de l'étoile repère.

Il est tout indiqué de prendre pour repère l'étoile polaire.

M. Pritchard a trouvé que l'erreur moyenne d'une détermination isolée est $0^{grand.},3$, de sorte qu'en répétant la même observation un nombre de fois suffisant, on peut obtenir une moyenne exacte à un dixième de grandeur près.

299. **Étoiles variables.** — Le 13 août 1596, David Fabricius, astronome amateur, trouva à l'angle de la Baleine une étoile qui disparut en octobre; cette étoile fut, en 1603, notée o par Bayer et de quatrième grandeur; en Allemagne, Holwarda en observa les variations de 1638 à 1639; Hevelius la nomma *Mira Ceti,* et Boulliaud, en 1667, lui fixa une période de 334 jours. En 1600, Janson nota une étoile variable dans le Cygne et, en 1669, Montanari signala la variation d'Algol dans Persée; en 1782, avant les travaux d'Herschel, on connaissait une demi-douzaine d'étoiles variables.

Pendant le séjour de J. Herschel au Cap (à Feldhausen), η Argus, vue par Halley en 1677 de grandeur 4, par Lacaille de grandeur 2, en 1827 par Burchell de grandeur 1, fut vue par Herschel, le 26 décembre 1837, aussi brillante que Rigel et le 2 janvier que α Centaure, puis elle déclina. En 1843, Mac Lear vit un second maximum où l'éclat de cette étoile approcha de celui de Sirius; la variation offre probablement un cycle de soixante-dix ans.

Herschel trouva α Centaure 27408 fois moins brillant que la Lune; Vollaston trouva le Soleil 1801071 fois plus brillant que la Lune (Zöllner, 618000 fois). Vollaston en conclut que Véga brille 40 fois plus que le Soleil, α Centaure 4 fois, Arcturus 200 fois.

Depuis cette époque, l'étude des étoiles variables a reçu un développement considérable; l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1896 contient les positions de 245 étoiles variables dont la période de variation est connue, 184 dont la période est irrégulière ou inconnue, 200 supposées variables.

Le second Catalogue de Chandler, publié en 1893 au n° 300 de *Gould Astronomical Journal,* donne les éléments de variation de 260 étoiles.

L'hypothèse de Goodricke est confirmée par l'analyse spectrale, M. Vogel ayant prouvé que la vitesse radiale d'Algol éprouve des variations dont la période est la même que celle de son éclat.

D'autre part, M. Chandler a trouvé que l'inégalité dans la période d'Algol est périodique et que l'époque du minimum peut être représentée par

$$t = t_0 + iT + 173^m \sin(202°,5 + 2°,55\tau),$$

où

$$t_0 = 1888 \text{ janvier } 3 \text{ à } 7^h 30^m 50^s \text{ (temps moyen de Paris)},$$
$$T = 2^j 20^h 48^m 55^s,425,$$

τ désignant l'intervalle $t - t_0$ exprimé en années. M. Tisserand a montré récemment que cette inégalité peut s'expliquer par l'action mutuelle de l'étoile principale et de son satellite obscur en supposant que l'étoile principale ait un aplatissement égal à $\frac{3}{288}$ et l'orbite du satellite une excentricité égale à 0,132.

M. Tisserand pense que des inégalités périodiques analogues obtenues par M. Chandler pour υ Ophiuchus et υ Céphée s'expliqueraient de la même manière.

Il y a lieu de citer encore la conclusion à laquelle arrive M. Dunér pour γ Cygne, dont il représente bien les minima alternatifs par deux formules distinctes

Minima pairs, 1886 décembre	9 à $11^h.35^m.5^s$	$+ 2^j.23^h.54^m.52^s,59\,i$
» imp. »	10 à 21.46.15	$+ 2.23.54.33,93\,i$

D'après M. Dunér, l'orbite du satellite est elliptique et la ligne des absides ne coïncide pas avec le rayon visuel; l'étoile et le satellite ont même grandeur et même éclat; l'intervalle entre deux minima successifs pendant lesquels a lieu le passage au périastre est plus court que l'intervalle suivant pendant lequel a lieu le passage à l'apoastre.

Plus une variable est rouge, plus la période est longue; il paraît y avoir des différences bien tranchées entre les variables à période moindre que vingt jours et les variables à période longue.

300. **Spectroscopie.** — Nous avons indiqué, au n° 72, les diverses sortes de spectres que donnent les étoiles, les nébuleuses,

les noyaux des comètes, les queues des comètes, les planètes, etc. L'étude de ces spectres a fourni des renseignements sur la nature des substances qui entrent dans la constitution des corps célestes. Une étude un peu approfondie de la question sortirait entièrement du cadre de cet Ouvrage; mais il est nécessaire de rappeler les principes fondamentaux. L'emploi du spectroscope, comme moyen d'investigation, a fait connaître la nature de la matière des astres et a donné un moyen inattendu de déterminer les mouvements célestes dans un cas où les méthodes géométriques de l'Astronomie sont entièrement inapplicables.

C'est Vollaston qui, le premier, reconnut des raies sombres dans le spectre solaire. Les physiciens ne prirent pas garde à cette découverte et Frauenhofer ne la connaissait sans doute pas, quand il créa le spectroscope en visant, au moyen d'une lunette, à travers un prisme, l'image virtuelle d'une fente éclairée par le Soleil. Il reconnut plus de 600 raies distinctes, mesura la position de 320 d'entre elles et désigna les principales par les lettres A, B, ..., H. Depuis, le nombre des raies mesurées a augmenté avec la puissance dispersive des appareils employés; le spectre a été étendu, en deçà du rouge, par des mesures calorimétriques et par le bolomètre, au delà du violet par la photographie. Stokes ayant montré que les rayons très réfrangibles sont rapidement absorbés par la plupart des milieux transparents, mais traversent aisément le quartz, le spath d'Islande, le spath fluor, l'étude de la région ultra-violette a été faite par M. Mascart, puis par M. Cornu au moyen d'un spectroscope formé d'un prisme de spath et de lentilles de quartz.

Une flamme ordinaire donne un spectre continu dans lequel on voit une raie jaune beaucoup plus brillante que le fond général, à la place où se trouve la raie D du spectre solaire. En réalité, un gaz incandescent donne un spectre formé de lignes brillantes; le spectre continu des flammes brillantes est dû aux substances solides en suspension; la raie jaune brillante au sodium qui se trouve partout. Quant au spectre solaire, nous dirons qu'il est continu, mais sillonné de lignes sombres dont nous indiquerons bientôt l'origine.

C'est en 1859 que l'analyse spectrale fut vraiment fondée par Kirchoff et Bunsen. Elle repose sur les principes suivants :

A l'état d'incandescence, les corps solides ou liquides émettent une lumière dont le spectre est continu; les gaz et les vapeurs émettent une lumière dont le spectre est formé de lignes brillantes séparées; les longueurs d'onde de ces lignes brillantes sont caractéristiques des diverses substances chimiques.

Il résulte de ces lois qu'un spectre formé de lignes brillantes provient de gaz ou de vapeurs à l'état d'incandescence; qu'un spectre continu (nous faisons abstraction, pour un instant, des raies sombres), provient de particules solides ou liquides : en particulier, les spectres du Soleil étant continus (toujours abstraction faite des raies sombres), cet astre, s'il n'est pas à l'état liquide, est formé de vapeurs contenant des particules solides ou liquides en suspension.

Les raies sombres sont le résultat de l'absorption de certains rayons solaires par des gaz refroidis, absorption régie par les lois suivantes :

Tous les gaz non incandescents absorbent les rayons qu'ils peuvent émettre en devenant incandescents. Pour toute vibration (définie par sa longueur d'onde) le pouvoir émissif d'un corps est égal au pouvoir absorbant.

Les raies obscures du spectre solaire occupent, dans le spectre, la même position que les raies brillantes de certaines vapeurs métalliques ou de certains gaz incandescents parmi lesquels on doit citer d'abord le fer dont le spectre comprend un grand nombre de raies, l'hydrogène, le sodium, le calcium, etc. La constatation de ce fait démontre l'existence, au-dessus de la masse incandescente du Soleil, d'une atmosphère relativement obscure qui absorbe les rayons dont l'indice correspond aux raies du spectre.

Cependant, Brewster reconnut, en 1833, que plusieurs groupes de raies sombres, à peine visibles quand le Soleil est près du zénith, augmentent d'intensité près de l'horizon. M. Janssen a montré que ces raies sont dues à l'absorption des rayons correspondants par l'atmosphère, principalement par la vapeur d'eau qui s'y trouve, et les a nommées *raies telluriques*. Il a constaté, entre autres résultats, que les raies dues à la vapeur d'eau di-

minuent d'intensité à mesure que l'on s'élève dans l'atmosphère, et pensent que les raies de l'oxygène n'ont leur origine que dans l'absorption par l'atmosphère terrestre.

Un des progrès les plus notables dans l'application de la spectroscopie à l'étude des astres fut réalisé en 1868, pendant l'observation d'une éclipse de Soleil. On étudia les protubérances rouges que l'on voit pendant les éclipses et qui peuvent s'étendre à une distance du Soleil égale au tiers du rayon. On reconnut, dans leurs spectres, plusieurs raies brillantes, notamment les raies C et F de l'hydrogène et une raie voisine de la raie D.

Au même moment, M. Janssen eut l'idée que ces protubérances pouvaient être observées en dehors des éclipses. Il les retrouva le lendemain en faisant tomber l'image du Soleil sur la fente d'un spectroscope placée perpendiculairement au bord du disque, de façon à éliminer l'image directe de ce disque. Les raies des protubérances apparurent brillantes sur le spectre plus pâle que donne la lumière diffusée par les régions du ciel voisines du Soleil. L'éclat de ce dernier spectre est, en effet, d'autant plus faible que la dispersion est plus forte, et il n'en est pas de même de l'éclat des raies brillantes homogènes provenant des protubérances. Ces raies paraissent donc brillantes sur champ pâle comme les images des étoiles dans les lunettes ordinaires.

La hauteur des raies brillantes observées indique la hauteur de la protubérance au point où l'on se trouve; en déplaçant ce point de proche en proche, on peut dessiner la protubérance. On peut même l'apercevoir dans son ensemble, si la dispersion est suffisante, en élargissant la fente.

L'étude du Soleil a montré que l'atmosphère relativement refroidie qui entoure le Soleil est limitée extérieurement par une couche mince incandescente, la chromosphère, formée des vapeurs des éléments (hydrogène, sodium, calcium, etc.) les plus volatils. La chromosphère a été signalée dès 1868 comme étant la base des protubérances, par Lockyer qui trouva, en même temps que Janssen, le moyen de voir les protubérances en dehors des éclipses. La raie voisine de D, reconnue depuis longtemps dans la chromosphère, a été, dès l'origine, attribuée à un métal inconnu, l'*hélium,* qui a été découvert dans un minéral rare, la clévéite, par Lord Ramsay au commencement de 1895.

Au delà de la chromosphère s'étend une lueur étendue, la *couronne,* visible dans les éclipses totales et caractérisée par une raie verte, de longueur d'onde 531,16, la raie 1474 de Kirchhoff. C'est la seule raie solaire qui ne se retrouve dans les spectres d'aucune substance chimique terrestre.

Pour l'observation des spectres d'étoiles, on place, devant l'objectif du spectroscope ou à l'oculaire, suivant la nature et la forme de spectroscope employé, une lentille cylindrique de long foyer qui transforme chaque point du spectre en une ligne focale.

Toutes les étoiles renferment de l'hydrogène dont les raies apparaissent toujours sombres sur fond brillant, sauf dans γ Cassiopée et β Lyre; leurs spectres ont été, dès 1867, classés par Secchi, en trois classes :

Classe I. — Étoiles blanches ou bleues, où les raies de l'hydrogène sont très marquées, les raies métalliques très difficiles à voir; le bleu et le violet sont les parties les plus éclatantes du spectre.

Classe II. — Étoiles jaunes, raies métalliques très apparentes, la partie violette du spectre très pâle, spectres tout à fait analogues à celui du Soleil.

Classe III. — Étoiles rouges, le spectre offre, outre les raies métalliques, de nombreuses bandes obscures dans toute son étendue.

Nous avons dit au Tome I de cet Ouvrage que les nébuleuses donnent des spectres formés de raies brillantes. La détermination de la nature de ces spectres donne donc le moyen de distinguer nettement les nébuleuses résolubles, ou amas stellaires, dont les spectres sont continus et les nébuleuses proprement dites, ou nébuleuses non résolubles. Un des faits les plus importants pour la connaissance de la constitution de l'univers a été constaté dans ces dernières années. Une étoile nouvelle de grandeur 4,5 ($\alpha = 5^h 25^m 3^s,3$, $\delta = 30^\circ 21' 50'',5$) était vue le 1er février 1892 dans la constellation du Cocher; son éclat décroissait rapidement; à la fin d'avril elle n'était plus que de 16e grandeur; le 9 août elle se retrouvait de grandeur 9,5 avec l'aspect d'une nébu-

et finalement au violet, ... Si la vitesse d'une étoile vient à changer, sa couleur aussi bien que son intensité subissent une variation et il peut toujours arriver qu'une étoile, dans la suite des temps, nous paraisse parcourir les couleurs du spectre. »

Ces conclusions ne seraient exactes que si l'astre n'émettait que des rayons d'une seule couleur et si la vitesse de l'astre était comparable à celle de la lumière. Cette dernière condition n'est pas plus réalisée que la première. Le mouvement relatif de l'astre produit, pour chaque rayon, une variation de la longueur d'onde et, par suite, de l'indice, mais ne change pas l'ensemble des radiations. Si la source lumineuse avait une vitesse assez grande pour que les rayons rouges devinssent orangés, des rayons obscurs voisins du rouge deviendraient rouges et ainsi de suite, et l'ensemble du spectre, en apparence, ne serait pas modifié.

C'est en 1848 que M. Fizeau, dans un Mémoire imprimé en 1870, dans les *Annales de Chimie et de Physique,* rétablit les vrais principes et annonça que l'effet du mouvement relatif de l'observateur et de la source lumineuse *devait se traduire par un déplacement des raies* correspondant au changement de la longueur d'onde.

M. Fizeau trouve que, si la vitesse relative de la source et de l'observateur était égale à la vitesse orbitale de la Terre, le déplacement de la raie D, dans un spectre fourni par un prisme de flint ayant un angle de 60°, dépasserait deux secondes.

Les principes énoncés par Doppler et Fizeau fournissent une méthode pour la mesure de la vitesse des corps célestes suivant la ligne de vue. Il convient de les énoncer ainsi :

La réfrangibilité d'une onde lumineuse ne dépend, toutes choses égales d'ailleurs, que de la période apparente de son mouvement vibratoire.

Après la découverte, par Kirchhoff, de l'analyse spectrale, deux physiciens anglais, MM. Huggins et Miller, adaptèrent un spectroscope à une lunette astronomique, analysèrent la lumière de la Lune, des planètes, des diverses étoiles, des nébuleuses, en relevèrent les raies et constatèrent leur identité avec celles de sources artificielles. En 1868, Huggins, avec un spectroscope suffisam-

ment dispersif, parvint à constater certains écarts entre la position de ces raies et la position des raies des sources employées. Maxwell retrouva la théorie de Fizeau; Huggins en fit l'application au mouvement de Sirius, mesura, dans son spectre, le déplacement de la raie F de l'hydrogène et démontra que cette étoile s'éloigne de la Terre de 47^{km} par seconde.

Depuis cette époque, des vérifications nombreuses ont été faites, pour l'exposé desquelles nous renverrons le lecteur à la remarquable Notice publiée par M. Cornu dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes,* pour 1891, nous bornant à citer les résultats les plus saillants.

En 1880, à l'observatoire de Nice, Thollon a mis en évidence la rotation du Soleil par la comparaison de quatre raies situées dans l'orangé. Deux de ces raies, *a* et *d*, sont telluriques; les deux autres, *b* et *c*, appartiennent au fer. Les longueurs d'onde, exprimées en dix-millièmes de micron ou en dix-millioniêmes de millimètre, sont pour les quatre raies :

$$a = 5976{,}35,$$
$$b = 5976{,}1,$$
$$c = 5974{,}6,$$
$$d = 5974{,}36.$$

Les intervalles $a - b$, $c - d$ paraissent très sensiblement égaux, quand le spectroscope est, le matin ou le soir, dirigé vers le centre du Soleil. Si l'on dirige le spectroscope vers un bord de l'équateur solaire, le rapport de ces intervalles devient égal au rapport de 3 à 2.

L'application de la méthode a révélé que certaines étoiles variables sont assurément doubles, la variabilité étant due à la variation des positions relatives des deux composantes qui peuvent, comme dans le cas d'Algol, être l'une brillante, l'autre obscure, ou comme dans le cas de ζ Ophiuchus et celui de β Cocher, être toutes deux brillantes.

M. Vogel a constaté que la vitesse d'Algol, dans la direction de la ligne de vue, change de sens au minimum d'éclat; les mesures faites donnent pour la vitesse dans l'orbite 42^{km} et, la durée de révolution étant $2^{j}\,20^{h}\,49$, il s'ensuit qu'Algol décrit approximativement un cercle de $1\,700\,000^{km}$ de rayon.

Dans le spectre de ζ Grande Ourse la raie K, ordinairement

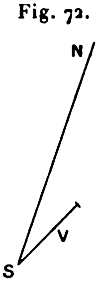
simple, se dédouble tous les 52 jours; dans celui de β Cocher la même raie est presque toujours dédoublée et l'étude de la variation des distances donne une période de quatre jours.

Le spectre de la remarquable étoile variable β Lyre offre des raies sombres fixes et des raies brillantes dont l'éclat et la position varient sensiblement en même temps que la grandeur de l'étoile. Ces circonstances, rapprochées de la loi complexe de la variation de grandeur, montrent clairement que cet astre est un système complexe offrant un mouvement orbital.

Les résultats de cette nature peuvent jeter une vive lumière sur les mouvements des étoiles; la méthode Doppler-Fizeau a donc ouvert à l'étude des mouvements célestes une voie des plus fécondes et entièrement nouvelle. Il ne faut pas oublier, dans son application, qu'elle donne le mouvement relatif de l'astre par rapport à l'observateur et que, pour obtenir le mouvement de l'astre dans l'espace, il faut tenir compte du mouvement de la Terre autour du Soleil et du mouvement du Soleil dans l'espace.

Récemment, la méthode a été appliquée aux nébuleuses.

Fig. 72.



M. Keeler, à l'observatoire Lick, a mesuré les vitesses radiales de 14 d'entre elles.

Soient, pour une de ces nébuleuses, $\frac{d\Delta}{dt}$ la vitesse radiale mesurée (c'est la vitesse suivant la droite qui joint l'astre N au soleil S) (*fig.* 72); ζ l'angle que fait la direction SN de la nébuleuse avec la vitesse V du Soleil dans l'espace; α, δ l'ascension droite et la déclinaison connues de V; α', δ' celles de la direction SN; ζ' l'angle que fait la vitesse V' de la nébuleuse avec SN. On a

$$\frac{d\Delta}{dt} = V\cos\zeta - V'\cos\zeta',$$

où

$$\cos\zeta = \sin\delta \sin\delta' + \cos\delta \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha).$$

D'après L. Struve, on a sensiblement

$$\alpha = 266°,7, \qquad \delta = +31°,0.$$

Les coordonnées α', δ' de chaque nébuleuse sont suppos
nues; M. Keeler a mesuré $\frac{d\Delta}{dt}$; V, d'après diverses recl
paraît comprise entre 10^{km} et 30^{km}. Pour des valeurs de
prises entre ces limites, on trouve, pour les vitesses V' c
nébuleuses suivant la ligne de vue, des valeurs qui pe
teindre 72^{km}. Les valeurs de ζ' sont inconnues; néanmoins,
admettre que V' est du même ordre que ses composantes
tielles à la sphère céleste. Si l'on suppose que l'une de c
posantes soit égale à 30^{km}, c'est-à-dire à la vitesse de l
dans son orbite autour du Soleil, le déplacement annu
nébuleuse sur la sphère sera vu sous un angle égal au
de la circonférence de l'orbite terrestre par la distance
nébuleuse au Soleil, ou à $2\pi p$, p désignant la paralla
nébuleuse.

Il suit de là que si la parallaxe était 0'',01, le mouvemen
en un siècle serait 6''. La mesure des vitesses radiales, c
avec celle des mouvements propres, doit donc conduire
naissance des parallaxes des nébuleuses, et ce ne sera pas
cation la moins importante de la Spectroscopie stellaire.

302. Photographie céleste. Premiers essais. — Les
résultats de photographie céleste ont été des daguerréoty
Lune (de 25^{mm}) obtenus, en 1840, par W. Draper, p
minutes de pose au foyer d'un télescope de Newton
d'ouverture. Bond, en 1850, à l'équatorial de 38^{cm} de
College, obtint des daguerréotypes plus parfaits.

En 1851, Legay imagina de supporter la couche sen
chlorure d'argent par une couche mince de collodion a
sur une lame de verre; à partir de cette date, grâce à la
lité du nouveau procédé, les essais de photographie astro
se multiplièrent; notamment de remarquables épreuv

Lune furent obtenues, de 1852 à 1858, avec des télescopes à miroir par Warren de la Rue, en Angleterre; Rutherfurd, en 1858, en Amérique, employa d'abord une lunette équatoriale, dans laquelle le foyer des rayons chimiques différait de 18^{mm} du foyer des rayons lumineux, puis un objectif composé d'un crown combiné avec un flint d'une distance focale moindre d'un dixième que celle qui produirait l'achromatisme optique. Rutherfurd montra d'ailleurs que l'on peut achromatiser, pour les rayons chimiques, un objectif ordinaire en plaçant en avant de la lentille biconvexe un ménisque de flint concave-convexe. M. Cornu a indiqué, plus tard, que l'on peut y parvenir en écartant un peu les deux lentilles; seulement ces procédés modifient les aberrations de sphéricité et les images deviennent moins bonnes.

C'est à l'éclipse du 28 juillet 1851, que fut, par une pose de quatre-vingt-quatre secondes à Rischöft, obtenue, par le Dr Busch de Königsberg et Berkowski, sur un daguerréotype, la première épreuve de la couronne solaire entourant le disque de la Lune pendant la totalité; cette épreuve montre les principales protubérances. Des épreuves, au collodion, lors de l'éclipse du 18 juillet 1860, démontrèrent que les protubérances, mobiles par rapport au disque lunaire, appartiennent bien au Soleil. D'autres épreuves plus petites, mais d'une finesse extraordinaire, ont été obtenues le 12 décembre 1871, au moyen d'objectifs à portraits dans lesquels la distance focale n'est que sept ou huit fois l'ouverture.

L'image même du Soleil est particulièrement difficile à obtenir. Un daguerréotype de 1845, par Fizeau et Foucault, montre que la lumière décroît du centre à la circonférence; on y voit des groupes de taches avec pénombre, mais pas de facules. A l'observatoire de Kew, M. Warren de la Rue installa un photohéliographe formé d'un objectif de 87^{mm}, diaphragmé à 50^{mm}, et $1^{m},27$ de distance focale, où l'image du Soleil est agrandie à 10^{cm} de diamètre. Le diaphragme métallique placé au foyer principal de l'objectif est percé d'une fente rectangulaire étroite, de largeur variable et mue par un ressort. L'instrument est monté équatorialement et pourvu d'un mouvement d'horlogerie. Winlock, à Harward College, installa horizontalement un objectif de 10^{cm} d'ouverture et 10^{m} de foyer, sur lequel l'image du Soleil est renvoyée par un miroir plan mobile comme celui d'un héliostat; il n'y a

303. Équatorial photographique de la Carte du Ciel. — L'instrument se compose de deux lunettes de distances focales à peu près égales, montées dans un même tube rectangulaire. L'objectif de l'une, de 33^{cm} d'ouverture et $3^{m},43$ de distance focale, est achromatisé pour les rayons chimiques; l'ouverture de l'autre est de 19^{cm}. Les deux lunettes, montées dans le même tube en tôle d'acier, sont séparées par une mince cloison métallique. La lunette ordinaire est pourvue d'un micromètre à deux vis rectangulaires; l'autre porte un châssis métallique propre à renfermer une plaque photographique, dont la couche sensible est exactement au foyer chimique.

La double lunette est supportée par une monture équatoriale de forme anglaise, permettant d'observer avant et après le méridien, sans être obligé de passer de la position directe à la position inverse. Le double tube rectangulaire porte l'axe de déclinaison, formé de deux tourillons séparés, ajustés vers la région centrale du tube dans le prolongement l'un de l'autre. Ces tourillons pénètrent dans des coussinets cylindriques portés par les côtés longs d'un long cadre rectangulaire très robuste, dont les deux autres côtés portent deux tourillons formant l'axe horaire.

Ces tourillons tournent sur de doubles galets supportés par des piliers. Le tourillon inférieur se termine en goutte de suif appuyant sur une pièce métallique invariablement fixée au pilier.

Une telle lunette permet d'obtenir des clichés de deux degrés de côté, sur lesquels des mesures sont possibles avec une précision qui dépasse la précision des pointés faits au micromètre d'un équatorial ordinaire. Pour s'assurer contre les déformations que pourrait subir, avec le temps, la couche de gélatine, on photographie préalablement, sur la plaque, un réseau de traits rectangulaires tracés avec le plus grand soin sur une glace argentée. Si l'on a étudié les distances des traits de cette glace, on conçoit que la comparaison des positions des étoiles se ramènera à la mesure des distances des images de chacune d'elles aux quatre traits du carré dans lequel elle se trouve.

L'obtention même des clichés est des plus simples, une fois le foyer photographique déterminé. L'équatorial photographique est pourvu d'un mouvement d'horlogerie qui entraîne l'instrument avec la vitesse du mouvement diurne. L'astronome, l'œil à la lu-

nette de 24^{cm}, corrige, au moyen de deux vis de rappel, e tenant rigoureusement une croisée de fils sur une ét irrégularités de ce mouvement et les déplacements qui r de la réfraction. En ce qui concerne ces déplacements, il d'observer que, par de très longues poses, les distances m des images des étoiles se modifient avec le temps de quant pour de grands champs, ne sont pas entièrement insensib

Les clichés sont mesurés au moyen d'un micromètre auquel MM. Henry ont donné le nom de *macromicromè* deux glissières horizontales parallèles se meut un chario traîné par une vis micrométrique V_1 de grandes dimens chariot, incliné à 45° pour la commodité de l'observateu deux glissières parallèles situées dans des plans verticaux quelles se meut, au moyen d'une seconde vis V_2, un chariot C_2, sur lequel on adapte le cliché à mesurer. La sur laquelle se place le cliché peut tourner dans son prop elle porte un cercle divisé, dont la lecture à un index fix d'orienter la plaque à volonté. Ce mouvement d'orient fait soit rapidement à la main, soit lentement au moye pince et d'une vis de rappel.

Un microscope fixe dont l'axe est perpendiculaire au c qui est pourvu d'un micromètre M à deux vis rectan permet d'observer traits et images d'étoiles, et de mes distances de chaque étoile aux côtés du carré dans lequ trouve. A cet effet, on oriente le cliché de telle façon qu mouvement de la vis V_1, le trait central T_1 d'une des sér constamment par la croisée des fils du micromètre M; et l mètre M de façon que les fils que porte l'une des vis sc rallèles à ce trait T_1. Pratiquement la construction est asse pour que l'angle des deux glissières diffère de 90° de moi minute d'arc. Dans ces conditions, il est aisé de voir qu imagine sur le cliché deux axes rectangulaires OX, O l'un coïncide avec le trait T_1, les deux grandes vis du micromètre permettront de mesurer, avec une précisi sante, les projections sur ces deux axes de la distance points quelconques pris dans toute l'étendue du cliché. *tiori,* les vis du micromètre M permettent de mesurer tances comptées parallèlement à OX et OY de chaque é

côtés du carré correspondant. Sur les clichés, une distance d'un millimètre correspond dans le Ciel à un écart d'une minute d'arc; on mesure aisément le millième de millimètre, ou le demi-dixième de seconde d'arc. Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs de réduction; il nous suffira de dire que l'on utilise, pour la détermination des constantes instrumentales, toutes les étoiles de positions bien connues qui se trouvent sur le cliché lui-même.

304. **Autres combinaisons optiques.** — Les proportions instrumentales adoptées par MM. Henry et, après eux, par le Congrès astro-photographique, permettent d'obtenir d'excellents clichés, sur lesquels peuvent être effectuées des mesures de haute précision. Des poses d'une heure donnent les étoiles jusqu'à la quatorzième grandeur inclusivement; des poses de vingt secondes donnent les neuvièmes. MM. Henry distinguent les véritables images d'étoiles des points noirs qui tiennent à des défauts de la plaque, en remplaçant la pose d'une heure par trois poses successives de vingt minutes. En passant de l'une à l'autre, ils donnent à la lunette un déplacement de quatre à cinq secondes d'arc, de telle façon que les trois images d'une même étoile forment un triangle équilatéral. Dans les reproductions, les poses d'une heure donnent des images un peu plus visibles que les poses de trois fois vingt minutes. La Conférence de 1896 du Comité permanent du Congrès de la Carte photographique du Ciel a, pour ce motif, adopté, pour une des séries de clichés, trois poses de trente minutes.

Pour les travaux qui ne nécessitent pas de mesures précises, il est avantageux d'employer des objectifs à très courts foyers. On a pu obtenir des objectifs de 16^{cm} d'ouverture et de 80^{cm} de distance focale, donnant de bonnes épreuves de 9° à 10° de côté. La puissance de concentration de la lumière d'un astre sans diamètre apparent au foyer d'un objectif est proportionnelle à l'aire de l'objectif, c'est-à-dire au carré de son diamètre, et indépendante de la distance focale; de sorte que l'on peut obtenir, avec les objectifs à courts foyers, par des poses dont la durée n'a rien d'excessif, des images très noires sur de très grands champs. De tels objectifs ont permis de trouver, sur les plaques, des petites planètes très faibles, de 13e et même de 14e grandeur, qui ne

ERRATA.

TOME I.

Pages.	Lignes.				
73	17 en bas,	*supprimer* aussi.			
93	3 »	*au lieu de :*	linéaire,	*lire :*	angulaire.
169	14 en haut,	»	A,	»	A′.
221	13 »		de M, dont l'écart δM avec M, *lisez :* de m, dont l'écart δm avec m.		
221	18 »	»	$\frac{\partial x}{\partial M}\delta M$,	»	$\frac{\partial x}{\partial m}\delta m$.

TOME II.

11	5 en bas,	*au lieu de :*	sommet.	*lire :*	sommets.
12	3 »	»	M,	»	M_1.
12	1 »	»	m,	»	m_1.
13	8 »	»	$\frac{A+E}{2}$ et $\frac{\varphi+\delta}{2}$,	»	$\frac{A-E}{2}$ et $\frac{\varphi-\delta}{2}$.
17	10 en haut,	»	ν,	»	α.
20	11 en bas,	»	A,	»	H.
21	2 et 4 en haut,	»	A et A_0,	»	PZS et PZS_0.
24	5 en haut,	»	fonction r;	»	fonction de r;
24	1 en bas,	»	tang i',	»	tang i.
26	8 en bas au numérateur,	»	$1+\gamma\rho$,	»	$\gamma\, d\rho$.
27	2 en haut,	»	$\pm$,	»	$-$,
28	2 en bas,	»	$\frac{p_0}{\rho_0}$,	»	$\frac{\rho_0}{p_0}$.
29	5 »	»	n° 25,	»	n° 24.
30	1 et 8 en bas,	»	R,	»	R_0.
31	4 en haut,	»	$2\sqrt{m\alpha}$,	»	$2\sqrt{m}\,\alpha$.
32	3 en bas,	»	$-\frac{\rho_0}{z}$,	»	$-\frac{\rho_0}{2}$.
38	1, 3, 8 en bas,	»	r,	»	r_0.
39	1, 7, 8 »	»	r,	»	r_0.
43	3, 7 en bas,	»	φ,	»	φ'.
	7 »	ajouter ces mots : h le demi-diamètre apparent de la Lune.			
44	11 »	*au lieu de :*	$\cos z+h)$,	*lire :*	$\cos(z+h)$.
	partout,	»	φ,	»	φ'

Pages.	Lignes.				
266	11 en haut,	*au lieu de :*	$\sum$,	*lire :*	$\frac{d}{dt}\sum$.
274	1 en bas,	»	$\frac{f\mu}{a^2}\frac{da}{dt}$,	»	$\frac{1}{2}\frac{f\mu}{a^2}\frac{da}{dt}$.
275	2 en haut,				
276	4 en bas,	»	$l-\theta$,	»	$v-\theta$.
291	5 en haut,	»	V, V',	»	v, v',
305	15 »	»	le terme,	»	la fraction.
306	6 et 8 en bas,	»	m_1,	»	m'.
310	9 en bas,	»	$'f$,	»	$'f$.
325	3 en bas,	»	excentricité,	»	l'excentricité.
348	7 en bas,	»	$=g$,	»	$\mu=g$.
386	2 en haut,	*lire :* connaître, soit avec précision si l'on détermine le nivellement géodésique,			
496	11 en haut,	*au lieu de :* les spectres du Soleil étant continus. *lire :* le spectre du Soleil étant continu.			

CHAPITRE III.

Parallaxe.

CHAPITRE IV.

Aberration des fixes. — Son influence sur les coordonnées équatoriales d'un astre. — Influence du mouvement du système solaire dans l'espace. — Aberration annuelle; ellipse d'aberration. — Aberration diurne. — Aberration des planètes.

CHAPITRE V.

Déplacement de l'écliptique et de l'équateur sur la sphère, précession des équinoxes. — Précession lunisolaire, précession planétaire, précession générale. — Nutation. — Éléments de la précession sur l'équateur. — Variation des coordonnées écliptiques ou équatoriales des astres dues à la précession proprement dite. Précession annuelle; sa détermination directe. Influence de la nutation. Formules pour trouver les coordonnées vraies d'un astre à une date donnée. — Influence de la précession sur les éléments qui définissent un grand cercle de la sphère. — Mouvements propres des étoiles.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

Détermination d'une ellipse par deux rayons vecteurs et l'intervalle de temps mis par l'astre à passer de l'un à l'autre. — Même problème pour la parabole. — Théorème d'Euler. — Théorème de Lambert. — Rapport des aires des triangles compris entre trois rayons vecteurs. — Expressions des distances d'une planète à la Terre à trois époques, en fonction des aires des triangles compris entre les rayons vecteurs menés du Soleil à la planète à ces trois époques.

CHAPITRE IX.

Détermination d'une orbite elliptique. — Trois observations complètes donnent les six équations nécessaires. — Réductions préliminaires et changement d'axes de coordonnées. — Méthode de Gauss. — Méthode d'Oppolzer. — Orbites circulaires.

CHAPITRE X.

Comètes. — Généralités sur leurs orbites. — Méthode d'Olbers pour la détermination d'une orbite parabolique.

CHAPITRE XI.

Loi de Newton. — Équations des mouvements des planètes au du Soleil. — Intégration dans le cas d'une seule planète.

CHAPITRE XII.

Mouvement troublé : intégrales du problème des $n+1$ corps. - thode d'approximation de Lagrange, dite de la variation de stantes arbitraires : application aux inégalités séculaires des pl principales.

CHAPITRE XIII.

Calcul des perturbations spéciales par quadratures mécaniques. - thode de la variation des éléments. — Méthode des coordo rectangulaires ou méthode de Bond et d'Encke. — Méthode des données polaires, ou méthode de Hansen, perfectionnée par Ti — Comparaison des éléments primitifs aux observations. — normaux.

CHAPITRE XIV.

De la Lune. — Équations différentielles du mouvement d'un satellite. — Réduction des équations qui donnent la latitude et le rayon vecteur à une équation linéaire du second ordre à coefficients périodiques. — Intégration approchée de cette équation; application au cas de la Lune. — Expression du temps en fonction de la longitude. — Expression de la longitude, de la latitude et du rayon vecteur en fonction du temps. — Valeurs numériques des principales inégalités obtenues. — Inégalité parallactique; inégalité séculaire du moyen mouvement.

CHAPITRE XV.

Satellites de Jupiter. — Représentation approchée de leurs mouvements. — Explication de leurs principales inégalités. — Éclipses des satellites. — Vitesse de la lumière.

CHAPITRE XVI.

La Terre. — Aperçu historique concernant l'étude de sa forme et de ses dimensions.

CHAPITRE XXI.

Astronomie moderne. — Distances, mouvements, éclat des étoiles. Spectroscopie. — Photographie.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

19998 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.